FUNCIONES DE DOS VARIABLES
PLANOS TANGENTES, TAYLOR…

Planos tangentes

1. (I12) La ecuación del plano tangente a la superficie $f(x,y)=\left(x^2+y\right)e^{2x}$ en P(0, –1) es:

a) $2x-y+z=0$ b) $x+y+z+2=0$ c) $x+y-z=0$

Solución:

Si el punto de la superficie $z=f(x,y)$ se denota (x_0,y_0,z_0), la ecuación del plano tangente en ese punto es $z-z_0=f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$.

$$z_0=f(0,-1)=(-1)e^0=-1.$$

$$f_x(x,y)=\left(2x+2\left(x^2+y\right)\right)e^{2x} \rightarrow f_x(0,-1)=-2$$

$$f_y(x,y)=e^{2x} \rightarrow f_y(0,-1)=1$$

La ecuación del plano pedido es:

$$z+1=-2(x-0)+1(y+1)\Rightarrow 2x-y+z=0$$

La respuesta es a)

2. (J07) La ecuación del plano tangente a la superficie dada por $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, en el punto (3, 4, 5) es:

a) $-3x+4y+5z-32=0$. b) $2x-4y+5z-12=0$. c) $3x+4y-5z=0$

Solución:

$$f_x(x,y)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow \text{en } (3,4) \rightarrow 6/10=3/5$$

$$f_y(x,y)=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow \text{en } (3,4) \rightarrow 8/10=4/5$$

Ec. del plano tangente:

$$z-5=\frac{3}{5}(x-3)+\frac{4}{5}(y-4) \Leftrightarrow 3x+4y-5z=0$$

La respuesta es c)

3. (J08) La ecuación del plano tangente a la superficie determinada por la función $f(x,y)=e^{x^2-y^2}+x^2-y^2$, en el punto (1, 1, 1), es:

a) $4x-4y+z=1$. b) $x-y-z=-1$

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$f_x=2xe^{x^2-y^2}+2x,\ [\text{en } (1,1)] \rightarrow 4$$

$$f_y=-2ye^{x^2-y^2}-2y,\ [\text{en } (1,1)] \rightarrow -4$$

La ecuación del plano tangente es: $z-1=4(x-1)-4(y-1) \Leftrightarrow 4x-4y-z=-1$

La respuesta es c)

4. (S08) La ecuación del plano tangente a la superficie determinada por la función $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$, en el punto (5, 4, 3), es:

a) $z-3=2(x-5)-(y-4)$. b) $5x+4y+3z=32$ c) $5x-4y-3z=0$

Solución:

$$f_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}2x\,,\ \text{[en (5, 4)]}\to 5/3$$

$$f_y=\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}\,,\ \text{[en (5, 4)]}\to -4/3$$

El plano tangente es: $z-3=\frac{5}{3}(x-5)-\frac{4}{3}(y-4)\ \Leftrightarrow\ 5x-4y-3z=0$

La respuesta es c)

5. (S09) La ecuación del plano tangente a la superficie $f(x,y)=\dfrac{3x+y}{x^2+1}$ en el punto (0, 1, 1) es:

a) $x+y+z=2$ b) $3x+y-z=0$

c) Ninguna de las anteriores

Solución:

$$f_x(x,y)=\frac{3(x^2+1)-(3x+y)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\ \to\ \text{en (0, 1)}\ \to\ 3$$

$$f_y(x,y)=\frac{1}{x^2+1}\ \to\ \text{en (0, 1)}\ \to\ 1$$

Ec. del plano: $z-1=3(x-0)+1\cdot(y-1)\ \Leftrightarrow\ 3x+y-z=0$

La respuesta es b)

6. (J13) La ecuación del plano tangente a la superficie $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y+1}$ en P(–2, –4) es:

a) $x-2y+9z=0$ b) $7x-2y+z+8=0$ c) $x-2y+9z=1$

Solución:

$$f_x=\frac{x^2+y+1-(2x)x}{(x^2+y+1)^2}=\frac{-x^2+y+1}{(x^2+y+1)^2}\,;\qquad f_y=\frac{-x}{(x^2+y+1)^2}\ \Rightarrow\ \nabla f(-2,-44)=(-7,2).$$

$f(-2,-4)=-2$.

El plano tangente en P es:

$$z+2=(-7,\ 2)\cdot\begin{pmatrix}x+2\\ y+4\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ z+2=-7(x+2)+2(y+4)\Rightarrow 7x-2y+z+8=0$$

La respuesta es b)

Polinomio de Taylor

(Recuerda. Para una variable)

7. (J10) El polinomio de Taylor de tercer grado, en el punto $x = 0$, de la función $f(x) = x^2 - \ln(1+x)$ es:

a) $P(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ b) $P(x) = x + 3x^2 - \frac{1}{3}x^3$

c) Ninguno de los anteriores. La solución correcta es: _____

Solución:

$$f(x) = x^2 - \ln(1+x) \to f'(x) = 2x - \frac{1}{1+x} \to f''(x) = 2 + \frac{1}{(1+x)^2} \to f'''(x) = -\frac{2}{(1+x)^3}$$

$f(0) = 0, f'(0) = -1,\ f''(0) = 3,\ f'''(0) = -2$

$$P(x) = -x + \frac{3}{2!}x^2 - \frac{2}{3!}x^3 \Rightarrow P(x) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

8. (S09) El polinomio de Taylor de grado 2, en el punto (0, 0), de $f(x,y) = e^x + y^2$, es:

a) $P(x,y) = x^2 + 10y^2 - 4x - 36y + 30$.

b) $P(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + x + 1$

c) Ninguno de los anteriores.

Solución:

El polinomio de Taylor de segundo grado para una función $f(x,y)$ en el punto (a, b) es:

$$P(x,y) = f(a,\ b) + \nabla f(a,\ b)\cdot(x-a,\ y-b) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-a & y-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{xx}(a,\ b) & f_{xy}(a,\ b) \\ f_{yx}(a,\ b) & f_{yy}(a,\ b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

Gradiente: $\begin{cases} f_x = e^x \\ f_y = 2y \end{cases} \Rightarrow \nabla f(0,0) = (1,\ \ 0)$

Hessiana: $\begin{cases} f_{xx} = e^x \\ f_{xy} = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} f_{yx} = 0 \\ f_{yy} = 2 \end{cases} \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$P(x,y) = 1 + (1,\ 0)\cdot(x-1, y-1) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow P(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + x + 1$$

La respuesta es b)

9. (S08) Dado el campo $f(x,y) = 2x^2 + e^{x-2y}$

a) (10 puntos) Halla su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto (0, 0). Desarrolla y simplifica el resultado.

Solución:

$f_x = 4x + e^{x-2y}$; $f_y = -2e^{x-2y} \Rightarrow \nabla f(0,\ 0) = (1, -2)$

$f_{xx} = 4 + e^{x-2y} \to 5$; $f_{xy} = -2e^{x-2y} \to -2$; $f_{yy} = 4e^{x-2y} \to 4$

Luego:

$$P(x,y) = 1 + (1,-2)\cdot(x,\ y) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 + x - 2y + \frac{5}{2}x^2 - 2xy + 2y^2$$

10. (J10) El polinomio de Taylor de grado 2 en el punto (0, 0) de la función $f(x,y)=\cos(x+2y)$ es:

a) $P(x,y)=1-\frac{1}{2}x^2-2xy-2y^2$ b) $P(x,y)=1+x+y-2xy-\frac{1}{2}x^2$

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$f_x=-\sin(x+2y)$; $f_y=-2\sin(x+2y)$ $\Rightarrow$ $\nabla f(0,0)=(0,0)$

$f_{xx}=-\cos(x+2y)\to -1$; $f_{xy}=-2\cos(x+2y)\to -2$; $f_{yy}=-4\cos(x+2y)\to -4$

Luego:

$$P(x,y)=1+(0,\ 0)\cdot(x,\ y)+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=1-\frac{1}{2}x^2-2xy-2y^2$$

La respuesta es a)

11. (J06) ¿El polinomio de Taylor de grado 2 en el punto (0, 0) de la función $f(x,y)=2xe^{x-y^2}$ es:

a) $P(x,y)=\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}$ b) $P(x,y)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$f(x,y)=2xe^{x-y^2}$ $\to$ en (0, 0) $\to$ 0

$f_x(x,y)=2e^{x-y^2}+2xe^{x-y^2}$ $\to 2$; $f_y(x,y)=-4xye^{x-y^2}$ $\to$ 0

$f_{xx}(x,y)=2e^{x-y^2}+2xe^{x-y^2}$ $\to 4$; $f_{xy}(x,y)=-4ye^{x-y^2}-4xye^{x-y^2}\to 0$

$f_{yy}(x,y)=-4xe^{x-y^2}+8xy^2e^{x-y^2}$ $\to 0$

Por tanto:

$$P(x,y)=0+(2,\ 0)\cdot(x,\ y)+\frac{1}{2}(x\quad y)\cdot\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=2x+2x^2$$

La respuesta es c)

12. (J03) Dado el campo $f(x,y)=e^{x^2-y^2}+xy$

a) (0,8 puntos) Halla su polinomio de Taylor de grado 2 en el origen.

b) (0,2 puntos) Utilízalo para calcular aproximadamente el valor de $f(0{,}2,\ 0{,}1)$.

Solución:

a) $f_x(x,y)=2xe^{x^2-y^2}+y$ $\to$ $f_{xx}(x,y)=2e^{x^2-y^2}+4x^2e^{x^2-y^2}$; $f_{xy}(x,y)=-4xye^{x^2-y^2}+1$

$f_y(x,y)=-2ye^{x^2-y^2}+x$ $\to$ $f_{yy}(x,y)=-2e^{x^2-y^2}+4y^2e^{x^2-y^2}$

Se obtiene:

$$P(x,y)=1+(0,\ 0)\cdot(x,\ y)+\frac{1}{2}(x\quad y)\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=x^2-y^2+xy+1$$

b) $f(0{,}2,\ 0{,}1)\approx P(0{,}2,\ 0{,}1)=0{,}2^2-0{,}1^2+0{,}2\cdot 0{,}1+1=1{,}05$.

<u>Observación</u>: El valor que se obtiene con la calculadora, que sigue sin ser el exacto, pues la calculadora también da valores aproximados, es: $f(0{,}2,\ 0{,}1)=1{,}050454534$. El error de aproximación es inferior a 0,0005.