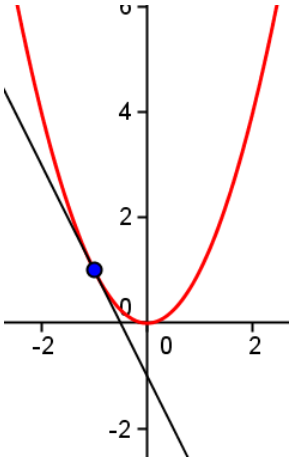
FUNCIONES DE DOS VARIABLES
ALGUNOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN EXÁMENES

1. (J10) Dado el campo $f(x,y)=e^{x^2-y}$.
a) (0,5 puntos) Representa gráficamente la curva de nivel de valor 1.
b) (0,5 p) Halla la ecuación de la recta tangente a dicha curva de nivel en el punto (–1, 1).
c) (1 punto) Halla su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto (1, 1). Desarrolla y simplifica el resultado.

Solución:

a) $f(x,y)=e^{x^2-y}=1 \Rightarrow x^2-y=0$.
Es la parábola representada en la figura adjunta.



b) $f_x(x,y)=2xe^{x^2-y}$; $f_y(x,y)=-e^{x^2-y}$

$$\frac{dy}{dx}(-1,1)=\frac{-f_x}{f_y}(-1,1)=\frac{-(-2)}{-1}=-2.$$

Tangente: $y-1=-2(x+1) \Rightarrow y=-2x-1$

c) $f_x(x,y)=2xe^{x^2-y}$; $f_y(x,y)=-e^{x^2-y}$;

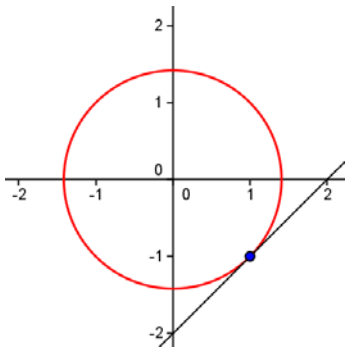
$f_{xx}(x,y)=2e^{x^2-y}+4x^2e^{x^2-y}$; $f_{xy}(x,y)=-2xe^{x^2-y}$; $f_{yy}(x,y)=e^{x^2-y}$

$$P(x,y)=1+(2,-1)\cdot(x-1,y-1)+\frac{1}{2}(x-1 \quad y-1)\begin{pmatrix}6 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\end{pmatrix}=\frac{6x^2+y^2-4xy-4x+3}{2}$$

2. (J10) Dada la función $f(x,y)=e^{x^2+y^2-2}$ se pide:
a) (0,5 puntos) La representación gráfica de la curva de nivel 1.
b) (0,75 puntos) La ecuación de la recta tangente a esa curva de nivel en el punto (1, –1).
c) (1,25 puntos) El polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x,y)$ en el punto (1, –1).

Solución:

a) Curva de nivel 1 → $f(x,y)=e^{x^2+y^2-2}=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2+y^2-2=0 \Rightarrow x^2+y^2=2$.
Es la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt{2}$.



b) Pendiente de la tangente:

$f_x(x,y)=2xe^{x^2+y^2-2} \rightarrow$ en $(1,-1) \rightarrow 2$;

$f_y(x,y)=2ye^{x^2+y^2-2} \rightarrow$ en $(1,-1) \rightarrow -2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{-2}=1$$

Tangente: $y+1=x-1 \Rightarrow y=x-2$

c) $f_x(x,y)=2xe^{x^2+y^2.2}$; $f_y(x,y)=2ye^{x^2+y^2-2} \Rightarrow \nabla f(1,-1)=(2,-2)$

$f_{xx}=2e^{x^2+y^2-2}+4x^2e^{x^2+y^2-2}$; $f_{xy}=4xye^{x^2+y^2-2}$; $f_{yy}=2e^{x^2+y^2-2}+4y^2e^{x^2+y^2-2}$

$$P(x,y) = 1 + (2,-2)\cdot(x-1, y+1) + \frac{1}{2}(x-1, y+1)\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 4xy - 8x + 8y + 7$$

3. (J08) (1,5 puntos) Dada la función $f(x,y) = \dfrac{x^2 + xy}{y^2 - xy}$ se pide:

a) Probar que es homogénea y dar su grado de homogeneidad.
b) Comprobar que verifica el teorema de Euler.
c) Hallar la pendiente de la curva de nivel que pasa por el punto (1, –1) en dicho punto.

Solución:

a) $f(tx,ty) = \dfrac{t^2x^2 + txty}{t^2y^2 - txty} = \dfrac{t^2\left(x^2 + xy\right)}{t^2\left(y^2 - xy\right)} = t^0\,\dfrac{x^2 + xy}{y^2 - xy} = t^0 f(x,y) =$

$= t^{3/2}q_1^{\,3/2} + tq_1t^{1/2}q_2^{\,1/2} = t^{3/2}(q_1^{\,3/2} + q_1q_2^{\,1/2}) = t^{3/2} f(q_1, q_2)$

Su grado de homogeneidad es m = 0.

b) Hay que comprobar que $x\dfrac{df(x,y)}{dx} + y\dfrac{df(x,y)}{dy} = 0\cdot f(x,y) = 0$

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{(2x+y)(y^2 - xy) - (x^2 + xy)(-y)}{\left(y^2 - xy\right)^2} = \frac{2xy^2 + y^3 - x^2y}{\left(y^2 - xy\right)^2}$$

$$\frac{df(x,y)}{dy} = \frac{x(y^2 - xy) - (x^2 + xy)(2y - x)}{\left(y^2 - xy\right)^2} = \frac{-xy^2 - 2x^2y + x^3}{\left(y^2 - xy\right)^2}$$

Luego,

$$x\frac{2xy^2 + y^3 - x^2y}{\left(y^2 - xy\right)^2} + y\frac{-xy^2 - 2x^2y + x^3}{\left(y^2 - xy\right)^2} =$$

$$= \frac{2x^2y^2 + xy^3 - x^3y - xy^3 - 2x^2y^2 + yx^3}{\left(y^2 - xy\right)^2} = 0$$

c) La pendiente de la curva de nivel en el punto (1, –1) viene dada por

$$\frac{dy}{dx}(1,-1) = \frac{-f_x(1,-1)}{f_y(1,-1)} = \frac{-1/2}{1/2} = -1$$

4. (J10) Halla la ecuación del plano tangente a la superficie $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+1}$ en el punto (1, 1, 1).

Solución:

$$f_x = \frac{-x^2 - 2xy + 1}{(x^2+1)^2} \rightarrow (\text{en } (1,1)) \rightarrow -\frac{1}{2};\ f_y = \frac{1}{x^2+1} \rightarrow (\text{en } (1,1)) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Plano:

$$z - 1 = -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) \Rightarrow x - y + 2z - 2 = 0$$

5. (J03) Dado el campo escalar $f(x,y) = (2ax - y)^3$:

a) (1 punto) Determinar el valor de *a* para que la derivada direccional máxima del campo, en el punto(0, 1), valga $3\sqrt{5}$

b) (1 punto) Determinar el valor de *a* para que la pendiente de la curva de nivel, que pasa por el punto (1, 0), valga 4

Solución:

a) $f_x(x,y) = 3(2ax - y)^2 \cdot 2a \rightarrow f_x(0,1) = 3(-1)^2 \cdot 2a = 6a$

$f_y(x,y) = -3(2ax - y)^2 \rightarrow f_y(0,1) = -3$

La derivada direccional es máxima en la dirección del gradiente $(6a, -3)$ y su valor es el módulo de ese vector, luego:

$$\sqrt{36a^2 + 9} = 3\sqrt{5} \Rightarrow 36a^2 + 9 = 45 \Rightarrow a = \pm 1$$

b) Pendiente de la curva de nivel en (1, 0) es: $\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x(1,0)}{f_y(1,0)} = \frac{-24a^3}{-12a^2} = 2a$

La pendiente vale 4 si $a = 2$.

6. (J11) Dada la función $f(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy$, se pide:

a) (1,25 puntos) Halla y clasifica sus puntos estacionarios.

b) (0,5 puntos) La ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (2, 3).

c) (0,5 puntos) La ecuación de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por el punto (1, −1)

d) (0,75 puntos) El polinomio de Taylor de grado 2 en el punto (1, 0). (Debe expresarse en forma de polinomio.)

Solución:

a) Puntos estacionarios:

$f_x(x,y) = 3x^2 - 2y = 0$

$f_y(x,y) = 2y - 2x = 0 \Rightarrow$ (0, 0) y (2/3, 2/3)

Hessiana:

$f_{xx}(x,y) = 6x \qquad f_{xy}(x,y) = -2$

$f_{yx}(x,y) = -2 \qquad f_{yy}(x,y) = 2$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Como $|Hf(0,0)| = -4 < 0$, en (0, 0) hay un punto de silla.

$Hf(2/3, 2/3) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Como $|Hf(2/3, 2/3)| = 4 > 0$ y $f_{xx}(2/3, 2/3) = 4 > 0$, en (2/3, 2/3) hay un mínimo.

b) $f(2,3) = 5$; $f_x(2,3) = 6$; $f_y(2,3) = 2$;

Plano tangente: $z - 5 = 6(x-2) + 2(y-3) \Rightarrow 6x + 2y - z = 13$

c) La curva de nivel que pasa por (1, −1) es $f(1,-1) = x^3 + y^2 - 2xy = 4$

La pendiente de la tangente es: $\frac{dx}{dy} = \frac{-(3x^2 - 2y)}{2y - 2x} \Rightarrow \frac{dx}{dy}(1,-1) = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$.

La recta tangente es: $y+1=\frac{5}{4}(x-1) \Leftrightarrow y=\frac{5}{4}x-\frac{9}{4}$.

d) $f(1,0)=1$; $f_x(1,0)=3$; $f_y(1,0)=-2$; $Hf(1,0)=\begin{pmatrix}6 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$.

$$P(x,y)=1+(3,-2)\cdot(x-1,y)+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-1 & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\ y\end{pmatrix}=3x^2+y^2-2xy-3x+1$$

7. (J09) Dada la función $f(x,y)=(x^2-1)(y^2-2y)$:

a) (0,5 puntos) Halla la ecuación del plano tangente a esa superficie en el punto (2, –1, 9).
b) (1,25 puntos) Encuentra y clasifica sus puntos estacionarios.
c) (0,75 puntos) Halla el polinomio de Taylor de grado 2, de *f*(*x*, *y*), en el punto (–1, –1).

Solución:

a) $f_x(x,y)=2xy(y-2)$

$f_y(x,y)=2(x^2-1)(y-1)$

La ecuación del plano tangente es:

$z-9=f_x(2,-1)(x-2)+f_y(2,-1)(y+1) \Rightarrow z-9=12(x-2)-12(y+1)$

b) $\begin{cases} f_x(x,y)=2xy(y-2)=0\\ f_y(x,y)=2(x^2-1)(y-1)=0\end{cases}$

Se obtienen los siguientes puntos estacionarios: (0, 1); (1, 0); (–1, 0); (1, 2); (–1, 2)

Hessiana: $Hf(x,y)=\begin{pmatrix}2y(y-2) & 4x(y-1)\\ 4x(y-1) & 2(x^2-1)\end{pmatrix}$

En (0, 1), $Hf(0,1)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix} \rightarrow$ Como $|Hf(0,1)|=4>0$ y $f_{xx}(0,1)=-2<0$, en (0, 1) hay máximo.

- En (1, 0), $Hf(1,0)=\begin{pmatrix}0 & -4\\ -4 & 0\end{pmatrix} \rightarrow$ Como $|Hf(1,0)|=-16<0 \Rightarrow$ PS.
- En (–1, 0), $Hf(-1,0)=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 4 & 0\end{pmatrix} \rightarrow$ Como $|Hf(-1,0)|=-16<0 \Rightarrow$ PS.
- En (1, 2), $Hf(1,2)=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 4 & 0\end{pmatrix} \rightarrow$ Como $|Hf(1,2)|=-16<0 \Rightarrow$ PS.
- En (–1, 2), $Hf(-1,2)=\begin{pmatrix}0 & -4\\ -4 & 0\end{pmatrix} \rightarrow$ Como $|Hf(-1,2)|=-16<0 \Rightarrow$ PS.

c) $f(-1,-1)=0$; $f_x(-1,-1)=-6$; $f_y(-1,-1)=0$; $Hf(-1,-1)=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 8 & 0\end{pmatrix}$

$$P(x,y)=0+\begin{pmatrix}-6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+1\\ y+1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x+1 & y+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 8\\ 8 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+1\\ y+1\end{pmatrix}=3x^2+8xy+8x+8y+5$$

8. (J13) Dada la función $f(x,y) = x^3 + x^2 + 4xy + y^2$:
a) (1 punto) Halla y clasifica sus puntos estacionarios.
b) (0,5 puntos) La ecuación de la recta tangente, en el punto (–1, 0), a la curva de nivel que pasa por dicho punto.
c) (1 punto) Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 en el punto (0, 1). (Deben hacerse todas las operaciones).
Solución:
a) Puntos estacionarios:

$f_x(x,y) = 3x^2 + 2x + 4y = 0$

$f_y(x,y) = 4x + 2y = 0 \Rightarrow y = -2x \rightarrow$ sustituyendo:

$3x^2 - 6x = 0$; $x = 0$, $x = 2 \Rightarrow y = 0$, $y = -4$. Puntos: P(0, 0) y Q(2, -4)

Hessiana:

$f_{xx}(x,y) = 6x + 2 \qquad f_{xy}(x,y) = 4$

$f_{yx}(x,y) = 4 \qquad f_{yy}(x,y) = 2$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Como $|Hf(0,0)| < 0$, hay un punto de silla en P.

$Hf(2,-4) = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Como $|Hf(2,-4)| > 0$ y $f_{xx}(2,-4) = 14 > 0$, hay un mínimo en Q.

b) $f_x(x,y) = 3x^2 + 2x + 4y$; $\qquad f_y(x,y) = 4x + 2y$

$$\Rightarrow y'(x,y) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{3x^2 + 2x + 4y}{4x + 2y} \rightarrow y'(-1,0) = -\frac{f_x(-1,0)}{f_y(-1,0)} = -\frac{3-2}{-4} = \frac{1}{4}.$$

Ecuación: $y = (x + 1)/4 \Rightarrow x - 4y + 1 = 0$.

c) $f(0, 1) = 1$;

$f_x(x,y) = 3x^2 + 2x + 4y$; $\quad f_y(x,y) = 4x + 2y \Rightarrow \nabla f(0, 1) = (4, 2)$

$f_{xx}(x,y) = 6x + 2$; $\quad f_{xy}(x,y) = 4$

$f_{yx}(x,y) = 4$; $\qquad f_{yy}(x,y) = 2$

$$\Rightarrow Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P(x,y) = 1 + 4x + 2(y-1) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} = x^2 + 4xy + y^2$$

9. (S07) Dada la función $f(x,y) = (1-xy)^2$:

a) (1 punto) Halla y clasifica sus puntos estacionarios.

b) (0,5 puntos) Su polinomio de Taylor de grado 2 (desarrollado) en el punto (2, 2).

Solución:

$f_x = -2y(1-xy) = 0$

$f_y = -2x(1-xy) = 0 \Rightarrow x = y = 0;\ x = 1/k;\ y = k.$

Puntos críticos: (0, 0) y $(1/k, k)$

$f_{xx} = 2y^2$; $f_{xy} = -2 + 4xy$; $f_{yy} = 2x^2 \Rightarrow$

$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Como $|Hf(0,0)| < 0 \Rightarrow$ (0, 0) es punto de silla.

$H(f)(1/k,k) = \begin{pmatrix} 2k^2 & 2 \\ 2 & 2/k^2 \end{pmatrix}$. Det($H$) = 0. Es un caso dudoso.

Como $f(1/k,k) = 0$ y $f(x,y) \geq 0$ para todo par $(x, y) \Rightarrow$ hay infinitos mínimos: uno para cada valor de $k \neq 0$.

b) $f(2, 2) = 9$; $f_x(2,2) = 12$; $f_y(2, 2) = 12$; $f_{xx}(2, 2) = 8$; $f_{xy}(2, 2) = 14$; $f_{yy}(2, 2) = 8$

$$P(x,y) = 9 + (12,12)(x-2, y-2) + \frac{1}{2}(x-2, y-2)\begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P(x,y) = 4x^2 + 4y^2 + 14xy - 32x - 32y + 49$$