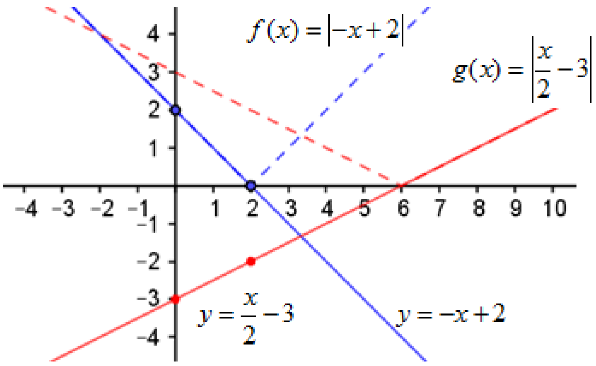
Solución de los Problemas Propuestos

1. Representa gráficamente las rectas de ecuación $y=-x+2$ e $y=\frac{x}{2}-3$.

A partir de ellas haz las gráficas de $f(x)=\left|-x+2\right|$ y $g(x)=\left|\frac{x}{2}-3\right|$.

Solución:
Una recta se representa dando dos de sus puntos.

- $y=-x+2$: puntos (0, 2) y (2, 0).
- $y=\frac{x}{2}-3$: puntos (0, –3) y (2, –2).

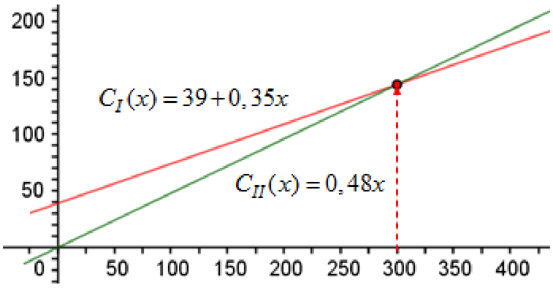


El valor absoluto convierte los valores negativos en positivos. Gráficamente hace la simetría de la semirrecta negativa respecto del eje *OX* ("voltea" la parte negativa hacia arriba).

2. Una empresa de alquiler de coches ofrece dos tipos de contrato:
(I) Pago de una cantidad fija de 39 € y un coste adicional de 0,35 € por km recorrido.
(II) 0,48 € por km recorrido.
a) Si la persona que alquila el coche estima que va a recorrer unos 250 km, ¿qué tipo de contrato le interesa? ¿Y si espera recorrer unos 500 km?
b) ¿Cuál es el número mínimo de km que hay que recorrer para que el contrato (I) sea el más barato? Justifica tu respuesta.
Solución:
a) Para 250 km:
Con el contrato de tipo (I): 39 + 0,35 · 250 = 126,5 €.
Con el contrato de tipo (II): 0,48 · 250 = 120 € → mejor.
Para 500 km:
Con el contrato de tipo (I): 39 + 0,35 · 500 = 214 € → mejor.
Con el contrato de tipo (II): 0,48 · 500 = 240 €.

b) Para *x* km:
Con el contrato de tipo (I): $C_I(x)=39+0,35x$.
Con el contrato de tipo (II): $C_{II}(x)=0,48x$.
Para que $C_I(x)<C_{II}(x)$ →

$$39+0,35x<0,48x\Rightarrow 39<0,13x\Rightarrow x>\frac{39}{0,13}=300.$$



Hay que recorrer más de 300 km.
Gráficamente puede verse que $C_I(x)<C_{II}(x)$ a partir de *x* = 300.

3. En la ciudad de Madrid, la Tarifa 2 del servicio de taxi (que se aplicará todos los días de 21 a 07 horas y sábados, domingos y festivos de 07 a 21 horas, para el año 2020) se especifica como sigue:
Inicio servicio: 3,15 euros. Precio kilométrico: 1,35 euros/km.
a) ¿Cuánto cuesta un trayecto de 8 km?
b) Halla la función que da el precio del trayecto dependiendo de los kilómetros recorridos?
Solución:
a) Costaría: 3,15 + 1,35 · 8 = 13,95 €.

b) Es una función lineal: $f(x)=3,15+1,35x$, siendo x el número de km recorridos.
Nota: La cantidad correspondiente al inicio de servicio se llama de "bajada de bandera".

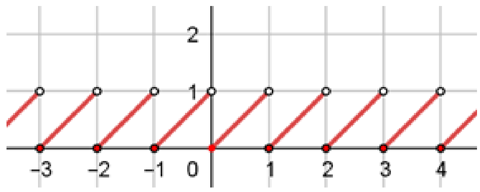
4. La función parte decimal de un número x se define como sigue: $Dec(x)=x-ENT\left[x\right]$.
Halla la parte decimal de –3,2, –3,89, 2, 2,3, 2,46. Con esos datos haz su representación gráfica.
Solución:

- Recuerda que $f(x) = ENT\left[x\right]$, es la función que asigna a cada número real x el número entero menor o igual que x, luego:

$$ENT\left[-3,2\right]=-4;\ ENT\left[-3,89\right]=-4;\ ENT\left[2\right]=ENT\left[2,3\right]=ENT\left[2,46\right]=2.$$

Por tanto:

$$Dec(-3,2)=-3,2-ENT\left[-3,2\right]=-3,2-(-4)=0,8;$$
$$Dec(-3,89)=-3,89-ENT\left[-3,89\right]=-3,89-(-4)=0,11;$$
$$Dec(2)=2-ENT\left[2\right]=2-2=0;$$
$$Dec(2,3)=2,3-ENT\left[2,3\right]=2,3-2=0,3;$$
$$Dec(2,46)=2,46-ENT\left[2,46\right]=2,46-2=0,46.$$



Su gráfica es la adjunta.

Observaciones:
1) El dominio de definición de esta función es **R**;
2) Su recorrido es el intervalo [0, 1);
3) Es una función periódica de período 1.

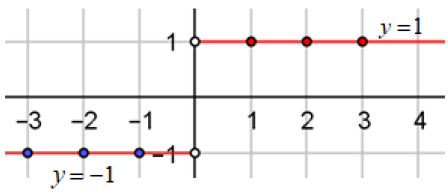
5. La función $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ se suele llamar función signo. Halla algunos de sus pares y represéntala gráficamente. Defínela a trozos.
Solución:

$$f(1)=\frac{1}{|1|}=\frac{1}{1}=1;\ f(2)=\frac{2}{|2|}=\frac{2}{2}=1;\ f(3,2)=\frac{3,2}{|3,2|}=1.$$

Para números positivos ($x > 0$): $f(x)=\dfrac{x}{|x|}=1$.

$$f(-1)=\frac{-1}{|-1|}=\frac{-1}{1}=-1;\ f(-2,3)=\frac{-2,3}{|-2,3|}=\frac{-2,3}{2,3}=-1;\ \ldots.$$

Para números negativos ($x < 0$): $f(x)=\dfrac{x}{|x|}=\dfrac{x}{-x}=-1$.



Por tanto:

$$f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}-1 & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}.$$

6. Estudia el comportamiento de la función $f(x)=2+\left(-1\right)^{ENT\left[x\right]}$ para los valores de $x\in[0, 6)$; después contesta:

a) ¿Cuál es su recorrido? b) Si es periódica indica su período.
c) Haz un esbozo de su gráfica. d) Defínela a trozos.

Solución:

Puede observarse que $(-1)^{ENT[x]} = \begin{cases} 1 & \text{si } ENT[x] = 2n \to \text{par} \\ -1 & \text{si } ENT[x] = 2n+1 \to \text{impar} \end{cases}$, siendo $n \in \mathbf{Z}$.

En el intervalo [0, 6):

$ENT[x]$ es par si $x \in [0, 1) \cup [2, 3) \cup [4, 5) \Rightarrow f(x) = 2 + (-1)^{ENT[x]} = 2 + 1 = 3$;

$ENT[x]$ es impar si $x \in [1, 2) \cup [3, 4) \cup [5, 6) \Rightarrow f(x) = 2 + (-1)^{ENT[x]} = 2 - 1 = 1$.

En particular, por ejemplo, para $x = 0,5$ y $x = 1,5$, se tiene:

$f(0,5) = 2 + (-1)^{ENT[0,5]} = 2 + (-1)^0 = 2 + 1 = 3$; $f(1,5) = 2 + (-1)^{ENT[1,5]} = 2 + (-1)^1 = 2 - 1 = 1$.

a) La función toma solo dos valores: 3, si $x \in [2n,\ 2n+1)$; 1, si $x \in [2n+1,\ 2n+2)$.

Su recorrido es $\mathrm{Im}(f) = \{1,\ 3\}$.

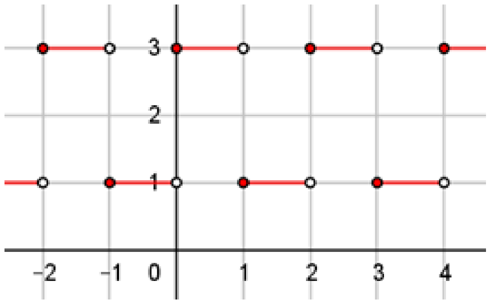
b) Es periódica de período $p = 2$. En efecto: $f(x+2) = 2 + (-1)^{ENT[x+2]} = f(x)$, pues si $ENT[x]$ es par, también lo es $ENT[x+2]$; y lo mismo pasa si $ENT[x]$ es impar.

c) Su gráfica es la adjunta.

Observa, por ejemplo, que:

$f(1,99) = 2 + (-1)^{ENT[1,99]} = 2 + (-1)^1 = 2 - 1 = 1$;

$f(2) = 2 + (-1)^{ENT[2]} = 2 + (-1)^2 = 2 + 1 = 3$:



d) $f(x) = 2 + (-1)^{ENT[x]} = \begin{cases} 3 & \text{si } x \in [2n,\ 2n+1) \\ 1 & \text{si } x \in [2n+1,\ 2n+2) \end{cases}$, $n \in \mathbf{Z}$.

7. Halla los puntos de corte de las funciones cuadráticas con los ejes de coordenadas:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; b) $f(x) = -x^2 + 4x$; c) $f(x) = 0,5x^2 + 1$; d) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.

Indica también las coordenadas de su vértice y la ecuación de su eje de simetría.

Solución:

Los puntos de corte con el eje *OY* se obtienen haciendo $x = 0$; los de corte con el eje *OX* son las soluciones de $f(x) = 0$.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Si $x = 0$, $f(0) = -3$: punto (0, –3).

Soluciones de $x^2 + 2x - 3 = 0 \to x = -3$, $x = 1$. Puntos (–3, 0) y (1, 0).

El eje de simetría pasa por el punto medio de –3 y 1, que es $x = -1$. Esa es la ecuación del eje de simetría y la abscisa del vértice, que será el punto $V = (-1, -4)$.

Observa que $f(x) = x^2 + 2x - 3 = (x+3)\cdot(x-1)$.

b) $f(x) = -x^2 + 4x$.

Si $x = 0$, $f(0) = 0$: punto (0, 0).

Soluciones de $-x^2 + 4x = -x(x-4) = 0 \to x = 0$, $x = 4$. Puntos (0, 0) y (4, 0).

El eje de simetría pasa por el punto medio de 0 y 4, que es $x = 2$. Esa es la ecuación del eje de simetría y la abscisa del vértice, que será el punto $V = (2, 4)$.

c) $f(x)=0,5x^2+1$.
Si $x = 0$, $f(0)=1$: punto (0, 1).

La ecuación $0,5x^2+1=0$ no tiene soluciones reales. La gráfica no corta ala eje OX.

El eje de simetría pasa por la abscisa del vértice, que es $x_V=-\dfrac{0}{2\cdot 0,5}=0$: Vértice (0, 1); el eje de simetría de la parábola es el eje OY, recta $x = 0$.

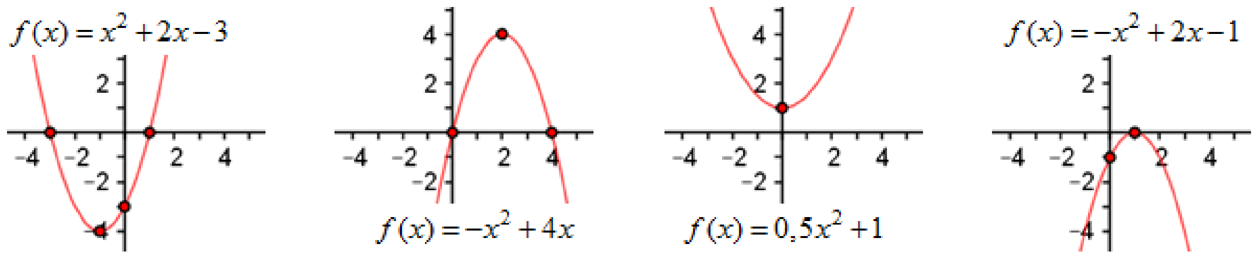
Nota: Las parábolas del tipo $f(x)=ax^2+c$ son simétricas respecto del eje OY.

d) $f(x)=-x^2+2x-1$.
Si $x = 0$, $f(0)=-1$: punto (0, –1).

Soluciones de $-x^2+2x-1=0$ $\to x = 1$, doble. Solo corta en el punto (1, 0).
El punto (1, 0) es vértice; y el eje de simetría, la recta $x = 1$.

Observa que $f(x)=-x^2+2x-1=-(x-1)^2$.

Sus gráficas son las siguientes.



8. Halla la función cuadrática que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (0, 6), (–1, 0) y (3, 0).
Solución:
Como corta al eje OX en los puntos (–1, 0) y (3, 0) $\Rightarrow$ –1 y 3 son las soluciones de la ecuación de segundo grado asociada a la función cuadrática. Por tanto, $f(x)=a(x+1)(x-3)$.

Como corta al eje OY en el punto (0, 6) $\Rightarrow$ $f(0)=6$ $\to$ $f(0)=a(0+1)(0-3)=-3a=6$ $\to$ $a = -2$.

Luego, $f(x)=-2(x+1)(x-3)$ $\Rightarrow$ $f(x)=-2x^2+4x+6$.

9. De una función cuadrática se conocen los puntos (1, 7), (2, 9) y (4, 1), ¿qué valor le corresponderá a $x = 3$?
Solución:
La función cuadrática es $f(x)=ax^2+bx+c$.

Por pasar por el punto (1, 7) $\Rightarrow$ $7=a+b+c$.
Por pasar por el punto (2, 9) $\Rightarrow$ $9=4a+2b+c$.
Por pasar por el punto (4, 10) $\Rightarrow$ $10=16a+4b+c$.

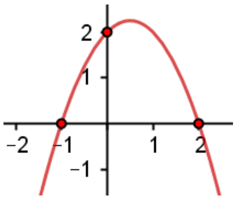
El sistema $\begin{cases} 7=a+b+c \\ 9=4a+2b+c \\ 10=16a+4b+c \end{cases}$ puede resolverse por Gauss.

$$\begin{array}{l} E2-E1 \\ E3-E1 \end{array}\begin{cases} 7=a+b+c \\ 2=3a+b \\ 3=15a+3b \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ E3-3E2 \end{array}\begin{cases} 7=a+b+c \\ 2=3a+b \\ -3=6a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{2}+c \to c=4 \\ 2=-\dfrac{3}{2}+b \to b=\dfrac{7}{2} \\ a=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto, $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x+4$.

Luego, para $x = 3$, $f(3)=-\frac{1}{2}\cdot 9+\frac{7}{2}\cdot 3+4=10 \Rightarrow d = 10$.

10. La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)=ax^2+bx+c$, donde a, b, $c \in \mathbf{R}$.
Halla los valores de a, b y c. Indica también las coordenadas del vértice de la parábola.



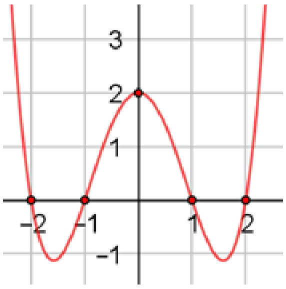
Solución:
Es como el problema anterior, siendo los puntos de corte con los ejes (–1, 0), (2, 0) y (0,2).
Por tanto, $f(x)=a(x+1)(x-2)$, con $f(0)=2$.
Como $f(0)=a(0+1)(0-2)=-2a=2 \Rightarrow a=-1$.
Luego, $f(x)=-(x+1)(x-2) \Rightarrow f(x)=-x^2+x+2 \to a = -1; b = 1; c = 2$.
Vértice: abscisa, $x_V=-\frac{b}{2\cdot a}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$; ordenada, $f(1/2)=-(1/2)^2+1/2+2=9/4$.
El vértice es el punto $V = (1/2, 9/4)$.

11. a) Dada $f(x)=ax^3+bx^2-9x$, encuentra los valores de a y b sabiendo que $f(1)=f(-1)=0$.
b) Halla una función polinómica de cuarto grado que corte al eje OX en los puntos (–2, 0), (–1, 0), (1, 0) y (2, 0); y al eje OY, en el punto (0, 2).
Solución:
a) Si $f(1)=f(-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} f(1)=0 \to a+b-9=0 \\ f(-1)=0 \to -a+b+9=0 \end{cases} \Rightarrow a = 9; b = 0$.
La función es $f(x)=9x^3-9x$.

b) Las abscisas de los puntos de corte de una función $f(x)$ con el eje OX son las raíces (soluciones) de la ecuación $f(x)=0$.
Como se trata de una función polinómica de 4º grado, con raíces $x = -2, -1, 1$ y 2, su expresión será:

$$f(x)=a(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)=a\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right).$$

Si corta al eje OY en el punto (0, 2), entonces $f(0)=2$; como
$f(0)=a(-4)(-1)=4a$, se tendrá que $2=4a \Rightarrow a=\frac{1}{2}$.
La función pedida es $f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right)=\frac{1}{2}\left(x^4-5x^2+4\right)$.
Su gráfica (que no se pide) es la adjunta.



12. Dada la función $f(x)=x^3+bx^2-4x+4$:

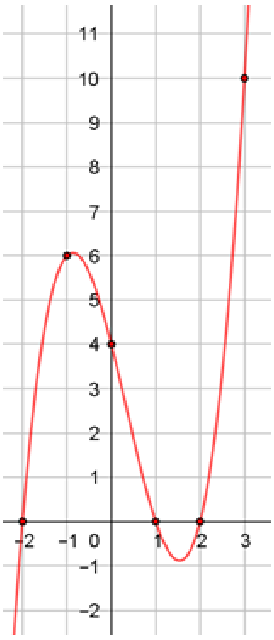
a) Halla el valor de b sabiendo que corta al eje OX en $x=-2$.

b) Supuesto que $b=-1$, indica los demás puntos de corte con los ejes. Da algunos valores más y esboza su gráfica.

<u>Solución</u>:

a) Si corta al eje OX cuando $x=-2 \Rightarrow f(-2)=0$.

Como $f(-2)=(-2)^3+b\cdot(-2)^2-4\cdot(-2)+4=0 \Rightarrow 4b+4=0 \Rightarrow b=-1$.



b) Si $f(x)=x^3-x^2-4x+4$, entonces un factor del polinomio asociado es $x+2$.

Dividiendo por el factor $x+2 \Rightarrow f(x)=(x+2)\left(x^2-3x+2\right)$.

Los otros puntos de corte son las raíces de la ecuación $x^2-3x+2=0$, se son $x=1$ y $x=2$.

Con esto se tienen tres puntos de la gráfica de $f(x)=x^3-x^2-4x+4$:

(–2, 0); (1, 0) y (2, 0).

Otros puntos son:

(0, 4), corte con el eje OY; (–1, 6); (3, 10).

Su gráfica es la adjunta.

13. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones; indica en cada caso los puntos de corte de cada gráfica con los ejes de coordenadas. En todos los casos, calcula el valor de la función para $x=-1$, 2 y 3, si se puede.

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$; b) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}$; c) $f(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+3x}$; d) $f(x)=\dfrac{4}{x^2+1}$.

<u>Solución</u>:

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$ → Dom(f) = **R** – {3}. (El denominador no puede tomar el valor 0).

Cortes con los ejes: si $x=0$, $y=0$ → punto (0, 0); si $y=0$, $x=0$ → mismo punto.

$$f(-1)=\frac{-2}{-4}=0{,}5;\ f(2)=\frac{4}{-1}=-4;\ f(3)=\frac{6}{0}\to ?\text{, no está definida.}$$

b) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}$ → Dom(f) = **R** – {2}.

Cortes con los ejes: si $x=0$, $y=-1/2$ → punto (0, –1/2); si $y=0$, $1-3x=0 \Rightarrow x=1/3$ → punto (1/3, 0).

$$f(-1)=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3};\ f(2)=\frac{-5}{0}\to ?\text{, no definida;}\ f(3)=\frac{-8}{1}=-8.$$

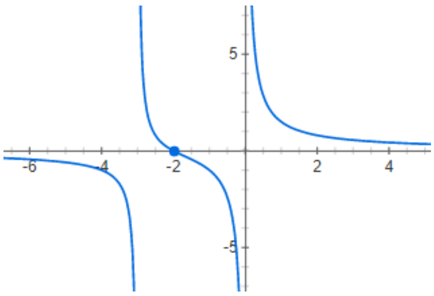
c) $f(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+3x}$ → Dom(f) = **R** – {–3, 0}. El denominador se anula cuando:

$x^3+3x=0 \Leftrightarrow x(x+3)=0$, en $x=-3$ y $x=0$.

Cortes con los ejes: si $x=0$, no está definida → no corta al eje OY; si $y=0$, $2x+4=0 \Rightarrow x=-2$ → punto (–2, 0).

$$f(-1)=\frac{2}{-2}=-1;\ f(2)=\frac{8}{10}=0{,}8;\ f(3)=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}.$$

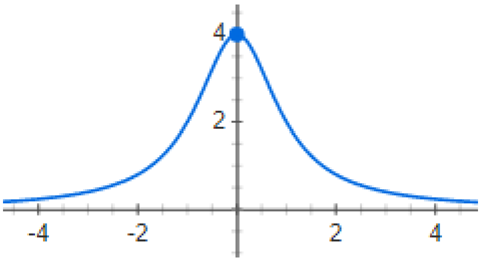
Su gráfica (dibujada con Google) es la adjunta.



d) $f(x)=\dfrac{4}{x^2+1}$ → Dom(*f*) = **R**. El denominador no se anula en ningún punto.
Cortes con los ejes: si $x = 0$, $y = 4$, punto (0, 4); no corta al eje *OX*, la *y* nunca toma el valor 0.

$$f(-1)=\frac{4}{2}=2;\ f(2)=\frac{4}{5};\ f(3)=\frac{4}{10}.$$

Su gráfica es la adjunta.



14. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

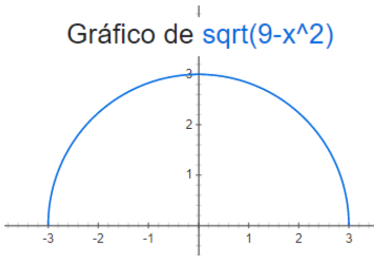
a) $f(x)=\sqrt[3]{x-5}$; b) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$; c) $f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$; d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-6}{x}}$.

En todos los casos, calcula el valor de la función para $x = -3$, 0 y 5, si se puede.
<u>Solución</u>:
a) $f(x)=\sqrt[3]{x-5}$ → La raíz cúbica puede hacerse para cualquier número real. Dom(*f*) = **R**.

$$f(-)=\sqrt[3]{-8}=-2;\ f(0)=\sqrt[3]{-5}\approx -1{,}71;\ f(5)=\sqrt[3]{0}=0.$$

b) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ → Esta raíz cuadrada está definida siempre que $9-x^2\ge 0 \Rightarrow -3\le x\le 3$. Dom(*f*) = [–3, 3].
Observa que $y=\sqrt{9-x^2}\Rightarrow y^2=9-x^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=9$.
La gráfica de la función es la parte positiva de la circunferencia con centro en (0, 0) y radio 3.

$$f(-3)=\sqrt{0}=0;\ f(0)=\sqrt{9}=3;\ f(5)=\sqrt{-16}\text{, no definida.}$$



c) $f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$ → La función está definida siempre que $4x^2-x^4\ge 0$.
Como $4x^2-x^4=x^2\cdot\left(4-x^2\right)=x^2\cdot(2-x)\cdot(2+x)$ ⇒ el dominio de definición viene dado por los puntos del intervalo [–2, 2].

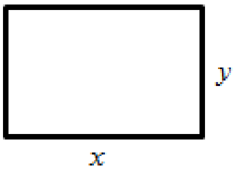
$$f(-3)=\sqrt{36-81}\text{, no definida; } f(0)=\sqrt{0}=0;\ f(5)\text{ tampoco está definida.}$$

d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-6}{x}}$ → hay que asegurar que $\dfrac{3x-6}{x}$ está definida es mayor o igual que 0.
No está definida si $x = 0$.
Mayor o igual que 0: $\dfrac{3x-6}{x}\ge 0 \Rightarrow x<0$ o $x\ge 2$.
Recuerda que una fracción es positiva si sus términos tienen el mismo signo.

$$\text{Ambos negativos:}\left\{\frac{3x-6}{x}\to\begin{array}{c}3x-6<0\to x<2\\ x<0\to x<0\end{array}\right.\Rightarrow x<0;$$

$$\text{Ambos positivos:}\left\{\frac{3x-6}{x}\to\begin{array}{c}3x-6>0\to x>2\\ x>0<0\to x>0\end{array}\right.\Rightarrow x>2.$$

15. Un granjero tiene 1200 metros de malla para cercar un terreno rectangular.
a) Si un lado del rectángulo mide *x* metros, ¿cuánto medirá el otro lado? ¿Cuál será el área de ese rectángulo en función de *x*?
b) Indica las dimensiones de ese rectángulo cuando *x* es igual a 100, 200 y 300 metros; comprueba que la fórmula anterior es correcta.
c) ¿Para qué valor de *x* el área del rectángulo será máxima?
Solución:
a) Los 1200 metros de malla determinan el perímetro del rectángulo, que vale $2x+2y$.
Por tanto:



$$2x+2y=1200 \Rightarrow x+y=600 \Rightarrow y=600-x.$$

El área del rectángulo valdrá,

$$A=x\cdot y=x\cdot(600-x) \Rightarrow A(x)=-x^2+600x.$$

b) Si $x = 100$, $y = 500$; $A = 100 \cdot 500 = 50000 \to A(100)=-100^2+600\cdot 100=50000$ m^2.
Si $x = 200$, $y = 400$; $A = 200 \cdot 400 = 80000 \to A(200)=-200^2+600\cdot 200=80000$ m^2.
Si $x = 300$, $y = 300$; $A = 300 \cdot 300 = 90000 \to A(300)=-300^2+600\cdot 300=90000$ m^2.

c) La función que da el área es cuadrática, $A(x)=-x^2+600x$, con coeficiente $a = -1 \Rightarrow$ se trata de una parábola cóncava, con máximo en su vértice.
La abscisa del vértice es $x_V=-\dfrac{600}{2\cdot(-1)}=300$. Para ese valor: $y = 300$; $A = 90000$ m^2.

16. El rendimiento intelectual, en tanto por ciento, de un estudiante, depende de los minutos que lleva estudiando. Si la función que da su rendimiento es: $R(t)=\dfrac{-1}{30}t^2+2t+70$, *t* en minutos.
a) ¿Cuál es su rendimiento al comenzar a estudiar?
b) ¿En qué momento su rendimiento es mayor? ¿Cuál es ese rendimiento?
c) Si decide descansar cuando su rendimiento está por debajo del 70 %, ¿en qué minuto debe hacerlo?
Solución:
a) Al comenzar a estudiar, $t = 0$, luego: $R(0)=70$ %.

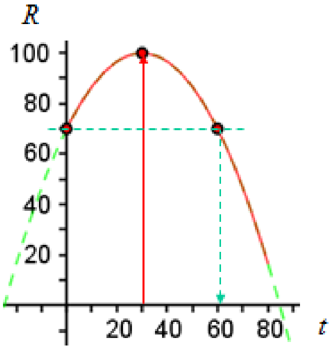
b) La función que da el rendimiento es cuadrática; su gráfica es una parábola cóncava ($\cap$), alcanzando su valor máximo en el vértice.
La abscisa del vértice es: $x_V=-\dfrac{2}{2\cdot(-1/30)}=30$; $R(30)=\dfrac{-1}{30}\cdot 30^2+2\cdot 30+70=100$.
El máximo rendimiento, que es del 100 %, lo consigue a los 30 minutos de estudio.

c) Su rendimiento es del 70 % en la solución de $R(t)=70$.

$$\frac{-1}{30}t^2+2t+70=70 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{30}t^2+2t=0 \Rightarrow -t^2+60t=0 \Rightarrow -t(t-60)=0 \Rightarrow t = 60.$$

Debe descansar cuando lleve una hora de estudio seguida.
→ La gráfica de $R(t)$, que no se pide, es la adjunta.



17. Durante los 11 años de funcionamiento de una empresa, sus beneficios (en millones de euros) se ajustaron a la función $B(t) = -0,3t^2 + 3,3t - 1$, siendo $t \in [0, 11]$ es el tiempo transcurrido en años desde el momento inicial.
a) Determina en qué momento del tiempo los beneficios fueron de 2 millones de euros.
b) ¿En qué momento los beneficios fueron máximos?
c) ¿En qué periodo de tiempo la empresa tuvo ganancias?
Solución:
a) Los beneficios fueron de 2 millones de euros en las soluciones de $B(t) = -0,3t^2 + 3,3t - 1 = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -0,3t^2 + 3,3t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{-3,3 \pm \sqrt{3,3^2 - 4\cdot(-0,3)\cdot(-3)}}{2\cdot(-0,3)} = \frac{-3,3 \pm 2,7}{-0,6} = \begin{cases} 1 \\ 10 \end{cases}.$$

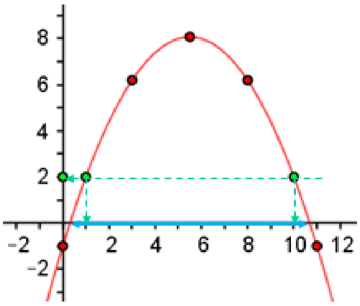
b) Como la función es una parábola cóncava ($\cap$), su máximo se da en el vértice de dicha parábola, que se da cuando $x_V = -\frac{3,3}{2\cdot 0,3} = 5,5 \to$ punto (5,5, 8,075).

c) La empresa tiene ganancias cuando $B(t) = -0,3t^2 + 3,3t - 1 > 0$.
Resolviendo $-0,3t^2 + 3,3t - 1 = 0 \Rightarrow$

$$t = \frac{-3,3 \pm \sqrt{3,3^2 - 4\cdot(-0,3)\cdot(-1)}}{2\cdot(-0,3)} = \approx \frac{-3,3 \pm 3,11}{-0,6} \approx \begin{cases} 0,32 \\ 10,67 \end{cases}.$$

Tiene ganancias cuando $0,32 < t < 10,67$.

Si se hace la representación gráfica de la función se confirma lo dicho más arriba.



18. Los ingresos y los costes, en euros, de una empresa vienen dados por las funciones $I(x) = 50000x - 4000x^2$ y $C(x) = 100000 + 5000x$, donde x son miles de unidades producidas y vendidas; esto es, $x = 1$, significa 1000 unidades.
Halla:
a) Los puntos de equilibrio: en donde la empresa ni gana ni pierde.
b) La función que da el beneficio y los valores de producción en los que ese beneficio es positivo.
Solución:
a) En ese punto $I(x) = C(x) \Rightarrow 50000x - 4000x^2 = 100000 + 5000x \Rightarrow$

$$4000x^2 - 45000x + 100000 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 45x + 100 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{45 \pm \sqrt{(-45)^2 - 4\cdot 4\cdot 100}}{2\cdot 4} \approx \frac{45 \pm 20,6}{8} = \begin{cases} 3,05 \\ 8,2 \end{cases}.$$

La empresa ni gana ni pierde cuando $x = 3,05$ o $x = 8,2$: cuando se fabrican 3050 u 8200 unidades.

b) El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los gastos: $B(x) = I(x) - C(x)$.

$$B(x) = 50000x - 4000x^2 - (100000 + 5000x) = -4000x^2 + 45000x - 100000.$$

Los beneficios son positivos si $-4000x^2 + 45000x - 100000 > 0$.
Por el apartado anterior: $3,05 < x < 8,2$; cuando se fabrican y venden entre 3050 y 8200 unidades de producto.

19. Si los costes de una empresa vienen determinados por la función $f(x) = x^2 - 6x + 40$, donde x representa la cantidad producida de un determinado artículo, con $x \geq 0$ y $f(x)$ en euros.

a) ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo? Si el coste fuese 80 €, ¿cuántas serían las unidades producidas?

b) ¿Disminuye el coste alguna vez? ¿Cuál es el coste mínimo por artículo? ¿Cuántos artículos se producen a ese coste mínimo?

c) Representa la función y justifica nuevamente las respuestas anteriores a partir de la gráfica.

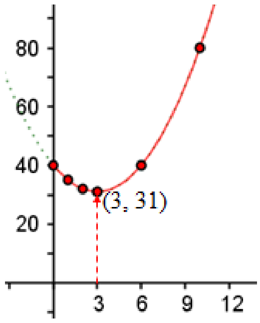
Solución:

a) Si no se produce nada de ese artículo, para x = 0, el coste sería: $f(0) = 40$.

Si el coste fuese 80 €: $f(x) = 80 \Rightarrow x^2 - 6x + 40 = 80 \Rightarrow x^2 - 6x - 40 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot(-40)}}{2} = \frac{6 \pm 14}{2} = \begin{cases} 10 \\ -4 \end{cases}.$$

Deben producirse 10 unidades de ese artículo. (La solución negativa no tiene sentido económico).



b) Como el coeficiente a de la parábola es 1, su gráfica es convexa ($\cup$) $\Rightarrow$ el mínimo se da en el vértice, $x_V = -\frac{-6}{2\cdot 1} = 3$, que indica que los costes son mínimos si se producen 3 artículos. Ese coste mínimo será $f(3) = 3^2 - 6\cdot 3 + 40 = 31$ €.

A la izquierda de x = 3, intervalo [0, 3), la función decrece: el coste disminuye.

c) La gráfica puede trazarse calculado algunos pares de valores:

(0, 40); (1, 35); (2, 32); (3, 31), mínimo; (6, 40); (10, 80).

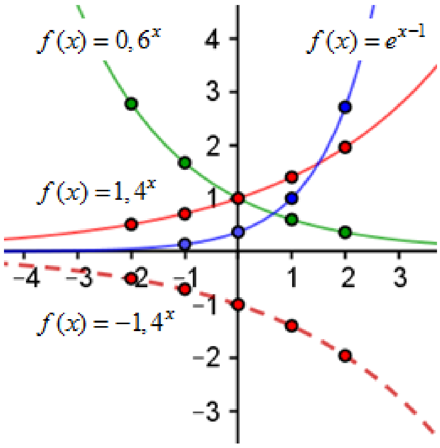
Efectivamente, la función decrece en el intervalo (0, 3); crece en el intervalo (3, +∞); tiene el mínimo cuando x = 3.

20. Representa gráficamente, dando valores a x para hallar algunos de sus puntos, las funciones:

a) $f(x) = 1{,}4^x$; b) $f(x) = 0{,}6^x$; c) $f(x) = -\left(1{,}4^x\right)$; d) $f(x) = e^{x-1}$.

Represéntalas también utilizando Google (o cualquier programa informático disponible).

Solución:



a) $f(x) = 1{,}4^x$.

Puntos: (0, 1); (1, 1,4); (2, 1,96); (–1, 0,71); (–2, 0,51).

b) $f(x) = 0{,}6^x$.

Puntos: (0, 1); (1, 0,6); (2, 0,36); (–1, 1,67); (–2, 2,78).

c) $f(x) = -\left(1{,}4^x\right)$.

Puntos: (0, –1); (1, –1,4); (2, –1,96); (–1, –0,71); (–2, –0,51).

Compárala con $f(x) = 1{,}4^x$. (Verás que es la opuesta).

d) $f(x) = e^{x-1}$.

Puntos: (0, 0,37); (1, 1); (2, e) = (2, 2,71); (–1, 0,14); (–2, 0,05).

21. A partir de la gráfica de $f(x)=e^x$ representa las funciones:

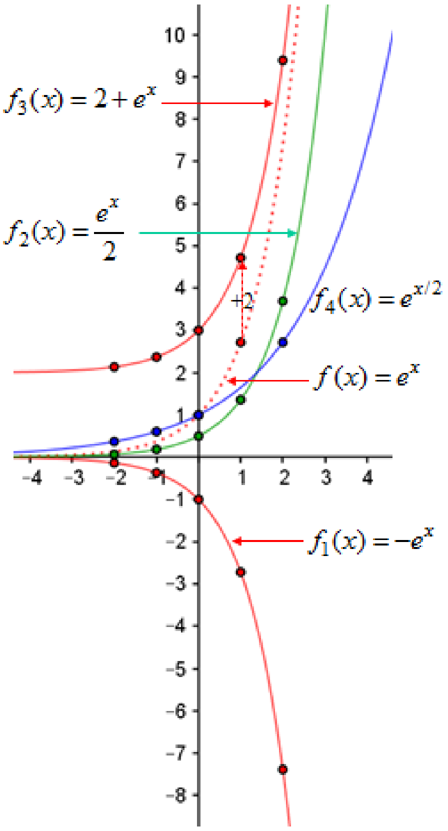
a) $f_1(x)=-e^x$; b) $f_2(x)=\dfrac{e^x}{2}$; c) $f_3(x)=2+e^x$; d) $f_4(x)=e^{x/2}$.

Comprueba tus resultados utilizando algún programa informático.

Solución:

Todas pueden representarse a partir de la función $f(x)=e^x$, que pasa por los puntos:

(0, 1), (1, e) ≡ (1, 2,72); (2, e^2) ≡ (2, 7,39);
(–1, 1/e) ≡ (1, 0,37); (–2, 1/e^2) ≡ (–2, 0,14).



a) $f_1(x)=-e^x$ se obtiene cambiando el signo de la segunda coordenada, de la *y*: es la función opuesta de $f(x)=e^x$.
Algunos puntos son: (0, –1), (1, –2,72); (2, –7,39); (–1, –0,37).

b) $f_2(x)=\dfrac{e^x}{2}$ se obtiene dividiendo por 2 la ordenada, la *y*.
(0, 1/2), (1, e/2); (2, e^2/2); /1, 0,37/2); (–2, 0,14/2).

c) $f_3(x)=2+e^x$ se obtiene sumando 2 a cada ordenada: la gráfica de $f(x)=e^x$ se desplaza 2 unidades hacia arriba.
Algunos puntos:
(0, 3), (1, 4,72); (2, 9,39); (–1, 2,37).

d) $f_4(x)=e^{x/2}$ se obtiene dilatando la gráfica de $f(x)=e^x$ (a razón de 2 a 1): $f_4(2x)=f(x)=e^x$.
Algunos puntos son:
(0, 1), (2, e) ≡ (2, 2,72); (–2, 1/e) ≡ (1, 0,37).

22. Determina el dominio de definición de las funciones:

a) $f(x)=2^{5-x}$; b) $f(x)=e^{\frac{1}{x+2}}$; c) $f(x)=e^{\frac{1}{x^2+1}}$; d) $f(x)=3^{\frac{x}{x-1}}$.

Solución:

Las funciones exponenciales están definidas siempre que lo esté el exponente.

a) Dom (f) = **R** → el exponente, 5 – x está definido siempre.

b) Dom (f) = **R** – {–2} → el exponente, $\dfrac{1}{x+2}$, no está definido cuando x = –2.

c) Dom (f) = **R** → el exponente, $\dfrac{1}{x^2+1}$, está definido siempre.

d) Dom (f) = **R** – {1} → el exponente, $\dfrac{x}{x-1}$, no está definido cuando x = 1.

23. Halla el dominio de definición de las funciones:

a) $f(x)=\log(6-2x)$; b) $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$; c) $f(x)=x\ln x$; d) $f(x)=\log(x-1)^2$

<u>Solución</u>:

Las funciones logarítmicas del tipo $f(x)=\log(E(x))$ están definidas solo para valores de x que hacen que $E(x)>0$.

a) $f(x)=\log(6-2x)$ está definida cuando $6-2x>0 \Rightarrow 6>2x \Rightarrow x<3$. Dom($f$) = (–∞, 3).

b) $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$ está definida para todo x, pues x^2+1 siempre es positivo. Dom(f) = **R**.

c) $f(x)=x\ln x$ está definida para todo $x > 0$. Dom(f) = $\mathbf{R}^+$.

d) $f(x)=\log(x-1)^2$ está definida para todo $x \neq 1$, pues $(x-1)^2>0$ si $x \neq 1$. Dom(f) = **R** – {1}.

<u>Observación</u>:

Al representar la función $f(x)=\log(x-1)^2$ puedes comprobar que el ordenador dibuja la función $f(x)=2\log(x-1)$, pues aplica la propiedad $\log A^n = n\log A$. Restringe así el dominio de definición de la función: con el cuadrado es **R** – {1}; sin el cuadrado es $x > 1$.

Si se quiere representar $f(x)=\log(x-1)^2$, sin pasar el 2 delante del logaritmo, hay que escribir $f(x)=\log\left((x-1)^2\right)$ → log((x–1)^2).

Gráfico de log(x-1)^2

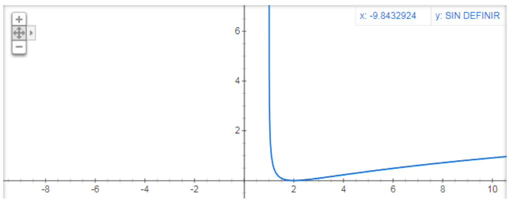
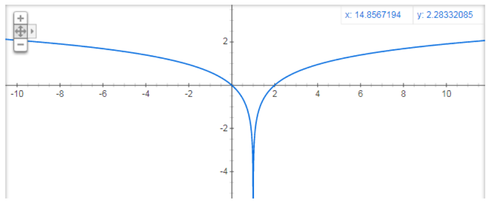


Gráfico de log((x-1)^2)

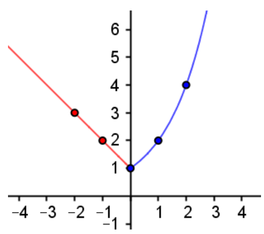


24. Representa gráficamente, dando valores, las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{si } x<0 \\ 2^x, & \text{si } x\geq 0\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{si } x<1 \\ \ln x, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases}2^{x-2}, & \text{si } x\leq 2 \\ x-2, & \text{si } x>2\end{cases}$.

<u>Solución</u>:

a) A la izquierda de x = 0 la función es una recta; para $x \geq 0$ es una exponencial.

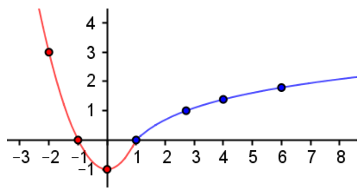


Algunos puntos son:

$x < 0$: (–2, 3); (0, 1);

$x \geq 0$: (0, 1); (1, 2); (2, 4).

b) A la izquierda de x = 1 la función es una parábola; para $x \geq 1$ es un logaritmo.

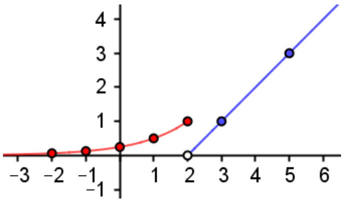


Algunos puntos son:

$x < 1$: (–2, 3); (–1, 0); (0, –1); (1^-, 0)

$x \geq 1$: (1, 0); (e, 1) (4, 1,39); (6, 1,79).

c) Para $x \le 2$ la función es una exponencial recta; para $x > 2$ es una recta.
Algunos puntos son:
$x \le 2$: (–2, 1/16); (–1, 1/8); (0, 1/4); (1, 1/2); (2, 1);
$x > 2$: (2^+, 0); (3, 2); (5, 3).
Puede observarse que no es continua en $x = 2$.



25. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^{2x-1} = 243$; b) $2^x = 5$; c) $\dfrac{3^{2x}}{9} = 729$; d) $3{\cdot}5^{2x} = 225$.

e) $xe^x = 0$; f) $x\left(e^{x-2} - 1\right) = 0$; g) $(x+1)\left(e^x - 3\right) = 0$; h) $x^2e^x - 2xe^x = 0$.

Solución:

a) Basta con descomponer 243 en factores primos: $243 = 3^5$.

$3^{2x-1} = 243 \Rightarrow 3^{2x-1} = 3^5 \Rightarrow 2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3$.

b) Hay que aplicar logaritmos.

$$2^x = 5 \Rightarrow \log 2^x = \log 5 \Rightarrow x\log 2 = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 2}{\log 5} \approx 2{,}3219.$$

c) Operando y aplicando logaritmos:

$$\frac{3^{2x}}{9} = 729 \Rightarrow 3^{2x} = 9{\cdot}729 \Rightarrow 3^{2x} = 6561 \Rightarrow \log\left(3^{2x}\right) = \log 6561 \Rightarrow \frac{x}{2}\log 3 = \log 6561 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 6561}{2{\cdot}\log 3} \Rightarrow x = 4.$$

También podría verse que $3^{2x-2} = 729 = 3^6 \Rightarrow 2x - 2 = 6 \Rightarrow x = 4$.

d) $3{\cdot}5^{2x} = 225 \Rightarrow 5^{2x} = \dfrac{225}{3} \Rightarrow 5^{2x} = 75$. Aplicando logaritmos: $\log\left(5^{2x}\right) = \log 75 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x\log 5 = \log 75 \Rightarrow x = \frac{\log 75}{2\log 5} = 1{,}3413...$$

Observación: Un error fatal al resolver $3{\cdot}5^{2x} = 225$ es deducir: $\underline{3{\cdot}5}^{2x} = 225 \Rightarrow \underline{15}^{2x} = 225$.

e) $xe^x = 0 \Rightarrow x = 0$; el factor e^x nunca se anula.

$$\text{f) } x\left(e^{x-2} - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{x-2} - 1 = 0 \to e^{x-2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$\text{g) } (x+1)\left(e^x - 3\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ e^x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ e^x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \ln 3 \end{cases}.$$

$$\text{h) } x^2e^x - 2xe^x = 0 \Rightarrow \left(x^2 - 2x\right)e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ e^x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0;\ 2 \\ e^x \ne 0,\ \forall x \end{cases}.$$

26. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+3} = 88$; b) $3^x - 7 \cdot 3^{x-2} = 18$; c) $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$;

d) $4 \cdot 5^x - 12 \cdot 5^{x-1} = 200$; e) $3^x - 2 \cdot 3^{x-1} = 9$; f) $2^{x+1} - 12 \cdot 2^{1-x} = 13$.

Solución:

a) Aplicando la propiedad $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+3} = 88 \Leftrightarrow 2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^3 = 88 \to$ (sacando factor común 2^x) $\Rightarrow 2^x(1+2+2^3) = 88 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$.

b) $3^x - 7 \cdot 3^{x-2} = 18 \to$ (como $3^{x-2} = \dfrac{3^x}{3^2} = \dfrac{3^x}{9}$) $\to 3^x - 7 \cdot \dfrac{3^x}{9} = 18 \to$ (factor común) $\to$

$\left(1 - \dfrac{7}{9}\right) 3^x = 18 \Rightarrow \dfrac{2}{9} \cdot 3^x = 18 \to$ (se multiplica por 9 y divide por 2) $\to 3^x = 81 \Rightarrow x = 4$.

c) Aplicando la propiedad $9^x = \left(3^2\right)^x = 3^{2x} = \left(3^x\right)^2$ se tendrá:

$9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 4\left(3 \cdot 3^x\right) + 27 = 0 \Rightarrow \left(3^x\right)^2 - 12 \cdot 3^x + 27 = 0 \to$ (haciendo $3^x = t$)

$\to t^2 - 12t + 27 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{12 \pm \sqrt{144-108}}{2} = \dfrac{12 \pm 6}{2} = \begin{cases} 9 \\ 3 \end{cases}$.

Para $t = 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$; para $t = 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$.

d) $4 \cdot 5^x - 12 \cdot 5^{x-1} = 200 \Rightarrow 4 \cdot 5^x - 12 \cdot \dfrac{5^x}{5} = 200 \to$ (multiplicando por 5) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 20 \cdot 5^x - 12 \cdot 5^x = 1000 \Rightarrow 8 \cdot 5^x = 1000 \Rightarrow 5^x = 125 \Rightarrow x = 3$.

e) $3^x - 2 \cdot 3^{x-1} = 9 \to$ (sacando factor común 3^{x-1}) $\to 3^{x-1} \cdot (3-2) = 9 \Rightarrow 3^{x-1} = 9 \Rightarrow 3^{x-1} = 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$.

f) $2^{x+1} - 12 \cdot 2^{1-x} = 13 \to$ (como $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ y $2^{1-x} = \dfrac{2}{2^x}$) $\to 2 \cdot 2^x - 12 \cdot \dfrac{2}{2^x} = 13 \Rightarrow$ (multiplicando por 2^x y trasponiendo términos) $\Rightarrow 2\left(2^x\right)^2 - 13 \cdot 2^x - 24 = 0 \Rightarrow$ (resolviendo la ecuación de 2º grado) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x = \dfrac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-24)}}{4} = \dfrac{13 \pm 19}{4} = \begin{cases} 8 \\ -3/2 \end{cases} \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$; $2^x = -3/2$ no puede ser.

27. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log(x+5)^2 = 2$; b) $\log_3 x = 5$; c) $\ln\left(x^2 - 1\right) = 0$; d) $\log_x 4 = -1$.

Solución:

a) Aplicando la propiedad $\log A^n = n \log A$ se tiene:

$\log(x+5)^2 = 2 \Rightarrow (x+5)^2 = 10^2 \Rightarrow x + 5 = \pm 10 \Rightarrow x = 5$; $x = -15$.

b) Por definición de logaritmo: $\log_3 x = 5 \Rightarrow x = 3^5 = 243$.

c) Por definición: $\ln\left(x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

d) Por definición: $\log_x 4 = -1 \Rightarrow 4 = x^{-1} \Rightarrow 4 = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

28. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $2\log(x-3)=1$; b) $\log(x+1)+\log x=\log 20$;

c) $\log(2x+2)-\log(x-3)=1$; d) $\log(x+6)-2\cdot\log(x-3)=1$.

Solución:

a) Simplificando: $2\log(x-3)=1 \Rightarrow \log(x-3)=\frac{1}{2} \Rightarrow x-3=10^{1/2} \Rightarrow x=3+\sqrt{10}$.

(Si se aplica el antilogaritmo en $\log(x-3)=\frac{1}{2} \Rightarrow x-3=3{,}16227766 \Rightarrow x=6{,}16227766$).

b) Aplicando la propiedad $\log A+\log B=\log(A\cdot B)$ se tendrá:

$\log(x+1)+\log x=\log 20 \Leftrightarrow \log((x+1)\cdot x)=\log 20 \Rightarrow (x+1)\cdot x=20 \Rightarrow x=4$ o $x=-5$.

Solo vale la solución positiva, $x = 4$.

c) Aplicando la propiedad $\log A-\log B=\log\frac{A}{B}$ se tendrá:

$$\log(2x+2)-\log(x-3)=1 \Rightarrow \log\frac{2x+2}{x-3}=1 \Rightarrow \frac{2x+2}{x-3}=10 \Rightarrow x=4.$$

d) Aplicando las propiedades $n\log A=\log A^n$ y $\log A-\log B=\log\frac{A}{B}$ se tendrá:

$$\log(x+6)-2\cdot\log(x-3)=1 \Leftrightarrow \log(x+6)-\log(x-3)^2=1 \Leftrightarrow \log\frac{x+6}{(x-3)^2}=1 \Rightarrow \frac{x+6}{(x-3)^2}=10$$

$$\Rightarrow x+6=10(x-3)^2 \Rightarrow 10x^2-61x+84=0 \Rightarrow x=\frac{61\pm\sqrt{61^2-4\cdot10\cdot84}}{20}=\frac{61\pm19}{20}=\begin{cases}4\\2{,}1\end{cases}.$$

La solución $x = 2{,}1$ no es válida, pues al sustituir en $\log(x-3)$ no puede calcularse.

29. La población de una determinada región crece anualmente a un ritmo del 2 %. Si actualmente tiene 750000 habitantes, ¿cuántos años han de pasar para que llegue a tener 1 millón?

Solución:

Conviene utilizar la fórmula $P=P_0\cdot e^{rt}$, siendo: P_0 la población inicial; $r=\frac{2}{100}=0{,}02$; t = número de años.

Se obtiene: $P(t)=750000\cdot e^{0{,}02t}$.

Si se quiere que $P(t)=1000000$, entonces:

$$1000000=750000e^{0{,}02t} \Rightarrow \frac{4}{3}=e^{0{,}02t} \Rightarrow \ln\frac{4}{3}=\ln e^{0{,}02t} \Rightarrow \ln\frac{4}{3}=0{,}02t \Rightarrow t=\frac{0{,}287682}{0{,}02}=14{,}38$$

Deben pasar 14,38 años.

$\to$ Si se utiliza el modelo $P=P_0(1+r)^t$, que da resultados aceptables, se obtiene:

$$1000000=750000(1+0{,}02)^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}=1{,}02^t \Rightarrow \log\frac{4}{3}=\log 1{,}02^t \Rightarrow \log\frac{4}{3}=t\cdot\log 1{,}02 \Rightarrow t=\frac{0{,}12493...}{0{,}0086...}=14{,}527...\text{ años.}$$

30. Un equipo de fútbol de categoría regional comenzó con 100 socios. Desde su fundación el número de socios creció de manera uniforme (con crecimiento porcentual igual año a año). Si al cabo de 9 años el número de socios era de 3844, ¿a qué porcentaje creció anualmente?

Solución:

El problema puede tratarse como un problema de interés compuesto, siendo la tasa de crecimiento anual *r*, que es desconocida.

En este caso, el modelo que da el número de socios al cabo de *t* años será: $N(t)=100(1+r)^t$.

Si *t* = 9 años, como $N(9)=3844$, se tendrá:

$$3844=100\cdot(1+r)^9 \Rightarrow 38,44=(1+r)^9 \to \text{aplicando logaritmos} \to \log(38,44)=9\cdot\log(1+r)\Rightarrow$$

$$\frac{\log(38,44)}{9}=\log(1+r) \Rightarrow 0,176087042=\log(1+r) \Rightarrow 1+r=1,499985435 \Rightarrow r=0,49998.$$

Que *r* = 0,49998 significa que el crecimiento anual es del 50 %, aproximadamente.

31. Supongamos que la cantidad de madera de un bosque aumenta un 6 % anualmente. Si en el año 2020 había una cantidad de madera equivalente a 1000 toneladas:

a) Escribe la expresión de la función que proporciona la cantidad de madera que habrá al cabo de *x* años (desde el año 2020). ¿Qué cantidad de madera habrá en 2030?

b) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que la cantidad de madera sea doble que la del año 2020?

c) Haz la gráfica que representa la cantidad de madera a lo largo del tiempo. (En eje *OY* puede tomarse 1 = 1000 t; en el eje *OX*, *x* = 0 indica el año 2020).

Solución:

a) Cada año la cantidad de madera se multiplica por 1,06. Por tanto: $C(t)=1000\cdot(1,06)^x$.

En 2020, *x* = 0; en 2030, *x* = 10. Por tanto, $C(10)=1000\cdot(1,06)^{10}$ = 1790,8 toneladas.

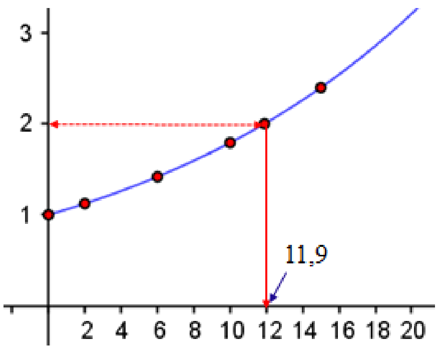
b) Hay que resolver la ecuación:

$$2000=1000\cdot(1,06)^x \Rightarrow 2=1,06^x \Rightarrow \log 2=\log\left(1,06^x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 2=x\cdot\ln 1,06 \Rightarrow x=\frac{\log 2}{\log 1,06}\approx 11,9 \text{ años.}$$

c) Pueden darse algunos valores:

(0, 1); (2, 1,12); (6, 1,42); (10, 1,79); (15, 2,4).

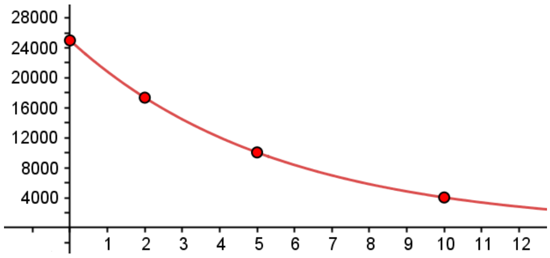


Observación: También puede utilizarse (y es más real) la función $C(t)=1000e^{0,06x}$. Con esto los resultados difieren ligeramente. Así, el tiempo que tarda en duplicarse la cantidad de madera es la solución de $2=e^{0,06x} \Rightarrow \ln 2=0,06x \Rightarrow x\approx 11,55$ años. La gráfica también crece un poco más deprisa.

32. La función que da el valor de un automóvil a partir del momento de su adquisición es $P(t) = 25000 \cdot 1,2^{-t}$, t en años y P en euros.
a) ¿Cuánto costó nuevo?
b) ¿Cuánto valdrá a los 2 años de su adquisición?
c) Representa gráficamente la función $P(t)$ en el intervalo [0, 10]. (En el eje vertical puedes adaptar la escala de manera que 1 = 4000 €).
Solución:
a) Nuevo: $t = 0 \to P(0) = 25000 \cdot 1,2^0 = 25000$ euros.

b) A los 2 años: $t = 2 \to$
$$P(2) = 25000 \cdot 1,2^{-2} = 25000 \cdot 0,694... = 17362,1...$$

c) Para $t = 5$: $P(5) = 25000 \cdot 1,2^{-5} = 10046,93$; para $t = 10$: $P(10) = 25000 \cdot 1,2^{-10} = 4037,64$.



33. Supongamos que la función que da la cantidad (en porcentaje) de un determinado fármaco presente en sangre, en mg, respecto al tiempo, en horas, desde el momento en que este es inyectado viene dada por $C(t) = 100 \cdot \left(0,85^t\right)$.
a) ¿Qué porcentaje queda al cabo de 4 horas?
b) ¿Si se supone que cuando queda en sangre menos de un 2 % de la dosis inicial el fármaco deja de hacer efecto, ¿en qué momento dejará de hacer efecto el fármaco inyectado?
Solución:
a) Para $t = 4$: $C(4) = 100 \cdot 0,85^4 = 100 \cdot 0,5220 = 52,20$ %.

c) Hay que resolver la ecuación: $2 = 100 \cdot 0,85^t$.
$$2 = 100 \cdot 0,85^t \Rightarrow 0,02 = 0,85^t \Rightarrow \log 0,02 = t \cdot \log 0,85 \Rightarrow t = \frac{\log 0,02}{\log 0,85} \approx 24,07.$$

34. En determinadas condiciones, una población de mosquitos crece ajustándose a la función $f(x) = 0,8 + 1,2e^{0,5x}$, donde $f(x)$ es el número de mosquitos en miles y x el tiempo en días desde el momento presente.
a) ¿Cuánto tiempo, en días, tardará en triplicarse la población inicial?
b) Si se mantienen las condiciones iniciales, ¿cuántos mosquitos habrá al cabo de 8 días?
Solución:
a) La población inicial es $f(0) = 0,8 + 1,2e^0 = 2 \to$ 2000 mosquitos.
Se triplicará cuando sean 6 (millares), el doble de 2:
$$0,8 + 1,2e^{0,5x} = 6 \Rightarrow 1,2e^{0,5x} = 5,2 \Rightarrow e^{0,5x} = 4,333...$$
Tomando logaritmos neperianos:
$$\ln\left(e^{0,5x}\right) = \ln(4,333...) \Rightarrow 0,5x = \ln(4,333...) \Rightarrow x = \frac{\ln 4,333...}{0,5} \approx 2,93 \text{ días.}$$
b) Si se mantienen las condiciones iniciales, para x =8, $f(x) = 0,8 + 1,2e^4 \approx 66,3$ miles.

35. En determinadas condiciones, una población de mosquitos crece ajustándose a la función $f(x)=\dfrac{10}{1+4e^{-0,5x}}$, donde $f(x)$ es el número de mosquitos en miles y x el tiempo en días desde el momento presente.

a) ¿Cuánto tiempo, en días, tardará en triplicarse la población inicial?

b) Si se mantiene el modelo de crecimiento, ¿cuántos mosquitos habrá al cabo de 8 días?

Solución:

a) La población inicial es $f(0)=\dfrac{10}{1+4e^{0}}=\dfrac{10}{5}=2 \to$ 2000 mosquitos.

Se triplicará cuando sean 6 (millares), el doble de 2:

$$\frac{10}{1+4e^{-0,5x}}=6 \Rightarrow 10=6+24e^{-0,5x} \Rightarrow e^{-0,5x}=\frac{4}{24}$$

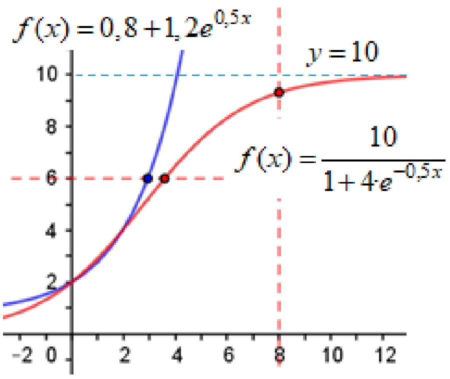
Tomando logaritmos neperianos:

$$\ln\left(e^{-0,5x}\right)=\ln\left(0,1666...\right) \Rightarrow -0,5x=\ln\left(0,1666...\right) \Rightarrow x=\frac{\ln 0,1666...}{-0,5}\approx 3,58 \text{ días.}$$

b) Si se mantiene el modelo de crecimiento, para x =8, $f(8)=\dfrac{10}{1+4e^{-4}}\approx 9,32$ miles.

Observación: Crecimiento logístico.

El crecimiento exponencial (malthusiano) no es aplicable a fenómenos reales, pues la expansión biológica se ve limitada por la presión ambiental en sus diversas formas. Por ello, el crecimiento de poblaciones se explica mejor mediante la función de crecimiento logístico, cuya expresión es $P(t)=\dfrac{b}{1+a\cdot e^{-kt}}$, siendo t la variable independiente (el tiempo), y a, b y k constantes positivas. La constante b es la capacidad (límite) poblacional del fenómeno en cuestión; la recta $y=b$ es asíntota horizontal de la curva. La gráfica de esta función es como la dibujada en la figura adjunta.



36. A partir de la gráfica de la función $f(x)=\sin x$, representa las funciones:

a) $f_1(x)=2(\sin x)$; b) $f_2(x)=\sin(2x)$;

c) $f_3(x)=\dfrac{\sin x}{2}$; d) $f_4(x)=\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Solución:

La función $f(x)=\sin x$ es periódica de periodo 2π; toma valores entre –1 y 1.

Algunos puntos en el primer ciclo: (0, 0); (π/2, 1); (π, 0); (3π/2, –1); (2π, 0).

a) La función $f_1(x)=2(\sin x)$ multiplica por 2 todos los resultados de $f(x)=\sin x$; sus valores varían entre –2 y 2. También es periódica de periodo 2π.

Algunos puntos en el primer ciclo: (0, 0); (π/2, 2); (π, 0); (3π/2, –2); (2π, 0).

b) La función $f_2(x)=\sin(2x)$ contrae (a la mitad) a $f(x)=\sin x$; sus valores varían entre –1 y 1. Es periódica de periodo π.

Algunos puntos en el primer ciclo: (0, 0); (π/4, 1); (π/2, 0); (3π/4, –1); (π, 0).

Observación sobre el periodo de estas funciones.

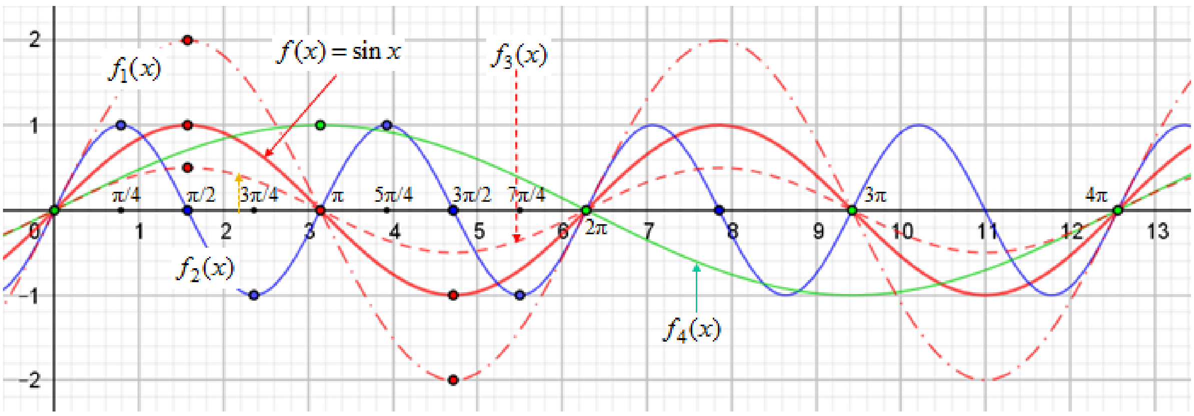
Si la función $f(x)=\sin(kx)$ es periódica de período *p*, entonces: $\sin(kx)=\sin(k(x+p))$, para todo valor de *x*. En particular, si *x* = 0: $\sin(k\cdot 0)=\sin(k(0+p))\Rightarrow \sin 0=\sin(kp)$; y como $\sin 0=\sin(2\pi)=\sin(kp)\ \Rightarrow\ kp=2\pi\Rightarrow\ p=\dfrac{2\pi}{k}$.

Luego, $f_2(x)=\sin(2x)$ es periódica de periodo π; y $f_4(x)=\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ será periódica de periodo 4π.

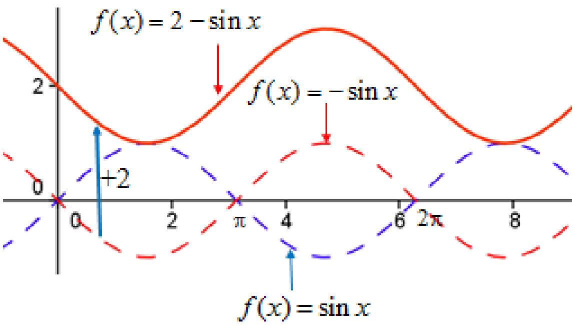
c) La función $f_3(x)=\dfrac{\sin x}{2}$ divide por 2 todos los resultados de $f(x)=\sin x$; sus valores varían entre –0,5 y 0,5. También es periódica de periodo 2π.
Algunos puntos en el primer ciclo: (0, 0); (π/2, 0,5); (π, 0); (3π/2, –0,5); (2π, 0).

d) La función $f_4(x)=\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ dilata (al doble) a $f(x)=\sin x$; sus valores varían entre –1 y 1. Es periódica de periodo 4π.
Algunos puntos en el primer ciclo: (0, 0); (π, 1); (2π, 0); (3π, –1); (4π, 0).

Sus gráficas son las que se indican en siguiente figura.



37. A partir de la gráfica de la función $f(x)=\sin x$, representa la función $f(x)=2-\sin x$.
<u>Solución</u>:
Primero se representa la función $f(x)=\sin x$; después $f(x)=-\sin x$ → hay que voltear la gráfica: lo positivo se hace negativo, y viceversa. Por último, se desplaza 2 unidades hacia arriba.
Se obtiene la gráfica adjunta.



38. A partir de la gráfica de $f(x)=\cos x$ dibuja, en el mismo intervalo [0, 4π], la gráfica de las funciones $f_1(x)=1+\cos x$, $f_2(x)=\cos x-2$ y $f_3(x)=\cos(x-2)+3$.

Solución:

La función $f(x)=\cos x$ está definida en todo **R**, es periódica de periodo 2π (se repite en cada intervalo de amplitud 2π); toma valores entre –1 y 1.

→ La función $f_1(x)=1+\cos x$ es la trasladada de $f(x)$ una unidad hacia arriba; toma valores entre 0 y 2.

→ $f_2(x)=\cos x-2$ es la trasladada de $f(x)$ dos unidades hacia abajo; toma valores entre –3 y –1.

→ $f_3(x)=\cos(x-2)+3$ es la trasladada de $f(x)$ según el vector $\vec{v}=(2,\ 3)$; toma valores entre –2 y 4. (Lleva un desfase de 2 unidades respecto de $f(x)=\cos x$).