FUNCIONES DE DOS VARIABLES
DOMINIOS, DERIVADAS PARCIALES Y DIRECCIONALES

Preguntas de dominios y curvas de nivel

1. Determina el dominio de las funciones:

a) $f(x,y)=e^{\frac{y}{x}}$ b) $f(x,y)=x\sin y+\dfrac{e^{x^2}}{y+1}$ c) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2-y+4}$

En cada caso indica dos puntos que no sean del dominio.

Solución:

a) No está definida cuando $x = 0$.

$D=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \,\middle|\, x\neq 0\right\}$ → Todo el plano menos el eje OY: los puntos de la forma $(0, y)$.

No son del dominio los puntos (0, 4) y (0, –2), por ejemplo.

b) No está definida cuando $y = -1$: $D=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \,\middle|\, y\neq -1\right\}$.

Todo el plano menos la recta $y = -1$: los puntos de la forma $(x, -1)$.

No son del dominio los puntos (1, –1) y (–2, –1), por ejemplo.

c) No está definida cuando $x^2-y+4=0 \Rightarrow y=x^2+4$: $D=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \,\middle|\, y\neq x^2+4\right\}$.

Todo el plano menos los puntos de la parábola $y=x^2+4$.

No son del dominio los puntos (0, 4) y (–1, 5), por ejemplo.

2. Dada la función $f(x,y)=e^{\frac{y}{x}}$, halla:

a) $f(1,\ 0)$, $f(3,\ 0)$, $f(1,\ 1)$ y $f(2,\ 2)$.

b) ¿Cuál es la ecuación de la curva de nivel 1 de la función dada? ¿Y la ecuación de la curva de nivel e de esa misma ecuación?

c) ¿Cuál es la ecuación de la curva de nivel que pasa por el punto (3, 1)? ¿Y la ecuación de la curva de nivel que pasa por el punto (1, 2)?

Solución:

a) $f(1,\ 0)=e^{0/1}=e^0=1$; $f(3,\ 0)=e^{0/3}=e^0=1$. $f(1,\ 1)=e^{1/1}=e$; $f(2,\ 2)=e^{2/2}=e$.

b) Si $e^{\frac{y}{x}}=1 \Rightarrow \dfrac{y}{x}=0 \Rightarrow y = 0$. (Son los puntos del eje OX).

Si $e^{\frac{y}{x}}=e \Rightarrow \dfrac{y}{x}=1 \Rightarrow y = x$.

c) En el punto (3, 1) la función alcanza el nivel $f(3,1)=e^{\frac{1}{3}}$;

Por tanto, $e^{\frac{y}{x}}=e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow y=\dfrac{x}{3}$ → La curva de nivel es la recta $y=\dfrac{x}{3}$.

En el punto (1, 2) la función alcanza el nivel $f(1,2)=e^{\frac{2}{1}}$;

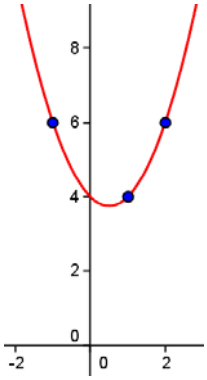
Por tanto, $e^{\frac{y}{x}}=e^2 \Rightarrow \dfrac{y}{x}=2 \Rightarrow y=2x$ → La curva de nivel es la recta $y=2x$.

3. Dada la función $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2-y+4}$, halla:

a) $f(1,\ 4)$, $f(2,\ 6)$ y $f(-1,\ 6)$.
b) ¿Cuál es la ecuación de la curva de nivel 1 de la función dada?
c) ¿Cuál es la ecuación de la curva de nivel que pasa por el punto (1, 0)?
d) Para la misma función escribe la ecuación de las curvas de nivel 2, 3 y 4.

Solución:

a) $f(1,4)=\dfrac{1}{1-4+4}=1$; $f(2,6)=\dfrac{2}{2^2-6+4}=1$; $f(-1,6)=\dfrac{-1}{(-1)^2-6+4}=1$.



b) La ecuación de la curva de nivel 1 es: $\dfrac{x}{x^2-y+4}=1\Rightarrow$

$x=x^2-y+4\Rightarrow y=x^2-x+4$.

Se trata de la parábola de la figura adjunta.

c) Como $f(1,0)=\dfrac{1}{1-y+4}=\dfrac{1}{5}$, la ecuación de la curva de nivel que pasa por el punto (1, 0) es: $\dfrac{x}{x^2-y+4}=\dfrac{1}{5}\Rightarrow 5x=x^2-y+4\Rightarrow y=x^2-5x+4$.

d) La curva de nivel 2 es: $\dfrac{x}{x^2-y+4}=2\ \Rightarrow\ y=x^2-\dfrac{x}{2}+4$.

La curva de nivel 3 es: $\dfrac{x}{x^2-y+4}=3\ \Rightarrow\ y=x^2-\dfrac{x}{3}+4$.

La curva de nivel 4 es: $\dfrac{x}{x^2-y+4}=4\ \Rightarrow\ y=x^2-\dfrac{x}{4}+4$.

4. (J11) Dada $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{5-x^2-y^2}}$ se verifica:

a) Su dominio de definición son los puntos (x, y) tales que $x^2+y^2\neq 5$.
b) La curva de nivel 1 son los puntos de la circunferencia $x^2+y^2=4$.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Su dominio de definición son los puntos (x, y) tales que $5-x^2-y^2>0\ \Rightarrow\ x^2+y^2<5$.

La curva de nivel 1 es $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{5-x^2-y^2}}=1\ \Rightarrow 1=\sqrt{5-x^2-y^2}\ \Rightarrow 1=5-x^2-y^2\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ x^2+y^2=4$.

La respuesta es b)

5. (J09) El dominio de definición de la función $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ viene dado por:

a) Los puntos interiores y de frontera de la circunferencia centrada en el origen y radio 2.
b) El semiplano $2-x-y\geq 0$.

c) El conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x \le 2, y \le 2\}$.

Solución:

Debe cumplirse que $4 - x^2 - y^2 \ge 0 \Leftrightarrow 4 \ge x^2 + y^2$, que son los puntos interiores y de frontera de la circunferencia de radio 2.

La respuesta es a)

6. (J08) La curva de nivel 4 de la función $f(x, y) = \sqrt{p^2 - x^2 - y^2}$ pasa por el punto (0, 3):

a) si p = 5. b) si p = 7.

c) Dicha curva de nivel no pasa por el punto (0, 3) para ningún valor de p.

Solución:

La curva de nivel es $\sqrt{p^2 - x^2 - y^2} = 4 \Rightarrow$ por pasar por (0, 3), $\sqrt{p^2 - 0 - 9} = 4 \Rightarrow$ $p^2 - 9 = 16 \Rightarrow p = \pm 5$.

La respuesta es a)

Derivadas parciales

7. Calcula las derivadas parciales de la función $f(x, y) = x^2 \sin 2y$; y halla el vector gradiente en el punto (1, π/4). ¿Cuál es su módulo?

Solución:

$$f_x(x, y) = 2x \sin 2y;\ f_y(x, y) = 2x^2 \cos 2y \Rightarrow \nabla f(x, y) = \left(2x \sin 2y,\ 2x^2 \cos 2y\right)$$

En (1, π/4): $\nabla f(1, \pi/4) = \left(2 \cdot 1 \cdot \sin(2 \cdot \pi/4),\ 2 \cdot 1^2 \cdot \cos(2 \cdot \pi/4)\right) = (2,\ 0)$.

Su módulo es 2: $|\nabla f(1, \pi/4)| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$.

8. Calcula las derivadas parciales de la función $f(x, y) = \left(1 + x^2 y\right)^3 + x\sqrt{y} - 9$. Halla el vector gradiente en el punto (1, 1). ¿Cuál es su módulo?

Solución:

$$f_x(x, y) = 3(1 + x^2 y)^2 \cdot 2x + \sqrt{y};\ f_y(x, y) = 3(1 + x^2 y)^2 \cdot x^2 + \frac{x}{2\sqrt{y}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla f(x, y) = \left(3(1 + x^2 y)^2 \cdot 2x + \sqrt{y}, 3(1 + x^2 y)^2 \cdot x^2 + x/2\sqrt{y}\right)$$

En (1, 1): $\nabla f(1,1) = \left(3(1+1)^2 \cdot 2 + \sqrt{1}, 3(1+1)^2 \cdot 1^2 + \frac{1}{2\sqrt{1}}\right) = \left(25,\ \frac{25}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\nabla f(1,1)| = \sqrt{25^2 + \frac{25^2}{2^2}} = \frac{25}{2}\sqrt{5}.$$

9. Calcula las derivadas de primer y segundo orden del campo $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$. Halla su gradiente y su hessiana en el punto (0, 0).

Solución:

$$f_x(x, y) = -3x^2 + 4y;\ f_y(x, y) = 4x - 4y \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,\ 0)$$

$$f_{xx}(x, y) = -6x;\ f_{xy}(x, y) = 4;\ f_{yx}(x, y) = 4;\ f_{yy}(x, y) = -4 \Rightarrow H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

10. Dada la función $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$. Halla su gradiente en el punto (1, 0) y su hessiana en el punto (0, 0).
Solución:
Derivadas parciales:

$$f_x(x,y)=-2xe^{-(x^2+y^2)} \to f_x(1,0)=-2/e;\ f_y(x,y)=-2ye^{-(x^2+y^2)} \to f_y(1,0)=0;$$

Gradiente: $\nabla f(1,0)=\left(-2e^{-1},\ 0\right)$
Derivadas segundas:

$$f_{xx}(x,y)=-2e^{-(x^2+y^2)}+4x^2e^{-(x^2+y^2)};\quad f_{xy}(x,y)=4xye^{-(x^2+y^2)};$$

$$f_{yx}(x,y)=4xye^{-(x^2+y^2)};\ f_{yy}(x,y)=-2e^{-(x^2+y^2)}+4y^2e^{-(x^2+y^2)}$$

Hessiana: $H(f)(0,0)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

11. (J09) El gradiente de la función $f(x,y)=x\sin y+\dfrac{e^{x^2}}{y+1}$, en el punto (1, 0), vale:

a) $\nabla f(1,0)=\left(2e,\quad 1-e\right)$. b) $\nabla f(1,0)=\left(e,\quad 2\right)$. c) $\nabla f(1,0)=1+e$
Solución:

$$f_x(x,y)=\sin y+\frac{2xe^{x^2}}{y+1} \to (\text{en } (1,0)) \to 2e$$

$$f_y(x,y)=x\cos y-\frac{e^{x^2}}{(y+1)^2} \to (\text{en } (1,0)) \to 1-e$$

Por tanto, $\nabla f(1,0)=\left(2e,\quad 1-e\right)$.
La respuesta es a)

Derivadas direccionales

12. Halla la derivada direccional del campo $f(x,y)=(2x-y)^3$ según la dirección del vector $\vec{u}=(4,\ 3)$, en el punto (3, 5).
Solución:
La derivada direccional de un campo escalar $f(x,y)$, en el punto (a, b), según la dirección del vector $\vec{u}=(u_1,\ u_2)$, que puede denotarse como $f'\left((a,\ b),\ \vec{u}\right)$, vale:

$f'\left((a,b),\vec{u}\right)=\nabla f(a,b)\cdot(u_1,u_2)$ $\to$ producto escalar del vector gradiente por el vector $\vec{u}$.
Si el vector no fuese unitario hay que tomar el unitario correspondiente con el mismo sentido. En este caso,

$$f_x(x,y)=3\cdot 2(2x-y)^2,\ f_y(x,y)=-3(2x-y)^2 \Rightarrow \nabla f(3,\ 5)=\left(6,-3\right).$$

El vector unitario en la dirección de $\vec{u}$ = (4, 3) es: $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\dfrac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}\cdot\left(4,\ 3\right)=\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$.

Por tanto, la derivada direccional pedida vale:

$$f'((3,5),(4,3))=\left(6,-3\right)\cdot\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)=\frac{24}{5}-\frac{9}{5}=\frac{15}{5}=3$$

13. (J09) Sea $f(x,y)=x^2+y+\sin xy$. Su derivada direccional según el vector $\vec{v}$ = (3, 4) en el punto (1, 0), vale:

a) 3. b) $\frac{4}{3}$. c) Ninguna de las anteriores, su valor es: _____

Solución:

Gradiente: $\begin{cases} f_x(x,y)=2x+y\cos xy \\ f_y(x,y)=1+x\cos xy \end{cases} \Rightarrow \nabla f(1,0)=(2,\quad 2)$

Vector unitario en el sentido de $\vec{v}$ es $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

Derivada direccional: $f'((1,0),\vec{v}(3,4))=(2,\quad 2)\cdot\left(\frac{3}{5},\quad \frac{4}{5}\right)=\frac{14}{5}$

La respuesta es c): 14/5.

14. (J07) La derivada direccional de $f(x,y)=3x^2-2y^2$, en el punto (–1, 3), en la dirección del vector $\vec{v}$ = (2, –5), vale:

a) $36/\sqrt{10}$. b) $48/\sqrt{29}$. c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$\begin{cases} f_x=6x \\ f_y=-4y \end{cases} \Rightarrow$ Gradiente en (–1, 3) = (–6, –12)

Un vector unitario en el sentido de $\vec{v}$ = (2, –5) es $\left(\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{-5}{\sqrt{29}}\right)$

La derivada direccional es: $f'((-1,3),\vec{v}(2,-5))=(-6,-12)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{-5}{\sqrt{29}}\right)=\frac{48}{\sqrt{29}}$

La respuesta es b)

15. (S08) La derivada direccional de $f(x,y)=xe^{\frac{y}{x}}$, en el punto (1, 1), en la dirección el vector $\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(2,\quad -1)$ vale:

a) 0. b) $-\frac{e}{\sqrt{5}}$. c) Ninguna de las anteriores

Solución:

$$f_x=e^{y/x}+e^{y/x}-\frac{y}{x^2}=e^{y/x}(1-\frac{y}{x^2}),\ \text{[en (1, 1)]}\to 0$$

$$f_y=x\frac{1}{x}e^{y/x}=e^{y/x},\ \text{[en (1, 1)]}\to e$$

Luego, $f'((1,1),\vec{v})=0\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-e\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{e}{\sqrt{5}}$.

La respuesta es b)

16. (J12) El derivada direccional de $f(x,y)=5x^2-3x-y-1$ en el punto P(1, 2), según el vector $\overrightarrow{PM}$, donde M (5, 5) es:

a) 0. b) 5. c) –1.

Solución:

$f_x = 10x - 3 \Rightarrow f_x(1, 2) = 7.$ $\quad f_y = -1 \Rightarrow f_y(1, 2) = -1.$

Además $\overrightarrow{PM} = (5 - 1, 5 - 2) = (4, 3)$ y $\left|\overrightarrow{PM}\right| = 5$

Entonces,

$$f'\left((1,2), \overrightarrow{PM}\right) = \nabla f(1,2) \cdot \frac{1}{5}\overrightarrow{PM} = (7,-1) \cdot \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{28}{5} - \frac{3}{5} = 5$$

La respuesta es b)

17. (J12) El campo $f(x,y) = x^2(1-2y)^2$, en el punto (2, 1), tiene como dirección de máximo crecimiento la del vector:

a) (4, 16). b) (-4, 2). c) (1, 1).

Solución:

La dirección de máximo crecimiento de un campo, en un punto dado, es la del vector gradiente en ese punto. (El crecimiento es positivo en el sentido del gradiente; es negativo en sentido contrario).

El gradiente de $f(x,y) = x^2(1-2y)^2$ es:

$$\nabla f(x,y) = \left(2x(1-2y)^2, -4x^2(1-2y)\right) \Rightarrow \nabla f(2,1) = (4, 16).$$

La respuesta es a). (También valdría la de cualquier vector proporcional, por ej. (1, 4)).

18. (J13) La dirección de crecimiento nulo del campo $f(x,y) = y^2 e^{x-y}$ en el punto (2, 2) es la del vector:

a) (1, 1). b) (1, –1). c) (0, 2).

Solución:

$f_x(x,y) = y^2 e^{x-y}$; $f_y(x,y) = (2y - y^2)e^{x-y}$;

$f_x(2,2) = 4$; $f_y(2,2) = 0 \Rightarrow \nabla f(2,2) = (4,\ 0)$

La dirección de crecimiento nulo es la de la curva de nivel en ese punto, es decir la dirección perpendicular al gradiente (4, 0), y esa es la del vector (0, 2), entre otros.

Recuérdese que dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar vale 0. Para obtener un vector perpendicular a otro dado basta con cambiar de orden sus componentes y el signo de una de ellas. Esto es, si $\vec{v} = (a,\ b)$, un vector perpendicular a él será $\vec{w} = (-b,\ a)$.

La respuesta es c)

19. (S09) El máximo valor de la derivada direccional del campo $f(x,y) = y^3 - pxy$ en el punto (0, –1) es 5:

a) Si $p = -4$. b) Sólo si $p = 4$. c) Si $p = -2$

Solución:

Recuérdese que la derivada direccional vale:

$f'((a,b),\vec{u}) = \nabla f(a,b) \cdot (u_1, u_2) = \left|\nabla f(a,\ b)\right| \cdot \left|(u_1,\ u_2)\right| \cdot \cos\alpha$, siendo α el ángulo que determinan ambos vectores. Como el vector $\vec{u}$ es unitario, se deduce que

$f'((a,\ b),\ \vec{u}) = \left|\nabla f(a,\ b)\right| \cdot \cos\alpha$,

que será máxima si $\alpha = 0^o$, siendo ese valor máximo el módulo del gradiente

En este caso:

$f_x(x,y) = -py$; $f_y(x,y) = 3y^2 - px \Rightarrow$ Grad $f(0, 1) = (p, 3)$.

El valor máximo de la derivada direccional será: $\left|\nabla f\left(0,1\right)\right| = \sqrt{p^2+3^2}$.

Si el valor máximo de la derivada direccional es 5 $\Rightarrow \sqrt{p^2+9} = 5 \;\Rightarrow\; p = \pm 4$

La respuesta es a)

20. (J10) La derivada direccional de $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ en el punto (1, 2) es nula en la dirección del vector:

a) (2, –1) b) (4, 3).

c) Ninguna de las anteriores. Nunca es nula.

Solución:

$$f_x(x,y) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \to f_x(1,2) = \frac{3}{25}; \quad f_y(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \to f_y(1,2) = \frac{-4}{25}$$

El vector gradiente es: $\left(\dfrac{3}{25}, \dfrac{-4}{25}\right)$.

La dirección de crecimiento nulo es la perpendicular al gradiente. Esa dirección es la del vector (4, 3). → Obsérvese que

La respuesta es b)

21. (J13) La derivada direccional del campo $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2-xy+4}$, en el punto P(1, 0), según la dirección del vector $\vec{v}$ = (3, –4), es:

a) $\dfrac{1}{25}$. b) $\dfrac{1}{5}$. c) 0.

Solución:

$$f_x = \frac{x^2-xy+4-(2x-y)x}{(x^2-xy+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2-xy+4)^2}; \quad f_y = \frac{-(-x).x}{(x^2-xy+4)^2} \Rightarrow \nabla f(1,0) = \left(\frac{3}{25}, \frac{1}{25}\right)$$

Vector unitario en la dirección de $\vec{v}$ = (3, –4) → $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{-4}{5}\right)$

La derivada direccional es: $\left(\dfrac{3}{25}, \dfrac{1}{25}\right)\cdot\left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{9}{125} - \dfrac{4}{125} = \dfrac{5}{125} = \dfrac{1}{25}$.

La respuesta es a)

22. (J10) La derivada direccional del campo $f(x,y) = p\left(2x - xy^2\right)^3$ según la dirección del vector (1, –1), en el punto (1, 1), vale $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$:

a) Si p = 2 b) Si p = 1/9

c) Ninguna de las anteriores. El valor de p = ____

Solución:

$$f_x(x,y) = 3p\left(2x-xy^2\right)^2(2-y^2), \quad f_y(x,y) = 3p\left(2x-xy^2\right)^2(-2xy)$$

Grad(1, 1) = (3p, –6p). Vector unitario en la dirección de (1, –1) = $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, \quad -1)$

Derivada direccional: $f'\left((1,1),(1,-1)\right) = p(3,-6)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) = \dfrac{9p}{\sqrt{2}}$

Si $\frac{9p}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow p = 1/9$

La respuesta es b)

23. (J11) La derivada direccional del campo $f(x, y) = (x + y)e^{x-y}$ en el punto (2, 2) según la dirección del vector $\vec{v}$ = (1, −2) vale:

a) $-1/\sqrt{5}$. b) −2.

c) Ninguna de las anteriores, su valor es: ____

Sol. $f_x = e^{x-y} + (x+y)e^{x-y}$; $f_y = e^{x+y} - (x+y)e^{x-y} \Rightarrow \nabla f(2, 2) = (5, -3)$

Vector unitario en la dirección de $\vec{v} \rightarrow \left(1/\sqrt{5},\ -2/\sqrt{5}\right)$

La derivada direccional es: $(5,\ -3)\cdot\left(1/\sqrt{5},\ -2/\sqrt{5}\right) = \frac{11}{\sqrt{5}}$.

La respuesta es c)

24. (J11) Dado el campo escalar $f(x, y) = e^{x^2-4x+y}$ se pide:

a) (0,75 puntos) Halla y representa la curva de nivel 1.

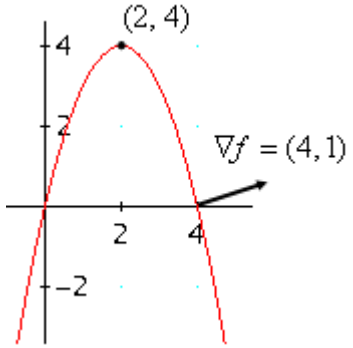
b) (0,75 puntos) El punto en el que esa curva de nivel tiene pendiente cero.

c) (1 puntos) Halla la dirección de crecimiento máximo del campo en el punto (4, 0). ¿Cuánto vale ese crecimiento máximo?

Solución:

a) La curva de nivel 1 cumple que $f(x, y) = e^{x^2-4x+y} = 1 = e^0 \Rightarrow x^2 - 4x + y = 0 \Rightarrow$ $y = -x^2 + 4x$.

Se trata de una parábola, que puede trazarse dando algunos valores. Es la de la figura adjunta.



b) El crecimiento de la curva de nivel viene determinado por el valor de su derivada.

$y' = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.

El punto pedido es (2, 4).

c) La dirección de crecimiento máximo es la del vector gradiente.

$$f_x(x, y) = (2x - 4)e^{x^2-4x+y};\ f_y(x, y) = e^{x^2-4x+y} \Rightarrow \nabla f(4, 0) = (4,\ 1).$$

El valor de ese crecimiento máximo es $|\nabla f(4, 0)| = \sqrt{4^2 + 1^1} = \sqrt{17}$.