Tema 3. Potencias (base natural) Resumen

Potencia de un número es el producto repetido de ese número. Así, si *a* representa un número cualquiera, el producto $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$.
→ *a* es la base de la potencia; el número 4 es el exponente: indica las veces que se repite el factor *a*.

Ejemplos:
a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$. b) $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$. c) $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$.
d) $10^8 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000\,000$.

En el último ejemplo debes observar que una potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente.
El uso de las potencias de base 10 permite la descomposición polinómica de un número, que se basa en el distinto valor de una cifra dependiendo de la posición que ocupa en el número; ese valor puede expresarse mediante potencias de 10. Así, por ejemplo

$7345304 = \mathbf{7} \cdot 10^6 + \mathbf{3} \cdot 10^5 + \mathbf{4} \cdot 10^4 + \mathbf{5} \cdot 10^3 + \mathbf{3} \cdot 10^2 + \mathbf{0} \cdot 10^1 + \mathbf{4} \cdot 10^0$

= 7000000 (7 unidades de millón)
+ 300000 (3 centenas de millar)
+ 40000 (4 decenas de millar)
+ 5000 (unidades de millar)
+ 300 (3 centenas)
+ 00 (0 decenas)
+ 4 (4 unidades)

Recuerda que en el sistema de numeración decimal diez unidades de un orden cualquiera hacen una unidad de un orden superior.

1 decena (D) = 10 unidades (U) = $10^{\mathbf{1}}$ → orden de magnitud **1**;
1 centena (C) = 10 D = 100 U = $10^{\mathbf{2}}$ → orden de magnitud **2**;
1 unidad de millar (UM) = 10 C = 100 D = 1000 U = $10^{\mathbf{3}}$ → orden de magnitud **3**;
…
$7000000 = 7 \cdot 1000000 = 7 \cdot 10^6$ → los millones está en el orden de magnitud 6.

Ejemplo:
5 decenas de millar + 3 unidades de millar + 9 centenas + 2 decenas + 5 unidades =
$= 50000 + 3000 + 900 + 20 + 3 = \mathbf{5} \cdot 10^4 + \mathbf{3} \cdot 10^3 + \mathbf{9} \cdot 10^2 + \mathbf{2} \cdot 10^1 + \mathbf{3} \cdot 10^0 = 53923$

Operaciones con potencias

Suma y resta de potencias

Las sumas y restas de potencias hay que hacerlas con cuidado. Así, por ejemplo, la operación $2^5 + 3^3 - 5^2$ se hace convirtiendo cada potencia en su número correspondiente.

Ejemplos:
a) $2^5 + 3^3 - 5^2 = 32 + 9 - 25 = 16$. b) $3^2 - 2^3 + 4^2 = 9 - 8 + 16 = 17$.

Tampoco pueden simplificarse los cálculos aunque los sumandos tengan la misma base.

Ejemplos:
a) $2^5 + 2^3 = 32 + 8 = 40$. b) $3^5 - 3^3 = 243 - 27 = 216$.

Producto de un número por una potencia

El producto $5 \cdot 2^3$ significa $5 \cdot 8 = 40$; pero un error frecuente es escribir $5 \cdot 2^3 = 10^3$. El exponente sólo afecta al 2. Para que el exponente afectase también al 5 habría que indicarlo con paréntesis, así: $(5 \cdot 2)^3$, que ciertamente vale 10^3.

Ejemplos:

a) $3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 4^2 - 5^2 = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 16 - 25 = 24 + 32 - 25 = 31$.

b) $2 \cdot 5^3 + 10 \cdot 5^2 - 10^2 = 2 \cdot 125 + 10 \cdot 25 - 100 = 250 + 250 - 100 = 400$.

c) $(2 \cdot 5)^3 + (10 \cdot 5)^2 - 3 \cdot 10^2 = 10^3 + 50^2 - 3 \cdot 100 = 1000 + 2500 - 300 = 3200$.

Producto y cociente de potencias

La multiplicación o división de potencias de la misma base puede simplificarse. Para ello se emplean las siguientes propiedades:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ **Ejemplo:** $3^2 \cdot 3^3 = (9 \cdot 27) = 3^5 = 243$.
2. $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$ **Ejemplo:** $\left(3^2\right)^3 = (9)^3 = 3^6 = 729$.
3. $a^m : a^n = a^{m-n}$ **Ejemplo:** $4^5 : 4^2 = 4^3 = 64$.

Consecuencia: para todo $a \neq 0$, $a^0 = 1$, ya que $1 = a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$. **Ejemplo**: $7^0 = 1$.

4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ **Ejemplo**: $2^6 \cdot 5^6 = (2 \cdot 5)^6 = 10^6$.

Raíz cuadrada: $\sqrt{a} = b$, $a > 0 \Leftrightarrow b^2 = a$.

Ejemplos:

a) $\sqrt{25} = 5$, pues $5^2 = 25$. b) $\sqrt{144} = 12$, pues $12^2 = 144$. c) $\sqrt{1600} = 40$.

Optativo:

El sistema binario, que es el utilizado por los ordenadores utiliza solo dos números: 0 y 1.

- También es un sistema posicional, en el que 2 unidades de un orden cualquiera hacen una unidad de un orden superior.
- La unidad de primer orden es 2, escrito en binario 10; la unidad de segundo orden es 4, escrito 100; la unidad de tercer orden es 8, escrito 1000; …

Los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, escritos en sistema binario son:

Sistema decimal	0	1	2 + 0	3 = 2 + 1	4 = 4 + 0	5 = 4 + 1
Con potencias	0	$1 \cdot 2^0$	$1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
Sistema binario	0	1	10	11	100	101

Sistema decimal	6 = 4 + 2	7 = 4 + 2 + 1	8 = 8 + 0	9 = 8 + 1
Con potencias	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	$1 \cdot 2^3 + 0 + 0 + 1 \cdot 2^0$
Sistema binario	110	111	1000	1001

En general para expresar un número decimal en sistema binario hay que escribirlo como suma de potencias de 2, ordenadas en sentido decreciente.

Ejemplos:

a) $16 = 2^4 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 10000$.

b) $23 = 16 + 4 + 2 + 1 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 10111$.

c) El número binario 1001101 = $1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64+8+4+1 = 77$.

Puedes ampliar viendo: Más sobre sistemas de numeración.

Ejercicios

1. Expresa como potencia:

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 =$ b) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 =$ c) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$ d) $7 \cdot 7 =$

2. Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) $2^5 =$ b) $6^2 =$ c) $10^4 =$ d) $12^3 =$

3. Halla el valor del exponente para:

a) $2^n = 16 \Rightarrow 2^{\cancel{n}} = 16 = 2^{\cancel{4}} \Rightarrow n = 4$. b) $3^n = 9 \Rightarrow$

c) $10^n = 10000 \Rightarrow$ d) $4^n = 64 \Rightarrow$

4. Halla el valor de la base en cada caso:

a) $a^3 = 8 \Rightarrow \underline{a}^3 = 8 = \underline{2}^3 \Rightarrow a = 2$. b) $a^7 = 1 \Rightarrow$

c) $a^5 = 100000 \Rightarrow$ d) $a^4 = 81 \Rightarrow$

5. Escribe con todas sus cifras:

a) $10^7 =$ b) $10^8 =$

c) $10^4 =$ d) $10^3 =$

6. Escribe como potencia de base 10:

a) Diez millones = 10.000000 = 10^7. b) Cien millones =

c) Mil millones = d) Cien mil =

7. Escribe como producto de un número por una potencia de base 10 los siguientes números:

a) 2000 b) 800 c) 70 d) 5

(Observación: $10^1 = 10$; $10^0 = 1$).

8. Escribe como suma de números por potencias de base 10 la suma 2000 + 800 + 70 + 5.

$2000 + 800 + 70 + 5 = 2 \cdot 1000 + \ldots$ $= 2 \cdot 10^3 + \ldots$

9. Escribe en forma polinómica:

a) 2875 =

b) 60972 =

c) 30043 =

10. Escribe el número correspondiente a cada descomposición polinómica:

a) $6 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 9 =$

b) $8 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^1 + 2 =$

11. Halla el resultado de las siguientes operaciones:

a) $7 \cdot 10^4 =$

b) $7 \cdot 2^4 + 4 \cdot 3^2 = 7 \cdot 16 + 4 \cdot 9 = 112 + 36 = 148$.

c) $2 \cdot 10^2 – 3 \cdot 5^2 =$

d) $5 \cdot 3^5 + 9 \cdot 4^2 – 3 \cdot 7^3 =$

e) $2^3 \cdot 6^2 =$

f) $3^2 \cdot 2^3 – 3 \cdot 4^2 =$

g) $5^2 \cdot 2^3 – 145 =$

h) $2^5 \cdot 5^2 – 12 \cdot 3^3 =$

12. Expresa mediante una sola potencia:

a) $4^2 \cdot 4^6 =$ b) $3^5 \cdot 3^2 =$ c) $6^3 \cdot 6^5 =$ d) $2 \cdot 2^3 =$

e) $(5^3)^4 =$ f) $2^{12} : 2^8 =$ g) $10^6 : 10^2 =$ h) $4^4 \cdot 25^4 =$

13. Halla el cuadrado de los 10 primeros números naturales.

$1^2 = 1$; $2^2 =$;…

14. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt{64} = 8$, pues $8^2 = 64$.

b) $\sqrt{81} =$

c) $\sqrt{121} =$

d) $\sqrt{169} =$

e) $\sqrt{225} =$

f) $\sqrt{400} =$

g) $\sqrt{625} =$

h) $\sqrt{676} =$

15. Teniendo en cuenta los resultados del ejercicio anterior, indica el valor entero aproximado de:

a) $\sqrt{67} \approx$ b) $\sqrt{125} \approx$ c) $\sqrt{175} \approx$ d) $\sqrt{675} \approx$

Soluciones:

1. a) 2^3. b) 1^4. c) 5^4. d) 7^2. **2**. a) 32. b) 36. c) 10000. d) 1728. **3**. a) 4. b) 2. c) 4. d) 3.
4. a) 2. b) 1. c) 10. d) 3. **5**. a) 10000000. b) 100000000. c) 10000. d) 1000.
6. a) 10^7. b) 10^8. c) 10^9. d) 10^5. **7**. a) $2000 = 2 \cdot 10^3$. b) $8 \cdot 10^2$. c) $7 \cdot 10$. d) $5 \cdot 1 = 5 \cdot 10^0 \to$ simplemente 5.
8. $2 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$.
9. a) $2 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$. b) $6 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2$. c) $3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10 + 3$.
10. a) 6204239. b) 83032. **11**. a) 70000. b) 148. c) 125. d) 330. e) 288. f) 24. g) 55. h) 476.
12. a) 4^8. b) 3^7. c) 6^8. d) 2^4. e) 5^{12}. f) 2^4. g) 10^4. h) 10^8. **13**. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.
14. a) 8. b) 9. c) 11. d) 13. e) 25. f) 20. g) 25. h) 26.
15. a) 8. b) 11. c) 13. d) 26, aunque la llamada raíz entera vale 25.