TEMA 17. APLICACIONES DE LA DERIVADA

1. APLICACIONES DE LA DERIVADA PRIMERA

El signo de la derivada de una función permite conocer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la curva asociada a ella. Además, en muchos casos posibilita la determinación de sus máximos y mínimos relativos. Estos datos permiten trazar su gráfica con mayor precisión

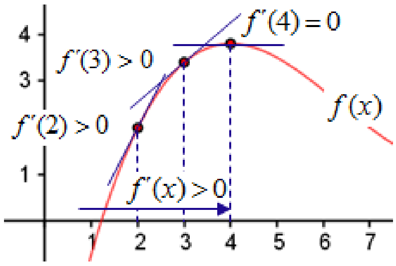
Crecimiento de una función
Recuerda que:

$f(x)$ es <u>creciente</u> en un punto $x = a$ si $f(a-h) \le f(a) \le f(a+h)$, para $h > 0$ y pequeño.

- Observa: si la derivada es positiva, la recta tangente tiene pendiente positiva: es creciente. La función será creciente.

Por tanto:

Si $f'(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en $x = a$.



La función representada a la derecha es creciente en los puntos $x = 2$ y $x = 3$: las rectas tangentes tienen pendiente positiva.
Es creciente para los valores de $x < 4$.
En $x = 4$ la derivada vale 0, $f'(4) = 0$: en ese punto la función tiene un máximo.

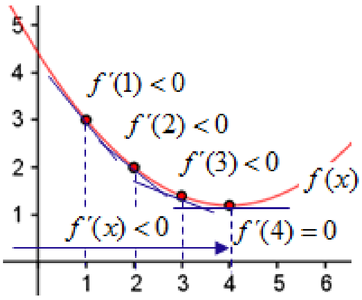
Decrecimiento de una función
Recuerda que:

$f(x)$ es <u>decreciente</u> en un punto $x = a$ si $f(a-h) \ge f(a) \ge f(a+h)$, para $h > 0$ y pequeño.

- Observa: si la derivada es negativa, la recta tangente tiene pendiente negativa: es decreciente. La función será decreciente.

Por tanto:

Si $f'(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $x = a$.

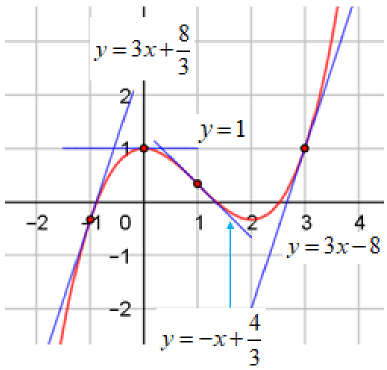


La función representada a la derecha es decreciente en los puntos $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$: las rectas tangentes tienen pendiente negativa.
Es decreciente para los valores de $x < 4$.
En $x = 4$ la derivada vale 0, $f'(4) = 0$: en ese punto la función tiene un mínimo.

Ejemplo:

La función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$, cuya derivada es $f'(x) = x^2 - 2x$, cumple:

En $x = -1$ y en $x = 3$ es creciente, pues $f'(-1) = 3$ y $f'(3) = 3$, valores positivos.
En $x = 1$ es decreciente, pues $f'(1) = -1 < 0$.
En $x = 0$, como $f'(0) = 0$, la función no es creciente ni decreciente: tiene un máximo.



<u>Observación</u>: Comprueba que las rectas tangentes a la curva, en los puntos que se indican, son las dadas en la gráfica adjunta.

Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función $y = f(x)$ se hallan estudiando el signo de su derivada $f'(x)$.

- Siempre que $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente:

Los intervalos de crecimiento son las soluciones de la inecuación $f'(x) > 0$.

- Siempre que $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente:

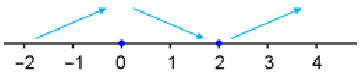
Los intervalos de decrecimiento son las soluciones de la inecuación $f'(x) < 0$.

$\rightarrow$ Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ se procede como sigue:
1) Se calcula la derivada y se iguala a 0: $f'(x) = 0$.
Las soluciones de esta ecuación son los llamados puntos singulares (o estacionarios).
2) Esos puntos dividen al eje *OX* en varios intervalos. (Conviene marcarlos en el eje *OX*).
3) Se halla el signo de la derivada en cada uno de los intervalos obtenidos: basta con probar un punto de cada intervalo para ver el signo de $f'(x)$. Con eso, deducir si es creciente o decreciente.
Puede convenir indicar con flechas la variación de la función: ↗ si crece; ↘ si decrece.

Ejemplo:

Para $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x$. Se resuelve $f'(x) = x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0; x = 2$.

Se obtienen los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$.



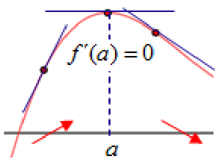
Con esto:

- Si $x < 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.
- Si $0 < x < 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en el intervalo $(0, 2)$.
- Si $x > 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en el intervalo $(2, +\infty)$.

Puede deducirse que en $x = 0$ la función tiene un máximo relativo; y que en $x = 2$ tiene un mínimo.

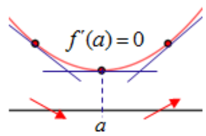
Máximos y mínimos (relativos)

Para que en el punto $x = a$ se dé un máximo o un mínimo es necesario que $f'(a) = 0$. En ambos casos la recta tangente a la curva es horizontal: su pendiente vale 0



- El punto a es un máximo relativo cuando la función es creciente a su izquierda y decreciente a su derecha. Por tanto:

  En $x = a$ hay un máximo si: $f'(a^-) > 0$, $f'(a) = 0$, $f'(a^+) < 0$.

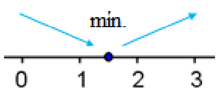


- El punto a es un mínimo relativo cuando la función es decreciente a su izquierda y creciente a su derecha. Por tanto:

  En $x = a$ hay un mínimo si: $f'(a^-) < 0$, $f'(a) = 0$, $f'(a^+) > 0$.

Ejemplo:

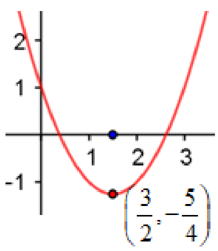
La función $f(x) = x^2 - 3x + 1$ tiene un mínimo en $x = \frac{3}{2}$, pues:



1) Su derivada, $f'(x) = 2x - 3 = 0$ si $x = \frac{3}{2}$.

2) Además, para $x < \frac{3}{2}$ (por ej. $x = 1$), se tiene que $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

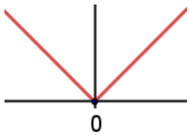
Y para $x > \frac{3}{2}$ (por ej. $x = 2$), se cumple que $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.



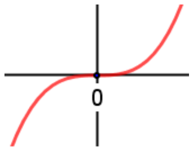
El mínimo es el punto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$; que obviamente es el vértice de la parábola.

Advertencias:

- No siempre que $f'(x)=0$ se tiene un máximo o un mínimo; ni siquiera esto es una condición necesaria (lo es solo para funciones derivables).
- Puede haber mínimo sin que $f'(x)=0$. Así, la función $f(x)=|x|$ tiene un mínimo en $x = 0$, pero en ese punto no es derivable la función.



- Puede suceder que $f'(x)=0$ y no haya mínimo ni máximo. Así pasa en el punto $x = 0$ para la función $f(x)=x^3$. Su derivada, $f'(x)=3x^2$, se anula en $x = 0$, pero:



Si $x < 0$, (por ejemplo, $x = -1$), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
Si $x > 0$, (por ejemplo, $x = 1$), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
Por tanto, en $x = 0$ no hay máximo ni mínimo. Hay un punto de inflexión.

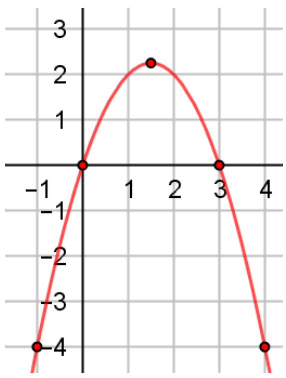
2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES POLINÓMICAS

Las gráficas de las funciones polinómicas, $f(x)=P(x)$, son predecibles, pues son funciones que están definidas y son continuas y derivables en todo **R**. Por consiguiente, pueden dibujarse hallando algunos de sus puntos, representándolos en el plano y uniéndolos mediante una línea.
No obstante, para conseguir mayor precisión, conviene determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos, si los tuviese. Para ello puedes proceder como sigue:

1. Halla los puntos de corte de la curva con los ejes de coordenadas.
Corte con el eje *OY*: se hace $x = 0 \rightarrow$ punto $(0, f(0))$.
Corte con el eje *OY*: se hace $y = 0 \rightarrow$ son las soluciones de la ecuación $f(x)=P(x)=0$.
Esto permite determinar los intervalos en los que la función es positiva o negativa: sus regiones.
2. Calcula los puntos singulares.
Halla la derivada $f'(x)=P'(x)$ e iguálala a 0.
Calcula las soluciones de la ecuación $f'(x)=0 \rightarrow$ puntos singulares.
Marca sobre el eje *OX* los puntos singulares. Esos puntos dividen al eje *OX* en varios intervalos.
3. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
Estudia el signo de la derivada en cada intervalo anterior:
si $f'(x) > 0$, la función es creciente; si $f'(x) < 0$, es decreciente.
(Basta con probar un punto de cada intervalo y ver si $f'(x)$ es positiva o negativa).
Deduce (de lo anterior) dónde se dan los máximos y los mínimos, si es el caso.
4. Traza la gráfica ajustándose a la información obtenida indicando las coordenadas de algunos puntos, entre ellos los puntos singulares; y, si es posible, los puntos de corte con los ejes.

Ejemplo:
Representa la gráfica de la parábola $f(x)=-x^2+3x$, hallando sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y su vértice (máximo).
1. Corte con el eje *OY*: (0, 0).
Al eje *OX* lo corta en las soluciones de $-x^2+3x=0$, que son $x = 0$ y $x = 3$.
2 y **3**. Derivando e igualando a 0: $f'(x)=-2x+3=0 \Rightarrow x=3/2$.

- si $x < 3/2$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- si $x>3/2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- en $x=3/2$ se tendrá el máximo (el vértice).



4. Algunos puntos: (–1, –4); (0, 0); (3/2, 9/4), vértice; (3, 0); (4, –4).

Observación: La abscisa del vértice de la parábola $y=ax^2+bx+c$ se encuentra en la solución de $y'=2ax+b=0$, cuya solución es $x=-b/2a$, como ya sabías. (Ver Problema n. 3).

Ejercicio 1

Representa gráficamente de la función $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{5}{3}x+2$, determinando los cortes con los ejes, su crecimiento y decrecimiento; y sus máximos y mínimos.

Solución:

1. Corte con el eje *OY*: (0, 2).

Con *OX*: $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{5}{3}x+2=0 \Rightarrow -x^3-2x^2+5x+6=0 \Rightarrow -(x+3)(x+1)(x-2)=0$.

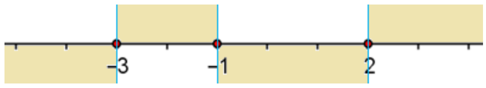
(Alguna de las soluciones, $x = -1, -3, 2$, debe obtenerse probando; después se factoriza).

Los puntos de corte son: (–3, 0); (–1, 0) y (0,2).

Puede verse que:

si $x \in (-\infty, -3)$, $f(x)>0$; si $x \in (-3, -1)$, $f(x)<0$;

si $x \in (-1, 2)$, $f(x)>0$; si $x \in (2, +\infty)$, $f(x)<0$.

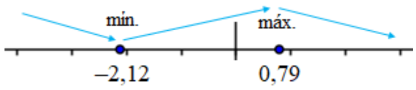


Esto permite determinar las regiones (dejadas en blanco) en donde hay curva.

2. Puntos singulares.

$$f'(x)=-x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x^2-4x+5=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{76}}{-6}\approx\begin{cases}-2,12\\ 0,79\end{cases}.$$



3. Intervalos de crecimiento y decrecimiento; máximos y mínimos.

- Si $x<-2,12$, (por ejemplo, $x = -3$), $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si $-2,12<x<0,79$, (por ejemplo, $x = 0$), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

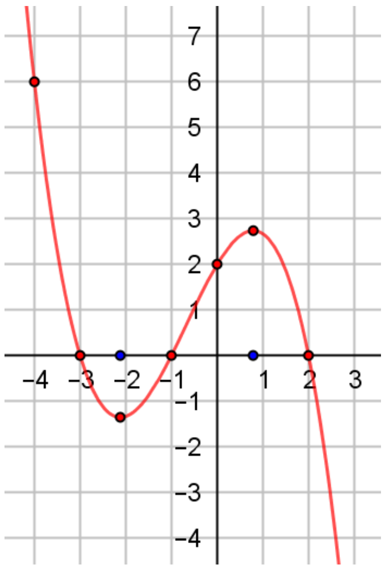
Por consiguiente, en $x = -2,12$ hay un mínimo.

- Si $x>0,79$, (por ejemplo, $x = 1$), $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente; además, en $x = 0,79$ hay un máximo.

4. Trazado de la curva.

Algunos puntos: (–4, 6); (–3, 0); (–2,12, –1,35), mín; (–1, 0); (2, 0); (0,79, 2.74), máx; (2, 0); (3, –8);…

Se obtiene la gráfica adjunta.



Ejercicio 2

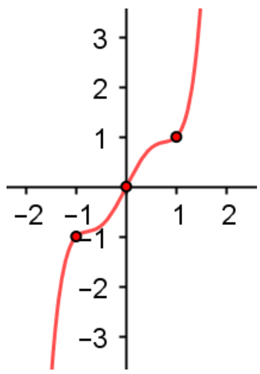
Comprueba que la función $f(x)=x^5-2x^3+2x$ siempre es creciente.

Solución:

Su derivada es $f'(x)=5x^4-6x^2+2$.

Como $f'(x)$ nunca se hace 0, pues: $5x^4-6x^2+2=0 \Rightarrow x^2=\dfrac{6\pm\sqrt{36-40}}{10}$, no tiene soluciones reales; y teniendo en cuenta que en $x = 0$, $f'(0)=2 \Rightarrow f'(x)>0$ para todo *x*.

Por tanto, la función siempre será creciente.



Además, puede deducirse que no tiene ni máximos ni mínimos y que solo corta una vez al eje *OX*.

3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES RACIONALES

Para representar una función racional, $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, además de lo anterior, hay que determinar su dominio y sus posibles asíntotas. Puede procederse como sigue:

1. Se determina su dominio.
Deben excluirse las soluciones de la ecuación $Q(x)=0$.

2. Se hallan sus asíntotas, si las hubiese.

- La recta $x = a$ es una asíntota vertical si a es solución de $Q(x)=0$ y, además, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\infty$.
- La recta $y = l$ es una asíntota horizontal cuando $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=l$. Hay asíntotas horizontales si el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador: $g\left(P(x)\right)\le g\left(Q(x)\right)$

Si $g\left(P(x)\right)<g\left(Q(x)\right)$, la asíntota es $y = 0$; si $g\left(P(x)\right)=g\left(Q(x)\right)$, la asíntota es $y=\dfrac{p}{q}$, siendo p y q los coeficientes principales de numerador y denominador, respectivamente.

- Si el $g\left(P(x)\right)=g\left(Q(x)\right)+1$, la función racional tiene una asíntota oblicua: la recta $y=mx+n$.

(El cálculo de asíntotas se hizo con detalle en el Tema 15. Ver Problemas n. 8, 9, 10, 11 y 12).

3. Se hallan los puntos de corte de la curva con los ejes de coordenadas.

4. Se calculan los puntos singulares: soluciones de $f´(x)=0$.
Marcar sobre el eje *OX* los puntos singulares y las soluciones de $Q(x)=0$. Esos puntos dividen al eje *OX* en varios intervalos.

5. Se determinan, estudiando el signo de $f´(x)$, los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

6. Por último, se traza la gráfica ajustándose a la información obtenida, indicando las asíntotas y los puntos significativos (cortes y puntos singulares).

Ejemplo:

Esbozo de la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, determinando su dominio y asíntotas, y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

→ La función está definida en todo **R**. Tiene una asíntota horizontal, pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{+\infty}=0^+$.
La asíntota es la recta $y = 0$, el eje *OX*; la curva va por encima del eje (siempre es positiva).

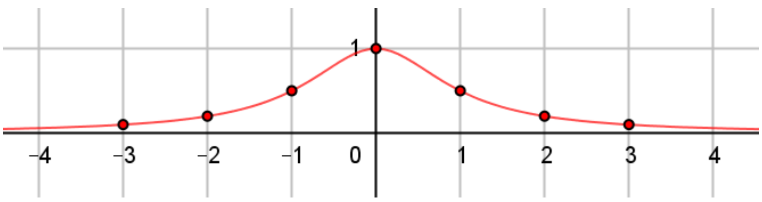
→ Para determinar el crecimiento y decrecimiento hay que estudiar el signo de su derivada.

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}\ \Rightarrow\ f´(x)=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\ \to\ f´(x)=0 \text{ en } x=0.$$

Luego:

- Si $x<0$, (por ejemplo, $x = -1$), $f´(x)>0\Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $x>0$, (por ejemplo, $x = 2$), $f´(x)<0\Rightarrow f(x)$ es decreciente; además, en $x = 0$ hay máximo.

→ Algunos puntos: (–3, 0,1); (–2, 0,2); (–1, 0,5); (0, 1), máx; (1, 0,5); (2, 0,2); (3, 0,1).



Ejercicio 3

Representa la función $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$ determinando su dominio, asíntotas, crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.

Solución:

1. Domino.

La función no está definida en x = 0: Dom (f) = **R** – {0}.

2. Asíntotas.

En x = 0 tiene una asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+1}{x^2}=\dfrac{1}{0}=\infty$.

Tanto a la izquierda como a la derecha de 0 la función tiende hacia +∞; luego, la curva se pega, por ambos lados, al semieje positivo OY.

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es 1 + el grado del denominador.

Su ecuación es la recta $y=mx+n$, siendo

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=n$, con m y $n\neq\infty$.

Esto es:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3+1}{x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2+\frac{1}{x^3}\right)=2\,;\ n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^3+1}{x^2}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0\,.$$

La asíntota es la recta $y=\underline{2x}$.

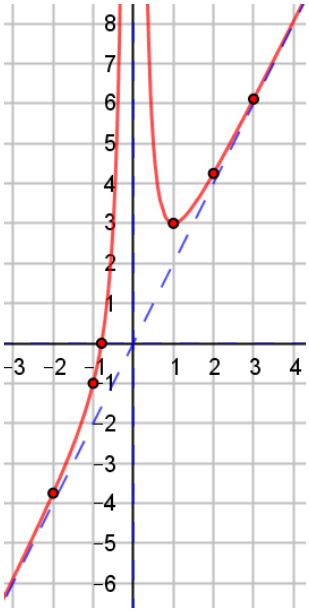
Como $f(x)=\underline{2x}+\dfrac{1}{x^2}$, al ser $\dfrac{1}{x^2}>0$, se deduce que el valor de la función siempre es mayor que el de la asíntota: la curva siempre va por encima de la recta.

3. Cortes con los ejes.

No corta al eje OY, pues la función no está definida en x = 0.

Para y = 0, $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{x^2}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^3+1=0\Rightarrow x=\sqrt[3]{-\dfrac{1}{2}}\approx -0{,}79$. Punto (–0,79, 0).



4. Puntos singulares.

$$f'(x)=\frac{6x^2\cdot x^2-\left(2x^3+1\right)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2x^3-2}{x^3}=0\ \Rightarrow\ x=1\,.$$

Hay que tener en cuenta también x = 0, punto en el que no está definida.

5. Crecimiento y decrecimiento.

- Si $x<0$, (por ejemplo, x = –1), $f\,'(x)>0\Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $0<x<1$, (por ejemplo, x = 0,5), $f\,'(x)<0\Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si $x>1$, (por ejemplo, x = 2), $f\,'(x)>0\Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Se deduce que en x = 1 la función tiene un mínimo.

6. Para trazar su gráfica se dibujan las asíntotas y se hallan algunos de sus puntos:

(–2, –15/4); (–1, –1); (–0,79, 0); (1, 3), mín; (2, 17/4); (3, 55/9); …

4. OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES (optativo)

Optimizar una función consiste en el encontrar su máximo o mínimo. Habitualmente este proceso está ligado a la búsqueda de la solución más rentable (máximo) o a la menos costosa (mínimo).

Estos problemas se formulan, generalmente, en forma de enunciado. Su resolución requiere determinar la función $f(x)$ que se desea hacer máxima o mínima.

- El punto óptimo de esa función, si existe, se encuentra en alguna de las soluciones de $f'(x)=0$.

Para determinar si se trata de un máximo o de un mínimo debe comprobarse el signo de la derivada a izquierda y derecha de la solución encontrada. (En Matemáticas II se completará este proceso).

- Cuando intervengan dos variables, *x* e *y*, (funciones de la forma $f(x, y)$), debe establecerse la relación entre ambas y sustituir en la fórmula de la función; después se deriva con respecto a la variable que quede.

Ejercicio 4

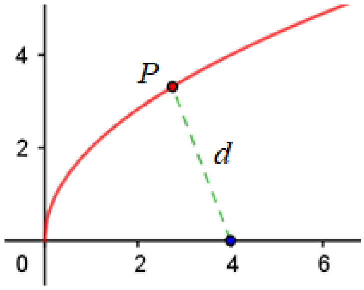
Halla el punto de la gráfica de la función $y=+2\sqrt{x}$ más cercano al punto (4, 0).

<u>Solución</u>:

La situación gráfica puede ser la adjunta.

Hay que encontrar el punto *P* tal que la distancia entre *P* y (4, 0) sea mínima.

Las coordenadas de *P* son $P=(x,\ y)=\left(x,\ 2\sqrt{x}\right)$.



Con esto, la distancia entre *P* y (4, 0) es $d(x)=\sqrt{(x-4)^2+\left(2\sqrt{x}\right)^2}$.

Operando: $d(x)=\sqrt{x^2-4x+16}$.

La distancia mínima, si existe, se dará en alguna solución de *d´* = 0.

Derivando e igualando a 0:

$$d'(x)=\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+16}}=0 \Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow x=2.$$

Como para *x* < 2, $d'(x)<0$ (la distancia disminuye), y para *x* > 2, $d'(x)>0$ (la distancia aumenta), se deduce que para *x* = 2 se da el mínimo buscado. Por tanto, el punto es $P=\left(2,\ 2\sqrt{2}\right)$.

Ejercicio 5

Una empresa de cerámica fabrica vajillas de diseño artístico. La fabricación de *x* vajillas de ese tipo le supone un coste total dado por la función $C(x)=150x+10000$. Cada vajilla se venderá a un precio unitario dado por la función $p(x)=400-x$. Suponiendo que todas las vajillas fabricadas se venden, ¿cuál es el número que hay que producir para obtener el beneficio máximo?

<u>Solución</u>:

El precio de cada vajilla, $p(x)=400-x$, depende del número, *x*, de vajillas vendidas. (Observa que, si *x* aumenta, el precio disminuye).

Los ingresos por la venta de *x* unidades son: $I(x)=p(x)\cdot x=(400-x)\cdot x=400x-x^2$.

Como los costes son $C(x)=150x+10000$, la función que da los beneficios es:

$$B(x)=I(x)-C(x)=400x-x^2-150x-10000 \Rightarrow B(x)=-x^2+250x-10000$$

El máximo de *B*, si existe, se dará en la solución de *B´* = 0:

$$B'(x)=-2x+250 \Rightarrow -2x+250=0 \text{ si } x=125.$$

Como: para *x* < 125, $B'(x)>0$ → el beneficio crece; y para *x* > 125, $B'(x)<0$ → el beneficio decrece, se deduce que para ese valor de *x* = 125 se da el máximo beneficio.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Para cada una de las siguientes funciones halla su derivada y, después, da respuesta a la pregunta que se hace:

a) $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+3$. Da un punto en el que la derivada valga 2.

b) $f(x)=\frac{2x}{x^2+4}$. ¿En qué puntos la derivada vale 0?

c) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$. ¿Para qué valores de x la derivada es negativa?

d) $f(x)=xe^{x^2-1}$. ¿Decrece en algún punto?

2. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=0,5x^2-3x+2$. Comprueba que tiene un mínimo en el vértice de la parábola. Haz un esbozo de su gráfica.

3. Aplicando derivadas comprueba que el vértice de la parábola $y=ax^2+bx+c$ se da en el punto de abscisa $x=-b/2a$.

4. Aplicando derivadas calcula los vértices de las parábolas:

a) $y=-x^2+4$; b) $y=\frac{1}{2}x^2-3x$; c) $y=-2x^2+5x+3$; d) $y=-\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+1$.

5. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x)=2x^3-6x$.

6. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=x^3+3x+1$. ¿Tiene la función algún máximo o mínimo? ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x^3+3x+1=0$?

7. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x)=3x^2-2x^3$. Da algunos de sus puntos, entre ellos los de corte de la gráfica con los ejes y haz un esbozo de su gráfica.

8. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$. Haz un esbozo de su gráfica.

9. Dada la función $f(x)=x^4-2x^2-1$, determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, y sus puntos máximos y mínimos relativos.

10. Haz un esbozo de la función $f(x)=\frac{2x}{x-3}$, determinando sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus asíntotas.

11. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$. ¿Tiene máximos o mínimos?

12. Representa gráficamente la función: $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-6}$. Para ello:

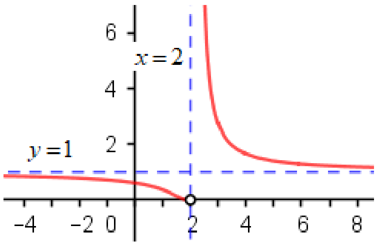
a) Determina el dominio y las asíntotas, si existen.

b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen.

13. Representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

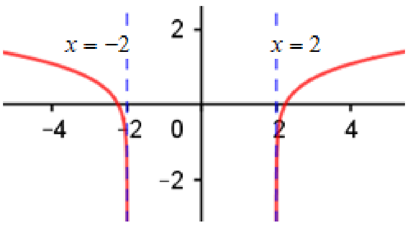
14. Comprueba que las funciones exponenciales del tipo $f(x)=a^{kx}$ cumplen:
son crecientes si $k>0$; son decreciente si $k<0$.
Verifícalo para los casos $f(x)=e^{0,2x}$ y $f(x)=2^{-x}$.

15. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=e^{-x^2}$. ¿Tiene algún extremo relativo?



16. La gráfica de la función $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$ es la adjunta. (En el Tema 15 se vio que las rectas $x=2$ e $y=1$ son asíntotas).
Comprueba que la función es decreciente en todo su dominio.

17. Comprueba que las funciones $f(x)=\log x$ y $g(x)=\ln x$ son crecientes en todo su dominio.



18. La gráfica de la función $f(x)=\log\left(x^2-4\right)$ es la adjunta.

Comprueba que su crecimiento y decrecimiento se ajusta a esta gráfica.

19. La suma de los cuadrados de dos números positivos x e y vale 128. Calcula dichos números para que su producto $x\cdot y$ sea máximo.
Nota: Si se decide retrasar el estudio de Optimización de funciones para el siguiente curso, todos estos problemas, del n. 19 hasta el final, podrían utilizarse en ese momento.

20. Una ventana con arco de medio punto tiene un perímetro de 5 metros. ¿Cuánto debe medir de ancha para que deje pasar el máximo de luz?

21. En un triángulo rectángulo contenido en el primer cuadrante, los vértices que determinan la hipotenusa están, uno en el origen de coordenadas y el otro sobre la parábola de ecuación $y=4-x^2$. Uno de sus catetos se apoya en el eje OX y el otro es paralelo al eje OY. Determina la longitud de sus lados si se desea que tenga área máxima. ¿Cuánto mide esa área?

22. Dada la parábola de ecuación $y=x^2+bx+c$, halla los valores de b y c para que su vértice sea el punto (2, 1).

23. El número de personas, en miles, afectadas por una enfermedad infecciosa viene dado por: $N(x)=\dfrac{15x}{x^2+25}$, siendo x el tiempo transcurrido en días desde que se inició el contagio.
a) Halla el día con el máximo número de enfermos y su número.
b) ¿Puede afirmarse que la enfermedad se irá extinguiendo con el transcurso del tiempo?

24. Sea $C(x)=180x+12000$ la función que da los costes (mensuales) de producción de un número x de patinetes eléctricos. La empresa vende todos los patinetes que fabrica; y sus ingresos mensuales vienen dados por la función $I(x)=500x-\dfrac{1}{2}x^2$.
a) Halla la función que da los beneficios de la empresa.
b) ¿En qué intervalo debe situarse la producción para no perder dinero?
c) ¿Cuántos patinetes tiene que producir mensualmente la empresa para obtener el máximo beneficio? En ese caso, ¿cuánto gana por cada patinete?

25. Los costes de fabricación de un tipo de ordenador vienen dados por la función $C(x)=x^2+40x+30000$, siendo x el número de ordenadores fabricados y vendidos.
Si cada ordenador se vende a un precio de 490 €, determina:
a) La función de beneficios.
b) ¿Cuántos ordenadores se deben vender para que los beneficios sean máximos? ¿A cuánto ascienden esos beneficios máximos?