FUNCIONES DE DOS VARIABLES
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Condiciones de optimalidad

1. Condición necesaria de primer orden

Si f posee un óptimo local en el punto (x_0, y_0), entonces $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Los óptimos se encuentran entre las soluciones del sistema $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$ → puntos críticos.

No todos los puntos críticos son óptimos: entre ellos puede haber puntos de silla.

2. Condiciones de segundo orden

Si (x_0, y_0) es un punto crítico de f, se considera su matriz hessiana

$$Hf(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \rightarrow \text{para simplificar: } Hf(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Luego: $\left|Hf(x_0,y_0)\right| = AC - B^2$.

Con esto:

- Si (x_0, y_0) es un punto crítico de f, entonces si $AC - B^2 > 0$ y $A < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ es máximo.
- Si (x_0, y_0) es un punto crítico de f, entonces si $AC - B^2 > 0$ y $A > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ es mínimo.
- Si (x_0, y_0) es un punto crítico y $AC - B^2 < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ es un punto de silla, PS.
- Si (x_0, y_0) es un punto crítico y $AC - B^2 = 0$, el caso es dudoso: puede tratarse de un máximo, de un mínimo o de un punto de silla.

---

1. (S09) Halla y clasifica los puntos estacionarios de la función $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$.

Solución:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 - 3y = 0 \\ f_y(x,y) = -3x + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Se obtienen los siguientes puntos estacionarios: (0, 0); (1, 1).

Hessiana: $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$

- En (0, 0), $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left|Hf(0,0)\right| = -9 < 0 \Rightarrow$ En (0, 0) hay PS.
- En (1, 1), $Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \left|Hf(1,1)\right| > 0$ y $f_{xx}(1,1) = 6 > 0 \Rightarrow$ En (1, 1) hay un mínimo.

2. (J12) Dada la función $f(x,y) = xy^2 - x^2 - y^2$, halla y clasifica sus puntos estacionarios.

Solución:

El sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = y^2 - 2x = 0 \\ f_y(x,y) = 2xy - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 2x = 0 \\ 2y(x-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y^2 \\ y(2x-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(y^2-2) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ y = 0; $y = \pm\sqrt{2}$ → Puntos (0, 0), (1, $\sqrt{2}$) y (1, $-\sqrt{2}$).

Como la matriz hessiana es $Hf(x,y)=\begin{pmatrix}-2 & 2y\\ 2y & 2x-2\end{pmatrix}$, se concluye que:

$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\to |Hf(0,0)|>0 \text{ y } f_{xx}(0,0)=-2<0 \Rightarrow (0,\ 0) \text{ es un máximo.}$$

$$Hf(1,\sqrt{2})=\begin{pmatrix}-2 & 2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\to |Hf(1,\sqrt{2})|<0 \Rightarrow (1,\ \sqrt{2}) \text{ es un punto de silla.}$$

$$Hf(1,-\sqrt{2})=\begin{pmatrix}-2 & -2\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\to |Hf(1,-\sqrt{2})|<0 \Rightarrow (1,\ -\sqrt{2}) \text{ es un punto de silla}$$

3. (J07) La función $f(x,y)=x^3-3x^2+3y^2-y^3$ tiene:

a) Un punto estacionario en (1, 1).
b) Un máximo en el punto estacionario (0, 2).
c) Un punto de silla en el punto (2, 0).

Solución:

$$\begin{cases} f_x=3x^2-6x=0\\ f_y=6y-3y^2=0\end{cases} \Rightarrow \text{Puntos estacionarios son: (0, 0), (2, 0), (0, 2) y (2, 2).}$$

$$\begin{cases} f_{xx}=6x-6\\ f_{xy}=0\end{cases};\ \begin{cases} f_{yx}=0\\ f_{yy}=6-6y\end{cases} \Rightarrow Hf(x,y)=\begin{pmatrix}6x-6 & 0\\ 0 & 6-6y\end{pmatrix}$$

Luego:

$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\to \text{[Indefinida]}\to |Hf(0,0)|<0 \Rightarrow (0,\ 0) \text{ es PS.}$$

$$Hf(0,2)=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix}\to \text{[Definida negativa]}\to |Hf(0,2)|>0 \text{ y } f_{xx}(0,2)=-6<0 \Rightarrow (0,\ 2)$$

es máximo.

$$Hf(2,0)=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\to \text{[Definida positiva]}\to |Hf(2,0)|>0 \text{ y } f_{xx}(0,2)=6>0 \Rightarrow (2,\ 0) \text{ es}$$

mínimo.

$$Hf(2,2)=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix}\to \text{[Indefinida]}\to |Hf(2,2)|<0 \Rightarrow (2,\ 2) \text{ es PS.}$$

La respuesta es b)

4. (J06) La función $f(x,y)=-2x^2-y^2$ tiene en P(0, 0):

a) El único máximo local
b) Uno de sus infinitos máximos locales.
c) Un punto de silla.

Solución:

$$\begin{cases} f_x=-4x=0\\ f_y=-2y=0\end{cases} \Rightarrow \text{El único punto estacionario es (0, 0)}$$

$$Hf=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\to \text{Como } |Hf|>0 \text{ y } f_{xx}(0,0)=-4<0 \Rightarrow (0,\ 0) \text{ es el único máximo.}$$

La respuesta es a)

5. (J05) Sea (1, 2) un punto estacionario de la función $f(x,y)$. Si la matriz Hessiana de dicha función es $\begin{pmatrix} 2x-y & y \\ y & 8 \end{pmatrix}$, entonces, el punto (1, 2) es:

a) Un máximo de *f*.
b) Punto de silla de *f*.
c) No hay información suficiente para caracterizarlo.

Solución:

$$Hf(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \to \text{Como } \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow \text{Punto de silla.}$$

La respuesta es b)

6. La función $f(x,y) = e^{2x}(y + x^3 - 3x)$ tiene:

a) Un máximo en el punto (1, 0)
b) Un mínimo en el punto (0, 0)
c) Ninguna de las anteriores

Solución:

$$f_x = 2e^{2x}(y + x^3 - 3x) + e^{2x}(3x^2 - 3), \qquad f_y = e^{2x}$$

Como $f_y = e^{2x}$ no se anula en ningún caso, la función no tiene puntos estacionarios. Luego no tiene ni máximos ni mínimos.

La respuesta es c)

7. (S07) Dada la función $f(x,y) = (1 - xy)^2$, se pide:

a) (1 punto) Halla y clasifica sus puntos estacionarios.
b) (0,5 puntos) Su polinomio de Taylor de grado 2 (desarrollado) en el punto (2, 2).

Solución:

$$f_x = -2y(1 - xy) = 0$$

$$f_y = -2x(1 - xy) = 0 \Rightarrow x = y = 0;\ x = 1/k;\ y = k.$$

Puntos críticos: (0, 0) y (1/*k*, *k*)

$$f_{xx} = 2y^2;\ f_{xy} = -2 + 4xy;\ f_{yy} = 2x^2 \Rightarrow$$

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \to \text{Como } |Hf(0,\ 0)| < 0, \text{ en (0, 0) hay punto de silla.}$$

$$H(f)(1/k,k) = \begin{pmatrix} 2k^2 & 2 \\ 2 & 2/k^2 \end{pmatrix} \to \text{Det}(H) = 0. \text{ Es un caso dudoso.}$$

Como $f(1/k,k) = 0$ y $f(x,y) \geq 0$ para todo par $(x, y) \Rightarrow$ hay infinitos mínimos: uno para cada valor de $k \neq 0$.

b) $f(2, 2) = 9$; $f_x(2,2) = 12$; $f_y(2, 2) = 12$; $f_{xx}(2, 2) = 8$; $f_{xy}(2, 2) = 14$; $f_{yy}(2, 2) = 8$

$$P(x,y) = 9 + (12,12)(x-2, y-2) + \frac{1}{2}(x-2, y-2)\begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P(x,y) = 4x^2 + 4y^2 + 14xy - 32x - 32y + 49$$

8. (J07) Dada la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$ se pide:
a) Determina su dominio y halla y clasifica sus puntos estacionarios. (1 punto).
b) Calcula su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto (1, 1). (0,5 puntos)
Solución:
a) $Dom(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x > 0, y > 0\right\}$.

$$\begin{cases} f_x = 2x - \dfrac{2}{x} = 0 \\ f_y = 2y - \dfrac{18}{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 3 \end{cases} \Rightarrow \text{El único punto estacionario es (1, 3).}$$

[Las otras soluciones, (–1, 3), (1, –3) y (–1, –3), no son válidas, pues caen fuera del dominio de la función.]

$$\begin{cases} f_{xx} = 2 + 2/x^2 \\ f_{xy} = 0 \end{cases}; \begin{cases} f_{yx} = 0 \\ f_{yy} = 2 + 18/y^2 \end{cases} \Rightarrow Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + 2/x^2 & 0 \\ 0 & 2 + 18/y^2 \end{pmatrix}$$

$Hf(1,3) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ Definida positiva: $|Hf(1,3)| > 0$ y $f_{xx}(1,3) = 4 > 0 \Rightarrow$ (1, 3) es mínimo.

b) $f(1,1) = 2$; $f_x(1,1) = 0$; $f_y(1,1) = -16$; $Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$P(x,y) = 2 + (0,-16)\cdot(x-1, y-1) + \frac{1}{2}(x-1 \quad y-1)\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P(x,y) = 2x^2 + 10y^2 - 4x - 36y + 30$$