

Tema 6 (II). Operaciones con fracciones

Resumen

Reducción de dos o más fracciones a común denominador

Para reducir fracciones a común denominador se halla un número que sea múltiplo de los denominadores; a continuación se buscan fracciones equivalentes a las dadas pero con ese denominador común.

Un denominador común se obtiene multiplicando los denominadores de todas las fracciones. Aunque sea más costoso, se prefiere hallar fracciones con el menor denominador común, que se obtiene calculado el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplo:

Dadas las fracciones $\frac{3}{8}$ y $\frac{7}{12}$, las equivalentes a ellas con el mismo denominador son, respectivamente, $\frac{3 \cdot 12}{8 \cdot 12}$ y $\frac{7 \cdot 8}{12 \cdot 8}$. Esto es: $\frac{36}{96}$ y $\frac{56}{96}$.

• Si se opta por hallar el mínimo común múltiplo de los denominadores, $\text{mcm}(8, 12) = 24$, las fracciones obtenidas serán: $\frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3}$ y $\frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2}$. Esto es: $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ y $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$.

Comparación de fracciones

• Si dos fracciones tienen el mismo denominador es mayor la que tiene mayor numerador.

Ejemplos:

a) $\frac{12}{17} > \frac{9}{17}$, pues $12 > 9$. b) Igualmente, $\frac{2}{5} < \frac{4}{5}$.

• Cuando las fracciones no tienen el mismo denominador, se reducen a común denominador y se comparan mediante el criterio anterior; aunque la forma matemática preferida es la aplicación de la regla que se indica más abajo. (No obstante, la forma más rápida de comparar fracciones es hallar su valor con la calculadora y comparar sus resultados).

Ejemplo:

Para determinar qué fracción es mayor, $\frac{9}{21}$ o $\frac{31}{70}$, se reducen a común denominador:

$$\frac{9}{21} = \frac{9 \cdot 70}{21 \cdot 70} = \frac{630}{1470} \quad \text{y} \quad \frac{31}{70} = \frac{31 \cdot 21}{70 \cdot 21} = \frac{651}{1470}, \quad \text{como } 630 < 651, \quad \text{entonces } \frac{9}{21} < \frac{31}{70}.$$

→ Recuerda que la regla general puede resultar más rápida: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$.

En este ejemplo, como $9 \cdot 70 = 630 < 31 \cdot 21 = 651 \Rightarrow \frac{9}{21} < \frac{31}{70}$.

Suma y resta de fracciones

• Si las fracciones tienen el mismo denominador: la fracción suma o resta es la que tiene por numerador la suma o resta de los numeradores y por denominador el común.

Ejemplos:

a) $\frac{4}{15} + \frac{7}{15} = \frac{4+7}{15} = \frac{11}{15}$.

b) $\frac{7}{9} - \frac{2}{9} = \frac{7-2}{9} = \frac{5}{9}$.

a) $\frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5+1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

b) $\frac{4}{7} + \frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{4+5-2}{7} = \frac{7}{7} = 1$.

- Si las fracciones tienen distinto denominador: se reducen a común denominador y se procede como antes.

Ejemplo:

$$a) \frac{2}{9} + \frac{5}{12} = \frac{8}{36} + \frac{15}{36} = \frac{8+15}{36} = \frac{23}{36} \rightarrow \text{mcm}(9, 12) = 36.$$

También podría multiplicarse el numerador y el denominador de cada fracción por el denominador de la otra. En este caso no hay que hallar el mcm, aunque suele obtenerse una fracción “ampliada” que conviene simplificar.

$$\text{Así: } \frac{2}{9} + \frac{5}{12} = \frac{2 \cdot 12}{9 \cdot 12} + \frac{5 \cdot 9}{12 \cdot 9} = \frac{24}{108} + \frac{45}{108} = \frac{69}{108} = (: 3) = \frac{23}{36}.$$

$$b) \frac{7}{15} - \frac{2}{9} = \frac{21}{45} - \frac{10}{45} = \frac{21-10}{45} = \frac{11}{45} \rightarrow \text{mcm}(15, 9) = 45.$$

Suma o resta de números enteros y fracciones

Si se escribe el número como una fracción con denominador 1, la operación se reduce a alguna de las anteriores.

Ejemplos:

$$a) 3 + \frac{4}{15} = \frac{3}{1} + \frac{4}{15} = \frac{3 \cdot 15 + 4 \cdot 1}{15} = \frac{49}{15}. \quad b) 4 - \frac{3}{7} = \frac{4}{1} - \frac{3}{7} = \frac{4 \cdot 7 - 3 \cdot 1}{7} = \frac{25}{7}.$$

$$c) \frac{5}{12} + 2 = \frac{5}{12} + \frac{24}{12} = \frac{29}{12}. \quad d) \frac{12}{5} - 2 = \frac{12}{5} - \frac{10}{5} = \frac{2}{5}.$$

- Directamente: $a + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}$ y $a - \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c - b}{c}$. (Análogamente: $\frac{b}{c} \pm a = \frac{b \pm a \cdot c}{c}$).

Ejemplos:

$$a) 5 + \frac{4}{9} = \frac{5 \cdot 9 + 4}{9} = \frac{45 + 4}{9} = \frac{49}{9}. \quad b) 4 - \frac{3}{7} = \frac{4 \cdot 7 - 3}{7} = \frac{28 - 3}{7} = \frac{25}{7}.$$

Multiplicación de fracciones

La fracción resultante tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador, el producto de los denominadores. Esto es, sus términos se multiplican en

“paralelo”: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Ejemplo:

$$a) \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 9} = \frac{20}{63}. \quad b) \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{10} = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 10} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}.$$

Multiplicación de un número entero por una fracción

La fracción resultante tiene como numerador el producto del número por el numerador; el denominador será el mismo. Esto es:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \quad \text{y} \quad \frac{b}{c} \cdot a = \frac{b \cdot a}{c}.$$

Ejemplos:

$$a) 7 \cdot \frac{5}{11} = \frac{7 \cdot 5}{11} = \frac{35}{11}. \quad b) \frac{3}{14} \cdot 6 = \frac{3 \cdot 6}{14} = \frac{18}{14} = \frac{9}{7}.$$

División de fracciones

La fracción resultante tiene como numerador el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda, y como denominador, el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda. Esto es, sus términos se multiplican en cruz $\rightarrow \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

Ejemplos:

$$\text{a) } \frac{6}{7} : \frac{3}{9} = \frac{6 \cdot 9}{7 \cdot 3} = \frac{54}{21} = \frac{18}{7}. \quad \text{b) } \frac{3}{11} : \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7}{11 \cdot 5} = \frac{21}{55}.$$

División de un número entero por una fracción y de una fracción por un número entero

Escribiendo el número entero como una fracción con denominador 1 la operación se hace

como se ha indicado en general. Esto es: $a : \frac{c}{d} = \frac{a}{1} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{c}$; $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b \cdot c}$.

Ejemplos:

$$\text{a) } 4 : \frac{5}{7} = \frac{4}{1} : \frac{5}{7} = \frac{28}{5}. \quad \text{b) } \frac{3}{8} : 6 = \frac{3}{8} : \frac{6}{1} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}.$$

Prioridad de operaciones y uso de paréntesis

Cuando las operaciones aparecen combinadas, primero se resuelven los paréntesis, después las multiplicaciones y divisiones; por último, las sumas y restas.

Ejemplos:

$$\text{a) } \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{6}{9} - \frac{5}{9}\right) \cdot \left(\frac{15}{20} + \frac{4}{20}\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{19}{20} = \frac{19}{180}.$$

$$\text{b) } \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) : \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \left(\frac{6}{9} - \frac{5}{9}\right) : \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{9} : \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 4}{9 \cdot 3} + \frac{1}{5} = \frac{4}{27} + \frac{1}{5} = \frac{4}{27} + \frac{9}{45} = \frac{15}{135} + \frac{27}{135} = \frac{42}{135} = \frac{14}{45}.$$

$$\text{c) } \frac{2}{3} - \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3} - \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{15}{20} + \frac{4}{20}\right) = \frac{2}{3} - \frac{5 \cdot 19}{9 \cdot 20} = \frac{2}{3} - \frac{95}{180} = \frac{120}{180} - \frac{95}{180} = \frac{25}{180} = \frac{5}{36}.$$

$$\text{d) } \frac{2}{3} - \frac{5}{9} : \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{2}{3} - \frac{15}{36} + \frac{1}{5} = [\text{mcm}(3, 36, 5) = 180] = \frac{120}{180} - \frac{75}{180} + \frac{36}{180} = \frac{81}{180} = \frac{9}{20}.$$

$$\text{e) } 4 : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right) = 4 : \left(\frac{6}{9} - \frac{1}{9}\right) = 4 : \frac{5}{9} = \frac{36}{5}.$$

$$\text{f) } \frac{4}{5} : \frac{1}{3} - \frac{7}{8} = \frac{12}{5} - \frac{7}{8} = \frac{96}{40} - \frac{35}{40} = \frac{61}{40}.$$

Ejercicios

1. Reduce a común denominador los siguientes pares de fracciones:

a) $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{6} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{12}{30}$; $\frac{1}{6} = \frac{5}{30} \rightarrow \frac{12}{30}$ y $\frac{5}{30}$. b) $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{12} \rightarrow$

c) $\frac{3}{15}$ y $\frac{3}{12} \rightarrow$ d) $\frac{5}{9}$ y $\frac{7}{15} \rightarrow$

2. Para cada uno de los pares de fracciones anteriores, ¿cuál de ellas es la mayor?

a) $\frac{2}{5} = \frac{12}{30} > \frac{1}{6} = \frac{5}{30} \rightarrow$ la mayor es $\frac{2}{5}$. b)

c) d)

3. Reduce a común denominador las fracciones:

a) $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \rightarrow (\text{mcm} = 30) \rightarrow \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 6}, \frac{1 \cdot 10}{3 \cdot 10}, \frac{1 \cdot 5}{6 \cdot 5} \rightarrow \frac{12}{30}, \frac{10}{30}, \frac{5}{30}$.

b) $\frac{1}{3}, \frac{7}{15}, \frac{5}{12} \rightarrow$

c) $\frac{2}{9}, \frac{4}{15}, \frac{11}{30} \rightarrow$ d) $\frac{2}{7}, \frac{8}{21}, \frac{11}{42} \rightarrow$

4. Halla:

a) $\frac{4}{11} + \frac{5}{11} - \frac{2}{11} =$

b) $\frac{3}{7} + \frac{6}{7} - \frac{5}{7} =$

c) $\frac{4}{9} + \frac{3}{4} =$

d) $\frac{7}{12} - \frac{2}{9} =$

5. Halla:

a) $3 + \frac{1}{5} =$

b) $2 - \frac{3}{4} =$

c) $\frac{5}{11} + 6 =$

6. Calcula, simplificando el resultado:

a) $\frac{5}{12} \cdot \frac{9}{15} =$

b) $\frac{7}{18} \cdot \frac{6}{7} =$

c) $\frac{8}{15} \cdot \frac{25}{32} =$

7. Calcula, simplificando el resultado:

a) $10 \cdot \frac{9}{15} =$

b) $3 \cdot \frac{6}{11} =$

c) $\frac{8}{15} \cdot 12 =$

d) $\frac{90}{120} \cdot 60 =$

8. Calcula, simplificando el resultado:

$$\text{a) } \frac{5}{12} : \frac{4}{15} =$$

$$\text{b) } \frac{7}{18} : \frac{14}{15} =$$

$$\text{c) } \frac{8}{15} : \frac{12}{15} =$$

9. Calcula, simplificando el resultado:

$$\text{a) } 4 : \frac{2}{3} =$$

$$\text{b) } 3 : \frac{16}{5} =$$

$$\text{c) } \frac{50}{3} : 5 =$$

$$\text{d) } \frac{28}{3} : 4 =$$

10. Calcula:

$$\text{a) } \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{9}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right) =$$

$$\text{b) } \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} =$$

$$\text{c) } 4 - \frac{3}{7} - \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) =$$

$$\text{d) } \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) : \frac{5}{6} - \frac{1}{10} =$$

11. Calcula:

$$\text{a) } \frac{4}{3} : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right) =$$

$$\text{b) } \left(3 - \frac{4}{5}\right) : \frac{1}{3} =$$

$$\text{c) } \left(4 - \frac{3}{7}\right) + \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4} =$$

Soluciones:

$$1. \text{ b) } \frac{4}{12} \text{ y } \frac{5}{12}. \text{ c) } \frac{12}{60} \text{ y } \frac{15}{60}. \text{ d) } \frac{25}{45} \text{ y } \frac{21}{45}. \quad 2. \text{ a) } \frac{2}{5}. \text{ b) } \frac{5}{12}. \text{ c) } \frac{3}{12}. \text{ d) } \frac{5}{9}.$$

$$3. \text{ a) } \frac{12}{30}, \frac{10}{30}, \frac{5}{30}. \text{ b) } \frac{20}{60}, \frac{28}{60}, \frac{25}{60}. \text{ c) } \frac{20}{90}, \frac{24}{90}, \frac{33}{90}. \text{ d) } \frac{12}{42}, \frac{16}{42}, \frac{11}{42}.$$

$$4. \text{ a) } \frac{7}{11}. \text{ b) } \frac{4}{7}. \text{ c) } \frac{43}{36}. \text{ d) } \frac{13}{36}. \quad 5. \text{ a) } \frac{16}{5}. \text{ b) } \frac{5}{4}. \text{ c) } \frac{71}{11}. \quad 6. \text{ a) } \frac{1}{4}. \text{ b) } \frac{1}{3}. \text{ c) } \frac{5}{12}.$$

$$7. \text{ a) } \frac{18}{5}. \text{ b) } \frac{18}{11}. \text{ c) } \frac{32}{5}. \text{ d) } 45. \quad 8. \text{ a) } \frac{75}{48}. \text{ b) } \frac{5}{12}. \text{ c) } \frac{2}{3}. \quad 9. \text{ a) } 6. \text{ b) } \frac{15}{16}. \text{ c) } \frac{10}{3}. \text{ d) } \frac{7}{3}.$$

$$10. \text{ a) } \frac{49}{180}. \text{ b) } \frac{47}{180}. \text{ c) } \frac{218}{63}. \text{ d) } \frac{1}{30}. \quad 11. \text{ a) } \frac{12}{5}. \text{ b) } \frac{33}{5}. \text{ c) } \frac{313}{70}.$$