

Tema 9 (V). Circunferencia: posiciones y ángulos

Resumen

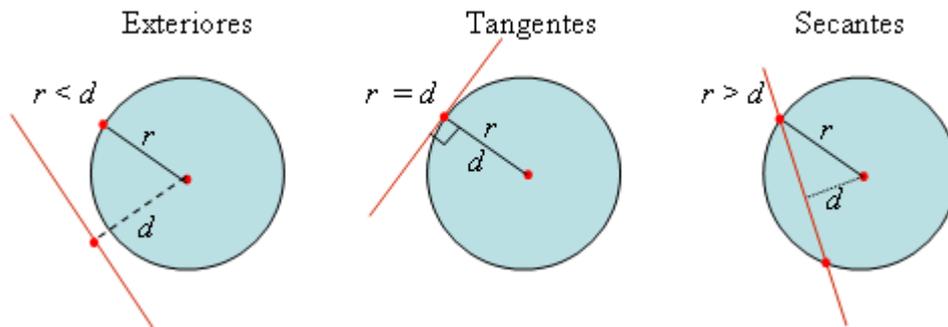
- La circunferencia es una línea curva, cerrada y plana cuyos puntos equidistan (están a la misma distancia) de otro punto interior llamado centro. La distancia al centro se llama radio.
- Un círculo es el conjunto de puntos del plano rodeado por una circunferencia.

Posiciones relativas de una recta y una circunferencia

Exteriores: La recta y la circunferencia no tienen ningún punto en común.

Tangentes: La recta y la circunferencia tienen un solo punto en común. El radio correspondiente al punto de tangencia es perpendicular a la recta.

Secantes: La recta y la circunferencia tienen dos puntos en común.



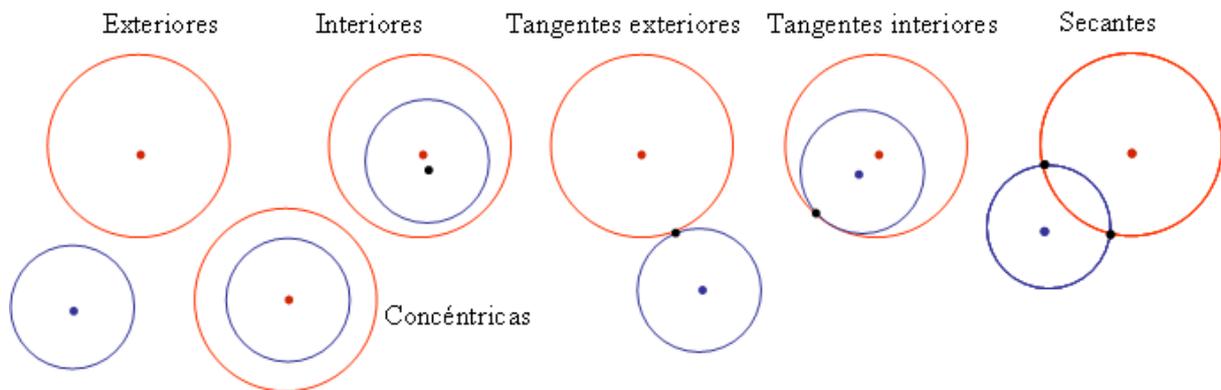
Posiciones relativas de dos circunferencias

Exteriores e interiores: Ningún punto en común.

Concéntricas: son interiores con el mismo centro.

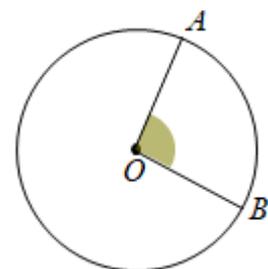
Tangentes: Tienen un solo punto en común. Pueden ser exteriores o interiores. En ambos casos, los centros y el punto de tangencia están en la misma recta.

Secantes: Tienen dos puntos en común.

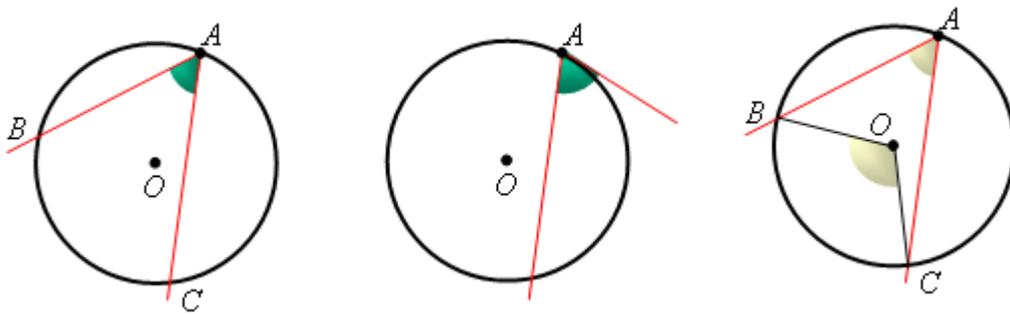


Ángulos en la circunferencia

Ángulo central: es cualquier ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia. (Todo ángulo central está determinado por dos radios). La media de un ángulo central es la de su arco correspondiente.



Ángulo inscrito: es el que tiene su vértice en un punto de la circunferencia, siendo sus lados secantes o tangentes a ella.



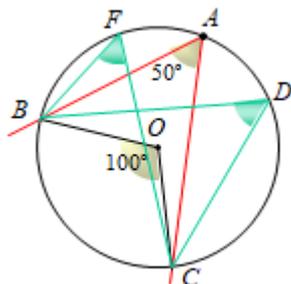
Propiedad de los ángulos inscritos:

Todo ángulo inscrito en una circunferencia vale la mitad que el ángulo central correspondiente (el que abarca el mismo arco). Esto es: la medida del ángulo BAC es la mitad que la del ángulo BOC . O también: $\text{ángulo } BOC = 2 \cdot (\text{ángulo } BAC)$.

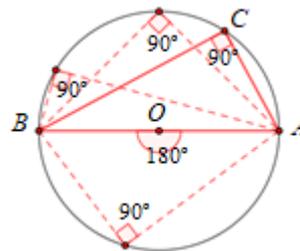
Nota: Si deseas ver la demostración de esta propiedad [pincha aquí](#).

Ejemplos:

a) En la figura adjunta el ángulo BAC vale 50° . Por tanto, el ángulo BOC valdrá 100° . Por lo mismo, como el ángulo $BOC = 100^\circ$, se deduce que los ángulos BFC y BDC valen 50° , la mitad de 100° .



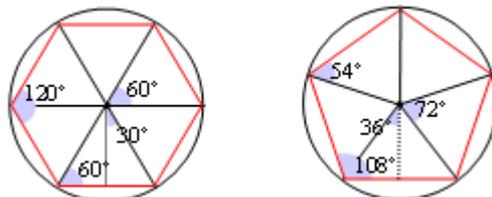
b) Un caso particular muy utilizado es el siguiente resultado: todo ángulo inscrito que abarca un diámetro de su circunferencia es recto. (El centro de la circunferencia es el punto medio de la hipotenusa).



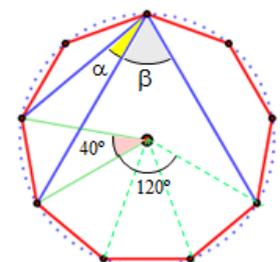
Medidas de ángulos de polígonos regulares.

Hay que saber que todo polígono regular puede circunscribirse por una circunferencia. También hay que saber que el ángulo completo mide 360° .

Por tanto, dividiendo 360 entre el número de lados se obtiene la medida del ángulo de cada uno de los triángulos con vértice en el centro. En el caso del hexágono, los ángulos centrales valen 60° ; en el pentágono, 72° . Los demás ángulos valen lo que se indica en la figura.



En la figura de la derecha se ha dibujado un polígono regular de 9 lados (eneágono). Como cada uno de los ángulos centrales que abarca un lado mide 40° ($360/9 = 40$), puede deducirse que $\alpha = 20^\circ$; y que $\beta = 60^\circ$.

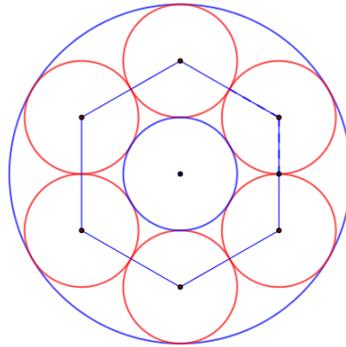


Ejercicios

1. Dibuja una circunferencia de radio 3 cm y dos rectas tangentes a ella. En cada caso, traza el radio correspondiente al punto de tangencia y mide el ángulo que forma dicho radio con la recta tangente. ¿Cuánto miden esos ángulos? Puedes dar algún resultado general sobre el ángulo que forma la recta tangente con el radio correspondiente.

2. Traza dos circunferencias tangentes exteriores (y otras dos tangentes interiores) de radios 3 cm y 2 cm, respectivamente. ¿Cuál es la disposición del punto de tangencia y de los centros de esas circunferencias? ¿A qué distancia están los centros de esas circunferencias?

3. La circunferencia grande tiene radio 3; las circunferencias pequeñas son todas iguales y tangentes entre sí. ¿Cuánto mide el lado del hexágono regular?

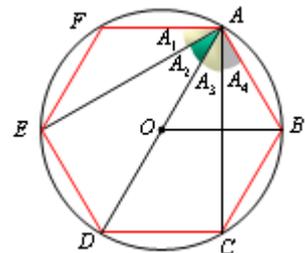


4. En la figura adjunta se ha dibujado un hexágono regular. Obsérvala y contesta:

a) ¿Cuánto valen los ángulos A_1 , A_2 , A_3 y A_4 ? Justifícalo.

b) Clasifica el cuadrilátero de vértices $OBCD$.

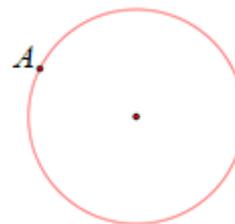
c) Clasifica los triángulos OAB , ACD y ACE .



5. Para los siguientes ángulos inscritos, indica el valor de sus ángulos centrales correspondientes:

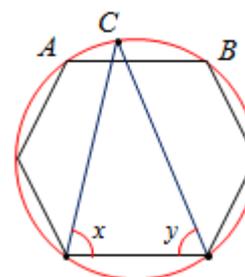
Inscrito	20°	30°	45°	60°	90°	120°	140°
Central							

Con vértice en A, dibuja los ángulos inscritos de 30° y 90°, y sus centrales correspondientes



6. Dibuja una circunferencia y un ángulo central de 180°. ¿Cuánto vale cualquiera de los ángulos inscritos correspondiente? ¿Cómo son los triángulos inscritos en una circunferencia que tienen por lado el diámetro? ¿Cómo es el triángulo EAD inscrito en la circunferencia de arriba?

7. En la siguiente figura se tiene un hexágono regular y un triángulo, inscritos en una circunferencia. Si C es un punto del arco AB , ¿cuánto vale la suma de los ángulos $x + y$?



Observaciones:

En los siguientes enlaces puede ver problemas relacionados con los ángulos inscritos:

[1. Problemas.](#)

[2. Problemas.](#)

[3. Problema.](#)

→ Puedes ver un magnífico trabajo sobre ángulos inscritos en la página web del profesor Roberto Cardil:

<http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/circunferencias/angcap.html>

Soluciones:

1. El radio correspondiente al punto de tangencia es perpendicular a la recta.
2. Los centros de las circunferencias y el punto de tangencia están alineados. Sus distancias son 5 cm y 1 cm, respectivamente.
3. El radio de las circunferencias pequeñas mide 1; el lado del hexágono, 2.
4. a) Todos valen 30°: cada uno de esos ángulos abarca el arco correspondiente a un lado del hexágono. b) Rombo. c) Equilátero; rectángulo; equilátero.
5. 40°; 60°; 90°; 120°; 180°; 240°; 280°.
6. Ver ejemplo b) del resumen. 7. El ángulo inscrito PCQ valdrá 30°, abarca un ángulo central de 60°; luego, $x + y = 150°$