PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2019	CONVOCATORIA: JUNIO 2019
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN:
Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Es donen la matriu $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ -2 & a+1 & 2\\ -3 & a-1 & a\end{pmatrix}$, que depèn del paràmetre real a, i una matriu quadrada B d'ordre 3 tal que $B^2=\frac{1}{3}I-2B$, sent I la matriu identitat d'ordre 3.

Obtingueu <u>**raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat**</u>:

a) El rang de la matriu A en funció del paràmetre real a i el determinant de la matriu $2A^{-1}$ quan $a=1$. (2 + 2 *punts*)

b) Totes les solucions del sistema d'equacions $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$ quan $a=-1$. (3 *punts*)

c) La comprovació que B és invertible, trobant m i n tals que $B^{-1}=mB+nI$. (3 *punts*)

Problema A.2. Considerem en l'espai les rectes $r:\begin{cases}x-y+3=0\\ 2x-z+3=0\end{cases}$ i $s: x=y+1=\frac{z-2}{2}$.

Obtingueu <u>**raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat**</u>:

a) L'equació del pla que conté les rectes r i s. (3 *punts*)

b) La recta que passa per $P=(0,-1,2)$ i talla perpendicularment la recta r. (4 *punts*)

c) El valor que han de tenir els paràmetres reals a i b perquè la recta s estiga continguda en el pla $\pi:\ x-2y+az=b$. (3 *punts*)

Problema A.3. Es considera la funció $f(x)=xe^{-x^2}$.

Obtingueu <u>**raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat**</u>:

a) Les asímptotes, els intervals de creixement i de decreixement, així com els màxims i mínims relatius de la funció $f(x)$. (3 *punts*)

b) La representació gràfica de la corba $y=f(x)$. (2 *punts*)

c) El valor del paràmetre real a perquè es puga aplicar el teorema de Rolle en l'interval $[0,1]$ a la funció $g(x)=f(x)+ax$. (1 *punt*)

d) El valor de les integrals indefinides $\int f(x)\,dx$, $\int xe^{-x}\,dx$. (4 *punts*)

OPCIÓ B

Problema B.1. Es dona el sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$, on α és un paràmetre real.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) Els valors de α per als quals el sistema és compatible i els valors de α per als quals el sistema és incompatible. (4 *punts*)

b) Totes les solucions del sistema quan siga compatible. (4 *punts*)

c) La discussió de la compatibilitat i determinació del nou sistema deduït de l'anterior en canviar el coeficient 11 per qualsevol altre número diferent. (2 *punts*)

Problema B.2. Siga π el pla d'equació $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) Les equacions dels dos plans paral·lels a π que disten 4 unitats de π. (4 *punts*)

b) Els punts *A*, *B* i *C*, intersecció del pla π amb els eixos OX, OY i OZ i l'angle que formen els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. (4 *punts*)

c) El volum del tetraedre els vèrtexs del qual són l'origen O de coordenades i els punts *A*, *B* i *C* . (2 *punts*)

Problema B.3. Les coordenades inicials dels mòbils A i B són (0, 0) i (250, 0), respectivament, i 1 km és la distància des de l'origen de coordenades fins a cadascun dels punts (1, 0) i (0, 1).

El mòbil A es desplaça sobre l'eix OY des de la posició inicial fins al punt $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ amb una velocitat de 30 km/h i, simultàniament, el mòbil B es desplaça sobre l'eix OX des de la seua posició inicial fins a l'origen de coordenades amb una velocitat de 40 km/h.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) La distancia $f(t)$ entre els mòbils A i B durant el desplaçament, en funció del temps t en hores des que van començar a desplaçar-se. (2 *punts*)

b) El temps T que tarden els mòbils en desplaçar-se des de la seua posició inicial a la seua posició final, i els intervals de creixement i de decreixement de la funció f al llarg del trajecte. (4 *punts*)

c) Els valors de t per als quals la distància dels mòbils és màxima i mínima durant el desplaçament, i aquestes distàncies màxima i mínima. (4 *punts*)

OPCIÓN A

Problema A.1. Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3} I - 2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$. (2+2 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$. (3 *puntos*)

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$. (3 *puntos*)

Problema A.2. Consideramos en el espacio las rectas $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y $s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s. (3 *puntos*)

b) La recta que pasa por $P = (0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r. (4 *puntos*)

c) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x - 2y + az = b$. (3 *puntos*)

Problema A.3. Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. (3 *puntos*)

b) La representación gráfica de la curva $y = f(x)$. (2 *puntos*)

c) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + ax$. (1 *punto*)

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx$, $\int xe^{-x}\,dx$. (4 *puntos*)

OPCIÓN B

Problema B.1. Se da el sistema $\begin{cases} x + \ \ y + \ \ \ z & = & 4 \\ 3x + 4y + \ \ 5z & = & 5 \\ 7x + 9y + 11z & = & \alpha \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible. (4 *puntos*)

c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente. (2 *puntos*)

Problema B.2. Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π. (4 *puntos*)

b) Los puntos *A*, *B* y *C* intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (4 *puntos*)

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos *A*, *B* y *C*. (2 *puntos*)

Problema B.3. Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0, 0) y (250, 0), respectivamente, siendo 1km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1, 0) y (0, 1).

El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse. (2 *puntos*)

b) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto. (4 *puntos*)

c) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima. (4 *puntos*)

OPCIÓN A

Problema A.1. Se dan la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ -2 & a+1 & 2\\ -3 & a-1 & a\end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2=\frac{1}{3}I-2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a=1$. (2+2 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$ cuando $a=-1$. (3 *puntos*)

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1}=mB+nI$. (3 *puntos*)

Solución:

a) El determinante de A vale

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & a\\ -2 & a+1 & 2\\ -3 & a-1 & a\end{vmatrix}=a^2+a-2a+2+a(-2a+2+3a+3)=2a^2+4a+2=2(a+1)^2.$$

Este determinante vale 0 si $a=-1$.

Con esto:

- Si $a\neq -1\Rightarrow$ r(A) = 3: las tres filas (o columnas) son linealmente independientes.
- Si $a=-1$, la matriz es: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & \boxed{\begin{matrix}0 & 2\\ -2 & -1\end{matrix}}\end{pmatrix}$ … $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ -3 & -2 & -1\end{pmatrix}$. $\to$ El rango de A es 2: $|A_{11}|=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix}\neq 0$.

$\to$ Si $a=1\Rightarrow |A|=2(1+1)^2=8$.

Utilizando las propiedades del cálculo de determinantes: $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$ y $|kA|=k^n|A|$, siendo A y B cuadradas del mismo orden n.

Como $1=|I|=|A\cdot A^{-1}|=|A|\cdot|A^{-1}|=8\cdot|A^{-1}|\Rightarrow |A^{-1}|=\frac{1}{8}$.

Como $|2A^{-1}|=2^3|A^{-1}|\Rightarrow |2A^{-1}|=2^3\cdot\frac{1}{8}=1$.

b) Si $a=-1$, $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ -3 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x-z=-1\\ -2x+2z=2\\ -3x-2y-z=0\end{cases}\to$ Este sistema es compatible indeterminado: tiene dos ecuaciones repetidas. Es equivalente a:

$$\begin{cases}x-z=-1\\ -3x-2y-z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1+z\\ -3x-2y-z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1+z\\ -3z+3-2y-z=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-1+z\\ y=3/2-2z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1+t\\ y=3/2-2t\\ z=t\end{cases}.$$

c) Si $B^2=\frac{1}{3}I-2B\Rightarrow 3\left(B^2-2B\right)=I\Rightarrow B(3B-6I)=I\Rightarrow$ las matrices B y $3B-6I$ son inversas, siendo $B^{-1}=3B-6I$.

Luego los valores de m y n pedidos son: $m = 3$; $n = –6$.

Problema A.2. Consideramos en el espacio las rectas $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y $s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s. (3 *puntos*)

b) La recta que pasa por $P = (0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r. (4 *puntos*)

c) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x - 2y + az = b$. (3 *puntos*)

<u>Solución</u>:

a) Las ecuaciones paramétricas de r y s son:

$$r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} y = 3 + x \\ z = 3 + 2x \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 2);\ R \in r \text{ es } R = (0, 3, 3).$$

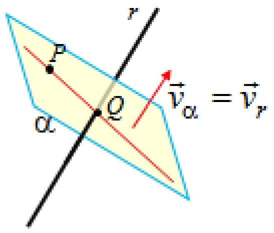
$$s: \begin{cases} x = h \\ y = -1 + h \\ z = 2 + 2h \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (1, 1, 2);\ S \in s \text{ es } S = (0, -1, 2).$$

Resulta evidente que las dos rectas son paralelas. Por tanto, el plano que las contiene queda determinado por el punto R y los vectores $\vec{v}_r$ y $\boldsymbol{RS} = (0, –1, 2) – (0, 3, 3) = (0, –4, –1)$.

Su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y-3 & 1 & -4 \\ z-3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7x + y - 4z + 9 = 0.$$

b) La reta pedida queda determinada por los puntos $P = (0, –1, 2)$ y Q, punto de corte de la recta r con el plano α, perpendicular a r por P.



El plano perpendicular es:

$$\alpha \equiv x + y + 2z + d = 0$$

Por pasar por P: $\alpha \equiv 0 - 1 + 4 + d = 0 \Rightarrow d = -3 \Rightarrow$

$$\alpha \equiv x + y + 2z - 3 = 0$$

Corte de α con r:

$$t + 3 + t + 2\cdot(3 + 2t) - 3 = 0 \Rightarrow 6t + 6 = 0 \Rightarrow t = -1.$$

Luego: $Q = (–1, 2, 1)$; $\boldsymbol{PQ} = (–1, 2, 1) – (0, –1, 2) = (–1, 3, –1)$.

La recta pedida es: $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$.

c) La recta s está contenida en el plano $\pi: x - 2y + az = b$ cuando dos de sus puntos son de π.

Sean $P = (0, –1, 2)$ y $C = (1, 0, 4)$ puntos de s; entonces:

$$P \in \pi \Rightarrow 2 + 2a = b; \quad C \in \pi \Rightarrow 1 + 4a = b \rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = 3.$$

Problema A.3. Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. (3 *puntos*)
b) La representación gráfica de la curva $y = f(x)$. (2 *puntos*)
c) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + ax$. (1 *punto*)
d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx$, $\int xe^{-x}\,dx$. (4 *puntos*)

Solución:
a) Tiene una asíntota horizontal, tanto hacia –∞ como hacia +∞, pues:

$$\lim_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L'H) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$$

La asíntota es la recta $y = 0$.
Derivando:

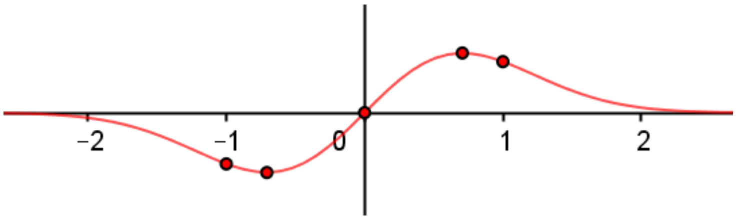
$$f(x) = xe^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = \left(1-2x^2\right)e^{-x^2}.$$

La derivada se anula cuando $1-2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

- Si $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrece.
- Si $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crece. En $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ hay un mínimo.
- Si $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrece. En $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ hay un máximo.

b) Dando algunos valores y teniendo en cuenta lo visto en el apartado a) se obtiene la gráfica siguiente.
Puntos:

$(-1, -e^{-1})$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}\right) \approx (-0{,}707, -0{,}43)$; $(0, 0)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}\right) \approx (0{,}707, 0{,}43)$; $(1, e^{-1})$.



c) Teorema de Rolle: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), y además $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

La función, $g(x) = xe^{-x^2} + ax$, es continua y derivable en el intervalo [0, 1]. Debe cumplir que $g(0) = g(1)$.

Como $g(0) = 0$ y $g(1) = e^{-1} + a \Rightarrow e^{-1} + a = 0 \Rightarrow a = e^{-1}$.

b) La primera integral es inmediata:

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int\left(-2xe^{-x^2}\right)dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c.$$

La segunda integral, $\int xe^{-x}dx$ debe hacerse por partes.

Se toma:

$$u = x \Rightarrow du = dx\,; \quad dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$$

Por tanto:

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c\,.$$

OPCIÓN B

Problema B.1. Se da el sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible. (4 *puntos*)

c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente. (2 *puntos*)

<u>Solución</u>:

a) Sea A la matriz de coeficientes *y* M la matriz ampliada.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{array}\right) = M$$

Si r(A) = r(M) = 3 $\to$ sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 $\to$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) $\to$ sistema incompatible: no tiene solución

El determinante de A vale: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 1 = 0 \Rightarrow$ El rango de A es 2.

Tomamos otro menor de M:

$$|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & \alpha \end{vmatrix} = 4\alpha - 45 - 3\alpha + 35 - 4 = \alpha - 14 \to \text{Si } \alpha \neq 14 \text{ el rango de } M \text{ es 3.}$$

Por tanto:

- Si $\alpha \neq 14$, el sistema es incompatible: r(A) = 2 < r(M) = 3.
- Si $\alpha = 14$, el sistema es compatible indeterminado: r(A) = r(M) = 2.

b) El sistema es compatible (indeterminado) solo cuando $\alpha = 14$. En ese caso el sistema es:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 - z \\ 3x + 4y = 5 - 5z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 + t \\ y = -7 - 2t \\ z = t \end{cases}.$$

c) Si el coeficiente 11 se cambia por *m*, el sistema es: $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 3x+4y+5z=5 \\ 7x+9y+mz=14 \end{cases}$.

En este caso, el determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & m \end{vmatrix}=4m-45-3m+35-1=m-11.$$

Ese determinante siempre es distinto de 0 (pues $m \neq 11$). Por tanto, el sistema siempre será compatible determinado.

Problema B.2. Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π. (4 *puntos*)

b) Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (4 *puntos*)

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C. (2 *puntos*)

Solución:

a) Todos los planos paralelos tienen el mismo vector característico. Por tanto, los planos paralelos a $\pi \equiv 9x+12y+20z=180$ son de la forma $\pi' \equiv 9x+12y+20z+d=0$.

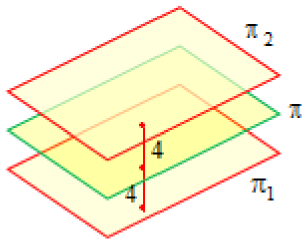
Como se pide que disten 4 unidades de π debe cumplirse, para cualquier punto $P \in \pi$, que:

$d(P,\pi')=4$.

Para $P = (0, 0, 9) \in \pi$:

$$d(P(0,0,9),\pi')=\frac{9\cdot 0+12\cdot 0+20\cdot 9+d}{\sqrt{9^2+12^2+20^2}}=4 \Rightarrow \frac{180+d}{\sqrt{625}}=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{180+d}{\pm 25}=4 \Rightarrow \begin{cases} 180+d=100 \to d=-80 \\ 180+d=-100 \to d=-280 \end{cases}.$$

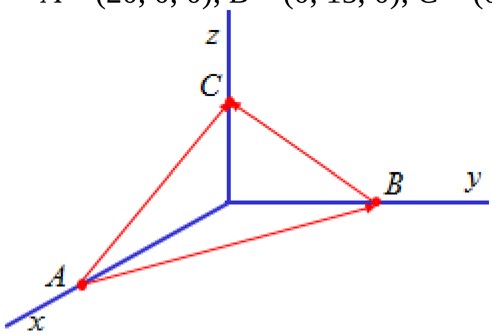


Los planos son:

$\pi_1 \equiv 9x+12y+20z-80=0$ y $\pi_2 \equiv 9x+12y+20z-280=0$.

b) Los puntos A, B y C son:

$A = (20, 0, 0)$; $B = (0, 15, 0)$; $C = (0, 0, 9)$.



Los vectores son:

$\overrightarrow{AB} = (-20, 15, 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-20, 0, 9)$

Como $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$ se tiene:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{-20\cdot(-20)}{\sqrt{400+225}\cdot\sqrt{400+81}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{16}{\sqrt{481}}\approx 0,7295...$$

Luego $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arccos(0,7295...)=43,15^{\circ}$.

c) El volumen del tetraedro viene dado por $V_T = \frac{1}{6}\left| \left[\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC} \right] \right|$.

En consecuencia:

$$V_t = \frac{1}{6}\left\| \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot 2700 = 450 \text{ u}^3.$$

Problema B.3. Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0, 0) y (250, 0), respectivamente, siendo 1km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1, 0) y (0, 1).

El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse. (2 *puntos*)

b) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto. (4 *puntos*)

c) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima. (4 *puntos*)

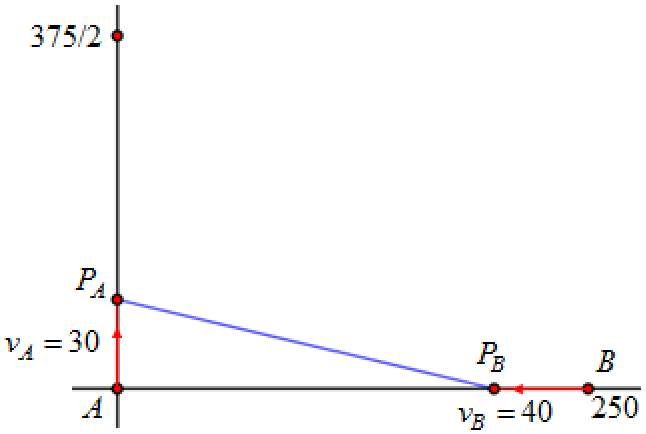
Solución:

Un esquema de la situación planteda se da en la figura adjunta.

En el instante t, el móvil A, que lleva una velocidad de 30 km/t, habrá recorrido 30t km. Estará en el punto $P_A = (0,\ 30t)$.

En ese mismo instante t, el móvil B, que lleva una velocidad de 40 km/t (hacia la izquierda), habrá recorrido 40t km. Estará en el punto $P_B = (250 - 40t,\ 0)$.

La distancia entre ellos viene determinada por la función:



$$f(t) = d(P_A, P_B) = \sqrt{(30t)^2 + (250 - 40t)^2} \Rightarrow f(t) = \sqrt{2500t^2 - 20000t + 62500}.$$

b) El tiempo que tarda A es $T_A = \dfrac{375/2}{30} = 6,25$ h.

El tiempor que tarda B es: $T_B = \dfrac{250}{40} = 6,25$. Tardan el mismo tiempo.

Derivando e igualando a 0:

$$f'(t) = \frac{5000t - 20000}{2\sqrt{2500t^2 - 20000t + 62500}} = 0 \Rightarrow t = 4.$$

Con esto:

- Si $0 \le t < 4$, como $f'(t) < 0$ la función decrece (la distancia entre los móviles disminuye).
- Si $4 < t \le 6{,}25$ como $f'(t) > 0$ la función crece (la distancia entre los móviles aumenta).

c) De lo dicho más arriba se deduce que la distancia mínima se da en el instate t = 4 (a las 4 horas). Esa distancia es de $f(4)=\sqrt{22500}=150$ km.

Como $f(0)=250$ km y $f(6,25)=\dfrac{375}{2}=187,5$ km, la distancia máxima será la inicial, 250 km. (A partir del momento inicial la distancia decrece, hasta ser de 150 km cuando t = 4; desde ese momentio hasta t = 6,25 la distancia crece, hasta ser de 187,5 km).