TEMA 14. FUNCIONES USUALES

1. FUNCIONES POLINÓMICAS

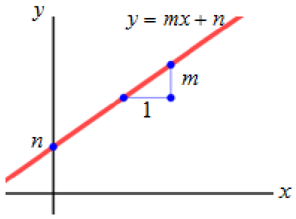
Su expresión general es $f(x)=a_nx^n+...+a_2x^2+a_1x+a_0$. (Es la misma que la de un polinomio). Los números a_i son los coeficientes, a_0 es el término independiente, n indica el grado (que debe ser un número entero positivo). La indeterminada x es la variable independiente. Su dominio es **R**; esto es, siempre están definidas. El valor de $f(x)$ dependerá del que tome x.

- Si $n = 0$, la función es constante: $f(x)=a_0$; $f(x)=k$; $y=k$. Su gráfica es una recta horizontal.

La función lineal

Es la función polinómica de grado 1: $f(x)=a_1x+a_0$; $f(x)=mx+n$ $y=mx+n$.

Su gráfica es una recta. El coeficiente m se llama pendiente, y mide lo que varía la y por cada aumento unitario de x.



Al número n se le llama ordenada en el origen, pues indica el valor de y cuando x vale 0.

Si $n = 0$, $y=mx$, la función se llama de proporcionalidad directa.

En esta función, las variables son directamente proporcionales (como en la "regla de tres" simple directa). La pendiente m es la razón de proporcionalidad entre las variables x e y: $y=mx \Leftrightarrow \frac{y}{x}=m$.

La representación gráfica de estas funciones son rectas que pasan por el origen.

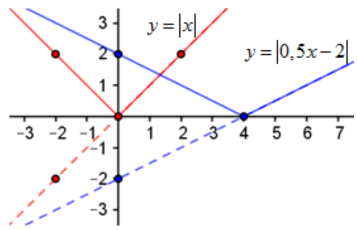
Si $m = 1$, la función se llama identidad: $y=x$. Su gráfica es la bisectriz del primer cuadrante.

Otras funciones relacionadas con rectas

- La función valor absoluto de x, $f(x)=|x|$, se puede expresar como una función definida a trozos:

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & \text{si } x<0\\ x, & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

. Su gráfica es la adjunta.

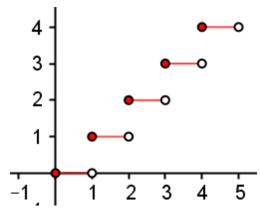


→ En el mismo dibujo se ha representado la función

$$f(x)=|0,5x-2|=\begin{cases}-0,5x+2, & \text{si } x<4\\ 0,5x-2, & \text{si } x\geq 4\end{cases}.$$

En ambos casos, su representación puede hacerse a partir de la de las gráficas de $y=x$ e $y=0,5x-2$, "reflejando" respecto del eje OX la parte negativa de sus gráficas.

- La función parte entera de x, que se escribe $f(x)=ENT[x]$, es la función que asigna a cada número real x el número entero menor o igual que x.



→ $ENT[2]=2$; $ENT[2{,}12]=2$; $ENT[3{,}5]=3$; $ENT[-2{,}34]=-3$.

Es una función escalonada, discontinua a saltos. Su gráfica es la adjunta.

→ Esta función está asociada a fenómenos que son constantes por tramos. Por ejemplo, el coste de estacionamiento de un coche en un parking. En el supuesto de que el precio de aparcamiento fuese de 2,30 euros, hora o fracción, la función que da el coste de aparcamiento durante t horas, es $f(t)=2{,}30\cdot ENT[t+1]$.

Si el tiempo de aparcamiento es 1:20 h, se pagará $f(1{,}33)=2{,}30\cdot ENT[1{,}33...+1]=2{,}30\cdot 2=4{,}60$ €.

La función cuadrática: parábolas

Su expresión analítica es: $f(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.
La gráfica de esta función es una parábola de eje vertical.

→ Efecto de los parámetros *a*, *b* y *c*

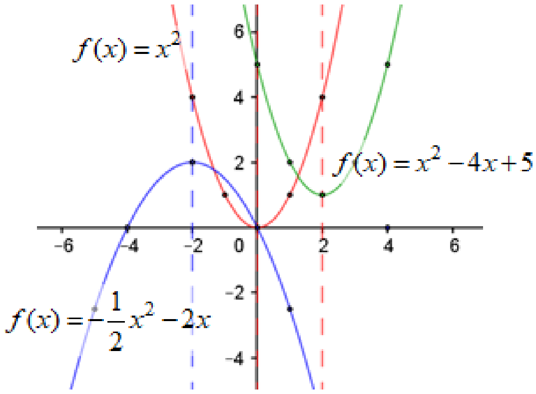
La parábola $y = ax^2 + bx + c$ queda totalmente definida cuando se conocen *a*, *b* y *c*.
Coeficiente *a*:

- Si $a > 0$ la parábola es convexa (∪). Su vértice está en el mínimo de la función.
- Si $a < 0$, es cóncava (∩). El vértice es el máximo.
- La abscisa del vértice es $x_V = -\dfrac{b}{2a}$; su ordenada, el valor de *y* correspondiente.

Coeficiente *b*. El coeficiente *b* produce un desplazamiento lateral en la parábola.
Término independiente *c*. El término *c* produce desplazamientos verticales en la parábola.

→ Cortes con los ejes

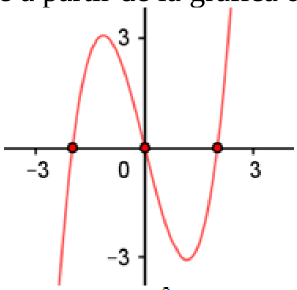
- La función corta al eje *OY* cuando $x = 0$, punto $(0, c)$.
- Los puntos de corte con el eje *OX* son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, que pueden ser dos, una o ninguna.



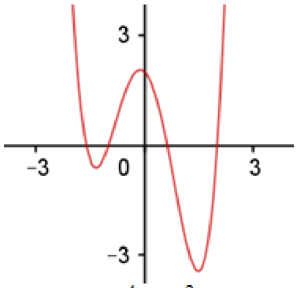
Ejemplos:
En la figura adjunta se han dibujado las funciones
$f(x) = x^2$, $f(x) = x^2 - 4x + 5$ y $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x$.
Sus vértices son los puntos (0, 0), (2, 1) y (−2, 2), respectivamente.
→ $f(x) = x^2 - 4x + 5$ no corta al eje *OX*, pues $x^2 - 4x + 5 = 0$ no tiene soluciones reales.
→ $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x$ corta dos veces al eje *OX*, pues $-\dfrac{1}{2}x^2 - 2x = 0$ tiene dos soluciones: $x = -4$ y $x = 0$.

Funciones polinómicas de grado mayor que 2

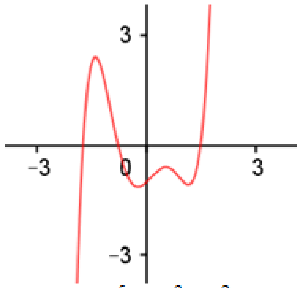
Las características fundamentales de las funciones polinómicas de grado 3 o mayor pueden describirse a partir de la gráfica de algunas de ellas.



$f(x) = x^3 - 4x$



$f(x) = x^4 - 4x^2 - x + 2$



$f(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 + x - 1$

Puede observarse:
1) Las funciones polinómicas siempre son continuas.
2) Si el coeficiente principal es positivo, las de grado mayor par tienen dos ramas apuntado hacia arriba; las gráficas de grado mayor impar (x^3, x^5, …) "aparecen" por abajo y se "pierden" por arriba.
3) Las curvas asociadas a estas funciones pueden cortar al eje *OX* tantas veces como indica el grado de su término principal. Los puntos de corte son, en cada caso, las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.

2. FUNCIONES RACIONALES

Son de la forma $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

- Su dominio de definición son todos los números reales, menos los que anulan el denominador.

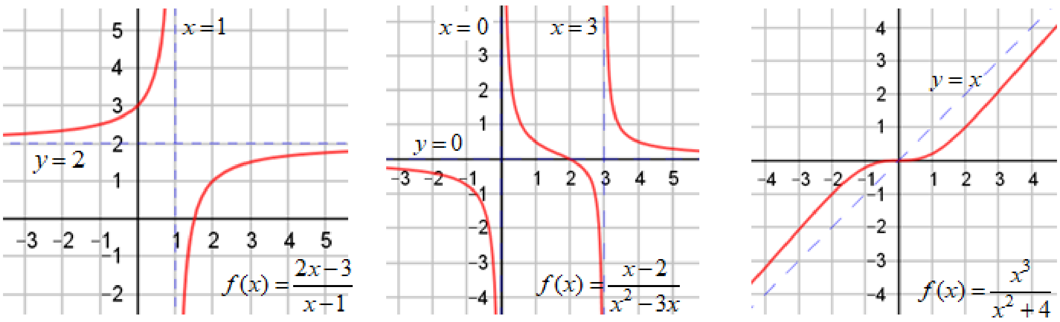
Luego no están definidas en los números que son solución de $Q(x) = 0$.
Pueden tener asíntotas:
1) verticales, en las raíces del denominador que no lo sean (a la vez) del numerador;
2) horizontales, si el grado de $Q(x)$ es mayor o igual que el de $P(x)$;
3) oblicuas, cuando el grado de $P(x)$ es una unidad mayor que el de $Q(x)$.
Su cálculo se justificará en el tema de límites.

Ejemplos:

a) La función $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$ no está definida en $x = 1$. Su dominio es $\mathbf{R} - \{1\}$.
Tiene dos asíntotas: $x = 1$, vertical; $y = 2$, horizontal.

b) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-3x}$ no está definida cuando $x^2-3x=0$, en $x = 0$ y $x = 3$: $\text{Dom}(f) = \mathbf{R}-\{0,\ 3\}$.
Las rectas $x = 0$ y $x = 3$ son asíntotas verticales; $y=0$ es asíntota horizontal.

c) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+4}$ está definida para todo número real x, pues el denominador no se anula en ningún caso. En consecuencia, no tiene asíntotas verticales. La recta $y=x$ es su asíntota oblicua.

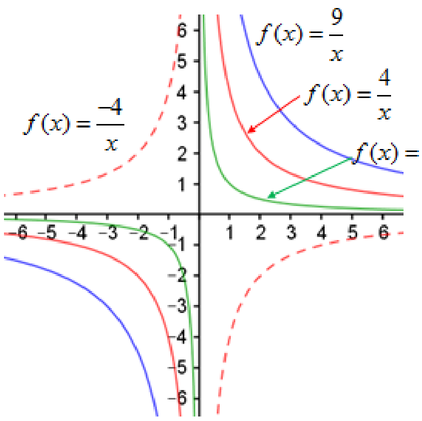


Función de proporcionalidad inversa

Es el caso particular de $f(x)=\dfrac{k}{x}$ o $y=\dfrac{k}{x}$, donde k es una constante distinta de cero.

La "regla de tres" simple inversa se ajusta a esta relación. Recuerda que dos magnitudes, x e y, son inversamente proporcionales, cuando el producto de las cantidades correspondientes es constante: $yx=k$, siendo k la constante de proporcionalidad. Así, cuando una de ellas se multiplica por un número, la otra queda dividida por el mismo número:

$(n\cdot y)\cdot\left(\dfrac{x}{n}\right)=yx=k$. Observa que $y=\dfrac{k}{x} \Leftrightarrow yx=k$.



- La representación gráfica de esta función es una hipérbola equilátera.
- Los ejes de coordenadas son asíntotas de su gráfica.
- Su gráfica es la de una hipérbola equilátera (referida a los ejes cartesianos).

3. FUNCIONES CON RAÍCES

Su expresión general es de la forma $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$, siendo $g(x)$ cualquier otra función.

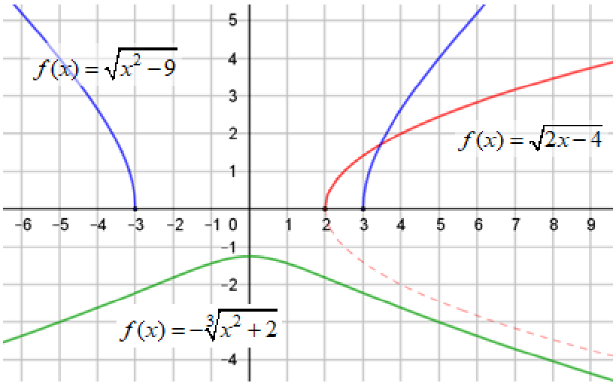
Estas funciones están definidas cuando está definida $g(x)$ y la raíz pueda hacerse.

- Las raíces de índice par están definidas cuando $g(x)\geq 0$; además, como estas raíces tienen dos soluciones, para que la expresión defina una función debe optarse por uno de los signos, el que lleve la raíz: positivo si $f(x)=+\sqrt{g(x)}=\sqrt{g(x)}$; negativo si $f(x)=-\sqrt{g(x)}$.
- Las raíces de índice impar están definidas cuando lo esté $g(x)$.

Ejemplos:

a) La función $f(x)=\sqrt{2x-4}$ está definida siempre que $2x-4\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$: $\text{Dom}(f)$ = [2, +∞).

Su gráfica es la rama positiva de una parábola de eje horizontal: $y=\sqrt{2x-4}\Rightarrow y^2=2x-4$.



b) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ está definida cuando

$x^2-9\geq 0\Rightarrow x\leq -3;\ x\geq 3$,

luego, $\text{Dom}(f)$ = **R** – (–3, 3).

Su gráfica viene dada por la parte positiva de las ramas de una hipérbola:

$$y=\sqrt{x^2-9}\Rightarrow y^2=x^2-9\Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1.$$

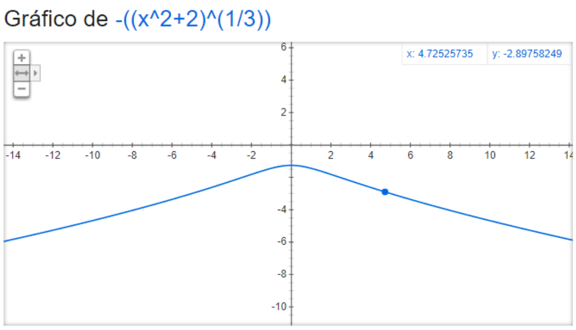
c) La función $f(x)=-\sqrt[3]{x^2+2}$ está definida siempre: $\text{Dom}(f)$ = **R**.

OBSERVACIÓN: Dibujando con Google y Mathway

Los dibujos que aparecen en este tema se han hecho utilizando el programa GeoGebra.
Si cuando estar estudiando necesitas esbozos rápidos puedes recurrir a un gran número de programas informáticos. Aquí te sugiero dos de ellos.

→ En un ordenador, con Google.

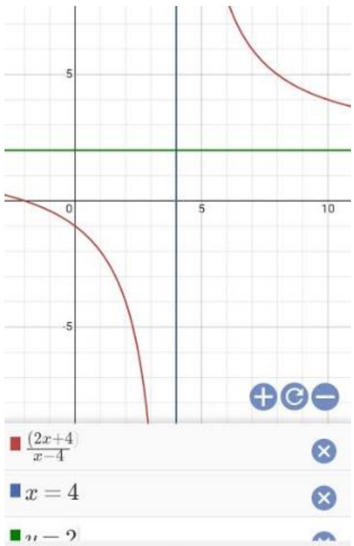
Para representar la función $f(x)=-\sqrt[3]{x^2+2}$ se teclea –(x^2+2)^(1/3) INTRO.



→ En un teléfono móvil, con Mathway.
Para representar la función

$$f(x)=\frac{2x+4}{x-4}$$

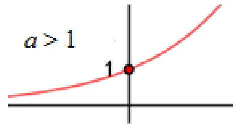
con sus asíntotas,
x = 4 e *y* = 2 se teclea:
1) (2x+4)/(x–4);
2) x = 4;
3) y = 2.
En pantalla aparece el dibujo adjunto.

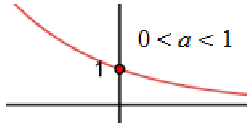


4. FUNCIÓN EXPONENCIAL

Una función es de tipo exponencial cuando la variable independiente figura en el exponente.
La más sencilla es de la forma

$f(x) = a^x \Leftrightarrow y = a^x$, $a > 0$ y $a \neq 1$.



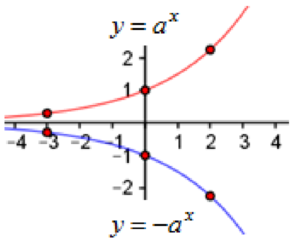


Características fundamentales de la función exponencial $f(x) = a^x$

- Su dominio es **R**: $\text{Dom}(f) = \mathbf{R}$.
- Siempre toma valores positivos: $f(x) = a^x > 0$, para todo x.
- Corta al eje OY en el punto $y = 1$, pues $f(0) = a^0 = 1$.
- Si la base $a > 1$, la función siempre es creciente.
- Si $0 < a < 1$, la función es decreciente.
- El eje OX, la recta $y = 0$, es una asíntota horizontal: hacia $-\infty$ si $a > 1$, y hacia $+\infty$ si $0 < a < 1$.

Observaciones:
1) Para trabajar correctamente con las funciones exponenciales y logarítmicas necesitas manejar bien las propiedades de la potenciación.

2) La función $f(x) = a^{-x}$ es idéntica a $f(x) = \dfrac{1}{a^x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$. En consecuencia, $f(x) = a^{-x}$, con $a > 1$, es decreciente, pues $\dfrac{1}{a} < 1$. Así, por ejemplo: $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{2^x} = 2^{-x}$.



3) La función $f(x) = -a^x$ siempre toma valores negativos. Es la simétrica de $f(x) = a^x$ respecto del eje OX.

4) $(-a)^x$ no está definida: solo puede hallarse para valores sueltos de x.

5) En la calculadora científica, sobre las teclas $\boxed{\text{log}}$ y $\boxed{\text{ln}}$, aparecen las funciones $f(x) = 10^x$ y $f(x) = e^x$.

Para escribir el número e pulsa en la calculadora: SHIFT ln 1 = … saldrá: 2,718281828.

Para trabajar con otras bases hay que utilizar la tecla $\boxed{\wedge}$. Así, por ejemplo, para calcular $2^{2,3}$ se teclea 2^2.3 = 4,924577653.

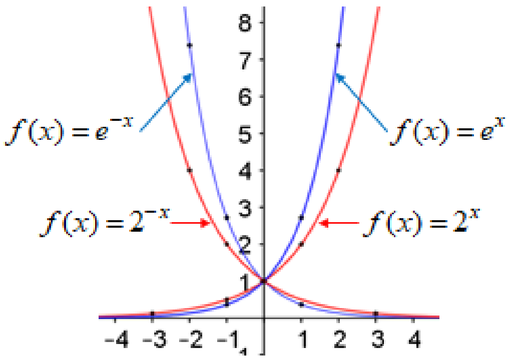
→ Las características descritas pueden estudiarse y deducirse a partir de la gráfica de algunas funciones.

Ejemplos:

a) $f(x) = 2^x$ es la exponencial de base 2.

Algunos de sus puntos son:

(0, 1); (1, 2); (2, 4); (–1, 1/2); (–3, 1/8) …



b) Algunos pares de valores de $y = e^x$ son:

(0, 1), (1, e) ≈ (1, 2,72); (2, e^2) ≈ (2, 7,39);
(–1, 1/e) ≈ (–1, 0,37) …

c) La gráfica de $y = e^{-x}$ es simétrica respecto del eje OY de $y = e^x$. Lo mismo puede decirse de $y = 2^x$ e $y = 2^{-x}$. Ambas son decrecientes.

Funciones relacionadas con la exponencial

- La función general $f(x)=a^{g(x)}$ está definida siempre que lo esté $g(x)$; $a > 0$ y $a \neq 1$.

Ejemplos:

a) $f(x)=2^{3-x}$ está definida para todo número real.

b) $f(x)=2^{\frac{1}{3-x}}$ está definida para todo número real distinto de 3: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbf{R} - \{3\}$.

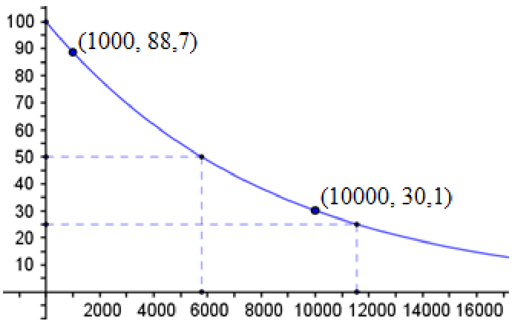
- La función $f(x)=C\cdot a^{kx}$, con $k > 0$, se presenta en procesos de capitalización o de crecimiento de poblaciones; con $k < 0$ está asociada a fenómenos de desintegración o de pérdida del valor de determinados bienes.

Ejemplos:

a) La función $C(t)=C_0(1+r)^t$ da el capital acumulado al cabo de t años a una tasa de interés anual r (en tanto por uno), para un capital inicial C_0. Así, un capital de 1000 €, al 6 % anual (r = 0,06), se convierte al cabo de 8 años en $C(8)=1000(1+0,06)^8=1000\cdot(1,06)^8=1593,85$ €.

b) A interés continuo, el capital acumulado al cabo de t años es: $C(t)=C_0\cdot e^{rt}$.
Así, los 1000 € del ejemplo anterior, al mismo 6 % anual, se convierten al cabo de 8 años en
$C(8)=1000\cdot e^{0,06\cdot 8}=1000\cdot e^{0,48}=1616,07$ €.
Lo mismo sucede con los fenómenos de crecimiento continuo (en los que el aumento no se contabiliza solo al final de un periodo de tiempo –anual, trimestral, …– sino en cada instante). Así puede evolucionar, en determinadas condiciones, el crecimiento de la masa forestal de un bosque o el de determinadas poblaciones silvestres, la propagación de epidemias…
Por ejemplo, si un bosque que sufrió un incendio se regenera a un ritmo del 10 % anual, su masa forestal al cabo de t años de iniciado el proceso de regeneración vendrá dada por la función $M(t)=M_0\cdot e^{0,1t}$, siendo M_0 la masa forestal de partida. Si se supone una masa forestal inicial de 2500 m^3 de madera, al cabo de 20 años habrá $M(t)=2500\cdot e^{0,1\cdot 20}=2500\cdot e^2=18472,6$ m^3.

c) El decaimiento (desintegración) de sustancias radiactivas también se ajusta a funciones exponenciales del tipo $R(t)=R_0\cdot e^{kt}$, con $k < 0$.
Un ejemplo clásico es el del carbono 14, que se utiliza para la datación (antigüedad) de restos orgánicos. En concreto, el porcentaje de carbono-14 en restos muertos (plantas, animales…) se ajusta a la fórmula $p(t)=100\cdot e^{-0,00012t}$. Esto significa que, por ejemplo, al cabo de 1000 años ese porcentaje será del 88,7 %: $p(1000)=100\cdot e^{-0,12}$ = 88,7; y transcurridos 10000 años, del 30,1 %: $p(10000)=100\cdot e^{-1,2}$ = 30,1.
(Para calcular $e^{-1,2}$ puedes teclear en la calculadora:
SHIFT ln (–1.2) = … se obtiene: 0,301194211).



→ Se llama vida media (o periodo de semidesintegración) al tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de una sustancia radiactiva. La vida media del carbono 14 es aproximadamente de 5750 años: 5750 años después de muerto un organismo queda un 50 % del carbono 14 inicial; transcurridos otros 5750 años queda la mitad del 50 %, el 25 %. Por tanto, midiendo el carbono 14 que hay presente en el organismo en cuestión se puede determinar cuánto tiempo hace de su muerte.
(La datación mediante el carbono 14 es frecuente en Arqueología. Para saber más).

5. LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Definición de logaritmo en base *a* de *x*

$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

$\to$ Consecuencias de la definición:

$\log_a a = 1$, pues $a^1 = a$; $\log_a 1 = 0$, pues $a^0 = 1$; $\log_a a^n = n$, pues $a^n = a^n$.

Las bases usuales son $a = 10$ y $a = e$. En la calculadora, teclas $\boxed{\log}$ y $\boxed{\ln}$.
Los logaritmos en base 10 se llaman naturales; los logaritmos en base *e* se llaman neperianos.

- El logaritmo de los números reales menores o iguales que 0 no está definido.

Ejemplos:

a) $\log_2 8 = 3$ ya que $2^3 = 8$. b) $\log_3 81 = 4$ ya que $3^4 = 81$. c) $\ln e^4 = 4$, pues $e^4 = e^4$.

$\to$ Usando la calculadora: d) $\ln 5 = 1,609438$. e) $\log 0 \to$ Math ERROR.

f) $\log 5 = 0,\underline{698970}$. g) $\log 50 = 1,\underline{698970}$. h) $\log 500 = 2,\underline{698970}$.

Propiedades de los logaritmos

Propiedad 1: $\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$.

Ejemplos:

a) $\log 5 + \log 20 = \log (5 \cdot 20) = \log 100 = 2$. b) $\log(10x) = \log 10 + \log x = 1 + \log x$.

c) Como $5000 = 1000 \cdot 5 \Rightarrow \log 5000 = \log(1000 \cdot 5) = \log 1000 + \log 5 = 3 + \underline{\log 5} = 3,\underline{698970}$.

Propiedad 2: $\log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$.

Ejemplos:

a) $\log \dfrac{1}{20} = \log 1 - \log 20 = -\log 20 = -1,3010$. b) $\log 10^{-3} = \log \dfrac{1}{1000} = \log 1 - \log 1000 = 0 - 3 = -3$.

c) $\log 0,3 = \log \dfrac{3}{10} = \log 3 - \log 10 = 0,4771 - 1 = -0,5229$.

Propiedad 3: $\log_a A^n = n \log_a A$.

Ejemplos:

a) $\log 5^7 = 7 \cdot \log 5 = 7 \cdot 0,698970 \approx 4,89$. b) $\ln 3^5 = 5 \cdot \ln 3 = 3 \cdot 1,098612 \approx 5,49$.

c) $\log 10^n = n \cdot \log 10 = n \cdot 1 = n \to \log 10 = 1$; $\log 100 = \log 10^2 = 2$; $\log 1000 = \log 10^3 = 3 \ldots$

d) $\ln e^n = n \cdot \ln e = n \cdot 1 = n \to \ln e = 1$; $\ln e^2 = 2$; $\ln e^3 = 3 \ldots$; $\ln e^{-1} = -1$; $\ln \dfrac{1}{e^2} = \ln e^{-2} = -2$.

Observación: Repara en lo que se ha subrayado más arriba:

$\log 5 = 0,\underline{698970}$; $\log 50 = 1,\underline{698970}$; $\log 500 = 2,\underline{698970}$; $\log 5000 = 3,\underline{698970}$ …

En base 10, cada vez que un número se multiplica por 10 su logaritmo aumenta 1; y si se divide por 10, disminuye en 1. Por tanto, conociendo log 5 puede saberse $\log(5 \cdot 10^n)$ y $\log(5 \cdot 10^{-n})$:

$\log(5 \cdot 10^n) = \log 5 + \log 10^n = \log 5 + n$; $\log(5 \cdot 10^{-n}) = \log 5 + \log 10^{-n} = \log 5 - n$.

Así: $\log 5000000 = 6,\underline{698970} \to 5000000 = 5 \cdot 10^6$; $\log 0,05 = \log(5 \cdot 10^{-2}) = \underline{0,698970} - 2$.

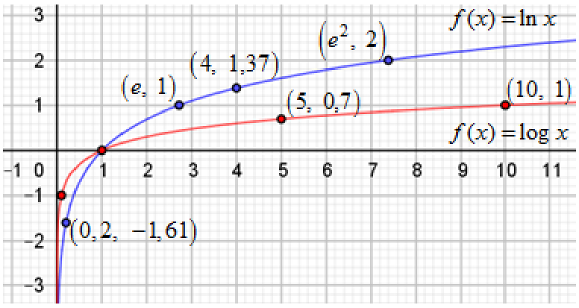
La función logarítmica

La función logarítmica más sencilla es $f(x)=\log_a x \Leftrightarrow y=\log_a x$, $(a>0;\ a\neq 1)$.
Para las bases usuales, $a=10$ y $a=e$: $f(x)=\log x$ y $f(x)=\ln x$.

Sus gráficas, cuyos puntos pueden hallarse con la calculadora, se dan a continuación.

→ Para $f(x)=\log x$:
$(0{,}1, \log 0{,}1) = (0{,}1, -1)$; $(1, \log 1) = (1{,}0)$;
$(5, \log 5) \approx (5;\ 0{,}7)$; $(10, \log 10) = (10, 1)$.

→ Para $f(x)=\ln x$:
$(0{,}2, \ln 0{,}2) \approx (0{,}2, -1{,}61)$; $(1, \ln 1) = (1{,}0)$;
$(e, 1)$; $(4, \ln 4) \approx (4;\ 1{,}37)$; $\left(e^2,\ \ln e^2\right)=\left(e^2,\ 2\right)$.



Características fundamentales:

- Su dominio es $\mathbf{R}^+$, los reales positivos: $x > 0$.
- Toma valores que van desde $-\infty$ a $+\infty$: Recorrido = $(-\infty, +\infty)$.
- El eje OY, la recta $x = 0$, es asíntota vertical de su curva, por la izquierda. Cuando x toma valores próximos a 0^+, el valor del logaritmo es "grande" y negativo: $\log 0{,}1 = -1$; $\log 0{,}01 = -2$;…
- Si $a > 1$ (que es lo usual), la función es creciente. (Si $0 < a < 1$, la función sería decreciente).

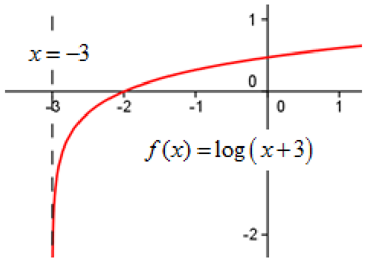
La función general $f(x)=\log_a g(x)$ está definida siempre que $g(x) > 0$.

Ejemplos:

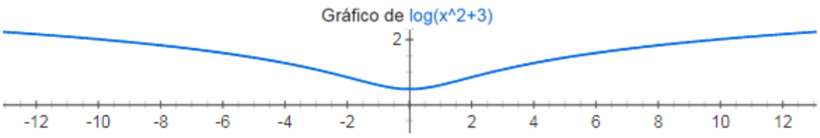
a) $f(x)=\log(x+3)$ está definida siempre que $x+3>0$; esto es, cuando $x > -3$. Luego, su dominio es el intervalo $(-3, +\infty)$.
Cuando x toma valores próximos a -3^+ (por la derecha de -3) el valor del logaritmo se va haciendo más grande y negativo:

$$f(-2{,}9)=\log(-2{,}9+3)=-1;\ f(-2{,}99)=\log(-2{,}99+3)=-2;\ \ldots$$

Luego, la recta $x = -3$ es asíntota vertical.

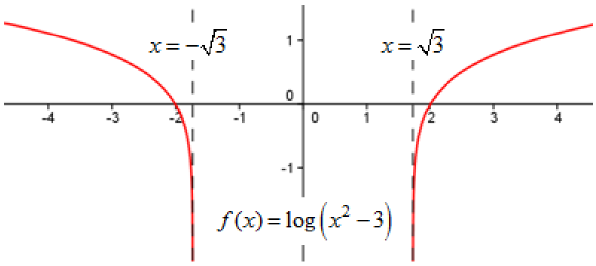


b) $f(x)=\log\left(x^2+3\right)$ está definida siempre, pues $x^2+3>0$ para todo x. Esta función no tiene asíntota vertical, pues en ningún caso x^2+3 se acerca a 0. (En Google se ve así).



c) $f(x)=\log\left(x^2-3\right)$ está definida siempre que $x^2-3>0 \Rightarrow x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$.

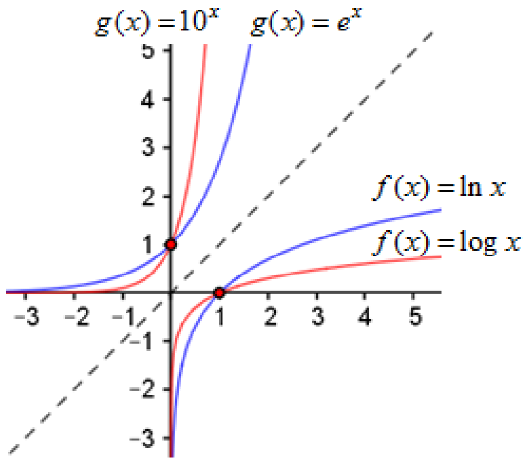
Observa que $x^2-3=0$ si $x=-\sqrt{3}$ y $x=+\sqrt{3}$.
Cuando x^2-3 toma valores muy próximos a 0^+, el valor de $f(x)=\log\left(x^2-3\right)$ es cada vez más grande y negativo; esto es: si $x\to-\left(\sqrt{3}\right)^-$ o si $x\to\left(\sqrt{3}\right)^+$ la función tiende hacia $-\infty \Rightarrow$ la curva tiene dos asíntotas verticales, las rectas $x=-\sqrt{3}$ y $x=+\sqrt{3}$.



Las funciones exponenciales y logarítmicas son inversas

Recuerda que dos funciones *f* y *g* son inversas cuando se cumple que: $g(f(x)) = x$ y $f(g(x)) = x$.
La función inversa de *f* se designa por f^{-1}. (También se dice que *f* y *g* son recíprocas).

En nuestro caso, como $f(x) = \log_a x \Leftrightarrow x = a^{f(x)}$, se deduce que las funciones exponencial y logarítmica son inversas; esto es, si se aplican sucesivamente el logaritmo y la exponencial en la misma base, se vuelve al punto de partida. O sea: $\log_a a^x = x$ y $a^{\log_a x} = x$.
Así, por ejemplo: $\log 10^{3,5} = 3,5$ y $10^{\log 3,5} = 3,5$.
Puedes comprobarlo escribiendo en tu calculadora:
$\log 10 \wedge 3.5 = 3.5$; al revés, $10 \wedge \log 3.5 =$ 3.5
También puede verse que:
$\ln e^2 = 2$ y $e^{\ln 2} = 2$.



- Observa que sus gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

Antilogaritmo
Es la inversa del logaritmo (la exponencial correspondiente).
Esto es: antilog $b = 10^b \to$ el antilogaritmo de *b* es el número cuyo logaritmo vale *b*.

Ejemplos:
a) antilog 2 = 100, pues log 100 = 2; antilog (–1) = 10^{-1} = 0,1, pues log 0,1 = –1.

b) antiln 3 = e^3, pues ln e^3 = 3; antiln (–2) = e^{-2}, pues ln e^{-2} = –2.

- En las calculadoras, el antilogaritmo se halla pulsando sucesivamente las teclas SHIFT log (o ln).

c) antilog 1,2 = 15,8489 → (SHIFT log 1,2 = 15,8489); antilog (–1) → SHIFT log (–1) = 0,1.

d) antiln 1/2 → SHIFT ln 1/2 = 1,6487 (queda más ´elegante` si se escribe antiln 1/2 = $e^{1/2} = \sqrt{e}$).

6. ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

En estas ecuaciones la incógnita está en el exponente de una potencia o va ligada a un logaritmo.
Se resuelven aplicando las propiedades de las potencias y de los logaritmos.
En algún momento del proceso suele aplicarse alguna de las propiedades siguientes:
1) $A^{f(x)} = A^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
2) $\log_a\left(f(x)\right) = \log_a\left(g(x)\right) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
3) Y, por supuesto, la definición de logaritmo: $\log_a\left(f(x)\right) = b \Rightarrow f(x) = a^b$.

Ejemplos:
a) Si $5^{x^2-2} = 5^x \Rightarrow x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = 2$.

b) $\log(2x-5) = \log 3 \Rightarrow 2x - 5 = 3 \Rightarrow x = 4$.

c) $\ln(2x) = 3 \Rightarrow 2x = e^3 \Rightarrow x = e^3/2$.

Ecuaciones exponenciales inmediatas (no hay sumas de expresiones exponenciales)

La más sencilla es: $\underline{a^x = b}$, $a > 0$ y $b > 0$. Se resuelve aplicando logaritmos.

→ El caso $\underline{c + ka^{f(x)} = b}$ es análogo. Se resuelve despejando: $c + ka^{f(x)} = b \Rightarrow a^{f(x)} = \dfrac{b-c}{k} \Rightarrow \ldots$

En todos los casos hay que manejar correctamente las transformaciones algebraicas usuales.

Ejemplos:

a) $2^x = 15 \Rightarrow \log 2^x = \log 15 \Rightarrow x\log 2 = \log 15 \Rightarrow x = \dfrac{\log 15}{\log 2} = \dfrac{1{,}176\ldots}{0{,}301\ldots} = 3{,}90689\ldots$

b) $3 \cdot 2^{4x} + 15 = 63 \rightarrow$ (se trasponen términos y se despeja) $\rightarrow$

$3 \cdot 2^{4x} = 63 - 15 \Rightarrow 3 \cdot 2^{4x} = 48 \Rightarrow 2^{4x} = \dfrac{48}{3} \Rightarrow 2^{4x} = 16 \Rightarrow 2^{4x} = 2^4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$.

c) $\dfrac{1}{3^x} = 30 \Rightarrow 3^{-x} = 30 \Rightarrow \log 3^{-x} = \log 30 \Rightarrow -x\log 3 = \log 30 \Rightarrow x = -\dfrac{\log 30}{\log 3} = -3{,}0959\ldots$

d) $3 \cdot 5^{x^2+2} = 375 \Rightarrow 5^{x^2+2} = \dfrac{375}{3} \Rightarrow 5^{x^2+2} = 125 \Rightarrow 5^{x^2+2} = 5^3 \Rightarrow x^2 + 2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Observaciones: No son ecuaciones exponenciales, pero tienen ciertas relaciones con ellas:

1. La ecuación $\underline{a^b = x}$, con $a > 0$, es un ejercicio común de potenciación. Puede resolverse con la calculadora. Así, por ejemplo, $4^{3,2} = x \rightarrow$ con la calculadora se obtiene $x = 84{,}4885$.

2. La ecuación $\underline{x^a = b}$, con $b > 0$, es un ejercicio de radicación, pues $x^a = b \Rightarrow x = b^{\frac{1}{a}}$. Así, por ejemplo: $x^{3,2} = 15 \Rightarrow x = 15^{1/(3,2)} \approx 2{,}3309 \rightarrow$ puedes pulsar: 15^(1/3.2) = 2,330926173.

Ecuaciones logarítmicas inmediatas (no hay sumas de expresiones logarítmicas)

La más sencilla es $\underline{\log_a x = b}$. Se resuelven aplicando la definición: $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

Si las bases son 10 o e se resuelven directamente con la calculadora, aplicando antilogaritmos.

→ El caso $\underline{c + k\log f(x) = b}$ es análogo. Se resuelve despejando:

$$c + k\log f(x) = b \Rightarrow \log f(x) = \frac{b-c}{k} \Rightarrow f(x) = \text{antilog}\frac{b-c}{k} \Rightarrow \ldots$$

En todos los casos hay que manejar correctamente las transformaciones algebraicas usuales.

Ejemplos:

a) $\log_3 x = 0{,}4 \Rightarrow x = 3^{0,4} = 1{,}5518\ldots$

b) $\log x = 2{,}5 \Rightarrow x = \text{antilog } 2{,}5 \approx 316{,}2278$; $\ln x = 0{,}1 \Rightarrow x = \text{antiln } 0{,}1 \approx 1{,}052$.

c) $1 + \log 2x = 5 \Rightarrow \log 2x = 4 \Rightarrow 2x = \text{anti}\log 4 = 10000 \Rightarrow x = 5000$.

d) $\ln(x+3)^2 = -2 \Leftrightarrow 2\ln(x+3) = -2 \Leftrightarrow \ln(x+3) = -1 \Rightarrow x + 3 = e^{-1} \Rightarrow x = e^{-1} - 3$.

Observaciones: No son ecuaciones logarítmicas, pero tienen ciertas relaciones con ellas:

1. La ecuación $\underline{\log_a b = x}$. Puede resolverse aplicando la definición: $\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$. Así, por ejemplo: $\log_4 50 = x \Rightarrow 4^x = 50 \Rightarrow \log 4^x = \log 50 \Rightarrow x\log 4 = \log 50 \Rightarrow x = \dfrac{\log 50}{\log 4} = 2{,}8219$.

2. La ecuación $\underline{\log_x a = b}$. Se resuelve aplicando la definición de logaritmo. Así, por ejemplo:

$\log_x 1000 = 5 \Rightarrow x^5 = 1000 \Rightarrow x = 1000^{1/5} = 3{,}98107$.

Ecuaciones exponenciales con sumas y restas
De estas ecuaciones solo pueden resolverse las "preparadas": aquellas en las que intervengan exponenciales con la misma base o reducibles a ellas. Por ejemplo, las ecuaciones:

$4^x - 5{\cdot}2^x - 24 = 0$; $\quad 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 224$; $\quad 2{\cdot}3^x - 5{\cdot}3^{x-1} = 3$.

Para resolverlas, además de las operaciones básicas, es imprescindible conocer y manejar con destreza las propiedades de la potenciación y de los logaritmos. No hay métodos generales, pero alguna vez, suele dar resultado el cambio de variable $a^x = t$; en otras ocasiones deberá sacarse factor común; …

Ejemplos:
a) Para resolver $4^x - 5{\cdot}2^x - 24 = 0$ se hace el cambio $2^x = t$, con lo cual:

$$4^x - 5{\cdot}2^x - 24 = 0 \Leftrightarrow \left(2^2\right)^x - 5{\cdot}2^x - 24 = 0 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 5{\cdot}2^x - 24 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t - 24 = 0.$$

La última ecuación, que es de segundo grado, tiene por soluciones $t = 8$ y $t = -3$.
Para $t = 8$, se tiene $2^x = t = 8 \Rightarrow x = 3$.
Para $t = -3 \Rightarrow 2^x = t = -3$, que es imposible. En consecuencia, la solución es $x = 3$.

b) Para resolver $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 224$ debe tenerse en cuenta la propiedad $a^n{\cdot}a^m = a^{n+m}$, para después sacar factor común:

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 224 \Rightarrow 2^x + 2^x{\cdot}2 + 2^x{\cdot}2^2 = 224 \Rightarrow 2^x{\cdot}(1+2+4) = 224 \Rightarrow 2^x{\cdot}7 = 224 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x = \frac{224}{7} \Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow x = 5.$$

c) La ecuación $2{\cdot}3^x - 5{\cdot}3^{x-1} = 3^{(*)} \Leftrightarrow 2{\cdot}3^x - 5{\cdot}3^x{\cdot}3^{-1} = 3 \Leftrightarrow 2{\cdot}3^x - 5{\cdot}\frac{3^x}{3} = 3 \to$ (se quitan denominadores) $\Leftrightarrow 6{\cdot}3^x - 5{\cdot}3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$.
(*) Un posible <u>error</u> sería escribir: $2{\cdot}3^x - 5{\cdot}3^{x-1} = 3 \Rightarrow 6^x - 15^x = 9 \Rightarrow ...$

Ecuaciones logarítmicas son sumas o restas
Para resolverlas hay que transformarlas, aplicando las propiedades de los logaritmos, en alguna de las ya estudiadas.

Ejemplos:
a) $\log(x+5) - 2\log(x-4) = 1 \to$ (propiedad de la potencia) $\log(x+5) - \log(x-4)^2 = 1 \to$
$\to$ (propiedad de la resta) $\log\frac{x+5}{(x-4)^2} = 1 \to$ (por definición) $\frac{x+5}{(x-4)^2} = 10 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x+5 = 10(x-4)^2 \Rightarrow x+5 = 10(x^2 - 8x + 16) \Rightarrow 10x^2 - 81x + 155 = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ y } x = 3{,}1.$$

(El valor $x = 3{,}1$ no vale como solución: al sustituir $x = 3{,}1$ en $\log(x-4)$ no tiene sentido).

b) $\log(3x-1) + \log x = 1 \to$ (propiedad de la suma) $\log((3x-1){\cdot}x) = 1 \to$ (por definición)

$$(3x-1){\cdot}x = 10 \Rightarrow 3x^2 - x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ y } x = -5/3.$$

(La solución $x = -5/3$ no es válida: al sustituir la $x = -5/3$ en la ecuación inicial resulta log (–5/3), que no está definido).

c) $\log(x+4) + \log(x-1) = \log\left(x^2+5\right) \to$ (propiedad de la suma) $\log[(x+4){\cdot}(x-1)] = \log\left(x^2+5\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x+4){\cdot}(x-1) = x^2 + 5 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = x^2 + 5 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3.$$

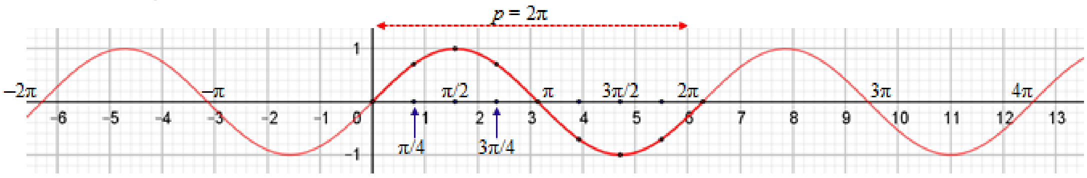
7. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

La función seno

Su expresión más sencilla es $f(x) = \text{sen}\, x \rightarrow f(x) = \sin x$.

<u>Características fundamentales</u>:

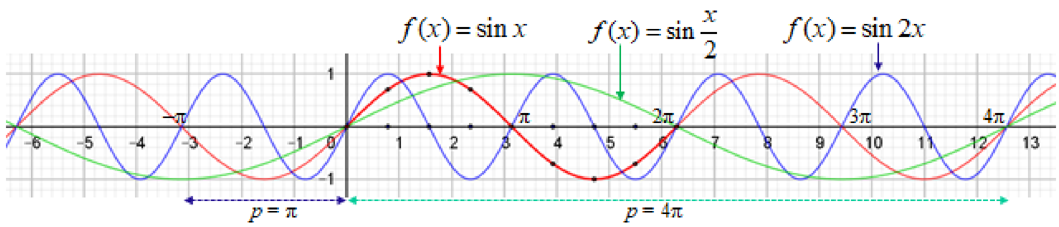
- Su dominio de definición es **R**. Por tanto, x es un número real: el ángulo se mide en radianes.
- Los valores que toma el seno varían entre –1 y 1: su recorrido es el intervalo [–1, 1].
- Es periódica de periodo $p = 2\pi$. Esto es: $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ para cualquier valor de x.
- Es una función simétrica respecto del origen. Esto es, $f(-x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x = -f(x)$.
- Su gráfica es la siguiente:



<u>Otras funciones relacionadas con la función seno</u>: La función $f(x) = \text{sen}(kx)$ contrae o dilata la función sen x. Si $k > 1$, se contrae; si $k < 1$, se dilata.

Ejemplo:

Para $k = 2$ y $k = 1/2$, se tendrían las funciones $f(x) = \sin 2x$ y $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ las gráficas son las siguientes.

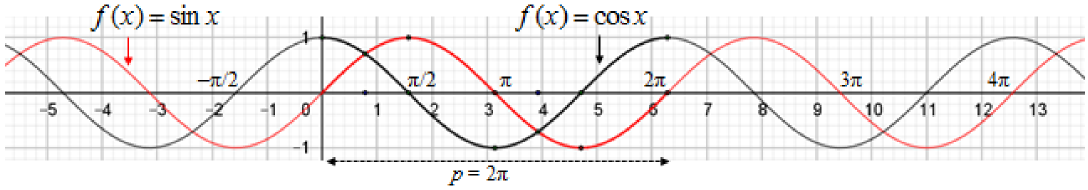


El periodo de $f(x) = \sin 2x$ es $p = \pi$; el de $f(x) = \text{sen}\frac{1}{2}x$ es $p = 4\pi$. (Véase el problema n. **39**).

<u>Advertencia</u>: $f(x) = \sin 2x$ es $f(x) = \sin(2x)$, la x se multiplica por 2. En cambio, si se escribe $f(x) = 2\sin x$ significa $f(x) = 2(\sin x)$: el valor de (sin x) se multiplica por 2.

La función coseno

Puede definir a partir del seno así: $f(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Por tanto, su gráfica será idéntica a la del seno, pero con un desfase de π/2 (se traslada π/2 a la izquierda).

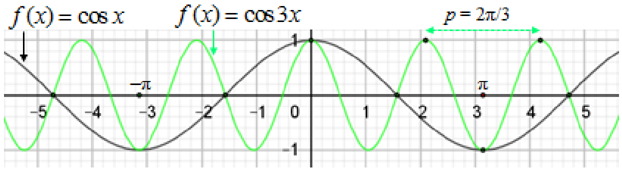


<u>Características fundamentales:</u>

- Su dominio de definición es **R**. Por tanto, como en la función seno, x es un número real
- Los valores que toma el coseno varían entre –1 y 1: su recorrido es el intervalo [–1, 1].
- Es periódica de periodo $p = 2\pi$. Esto es: $\cos x = \cos(x + 2\pi)$ para cualquier valor de x.
- Es una función simétrica respecto del eje OY. Esto es, $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$.

<u>Otras funciones relacionadas con la función coseno</u>: La función $f(x)=\cos(kx)$ contrae o dilata la función cos *x*. Si *k* > 1, se contrae; si *k* < 1, se dilata.

Ejemplo:
Para *k* = 3, la función $f(x)=\cos(3x)$ es la que se representa en la figura adjunta. Va 3 veces más rápida que $f(x)=\cos x$. Su periodo es $p=\dfrac{2\pi}{3}$.

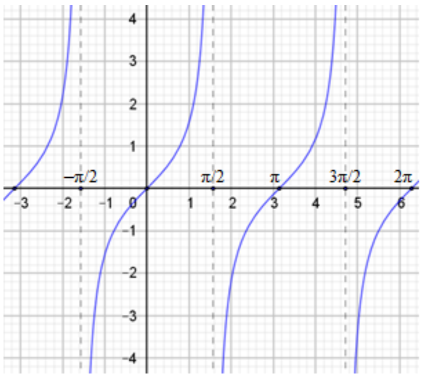


La función tangente

La función $f(x)=\text{tag } x=\tan x$ se define como: $f(x)=\text{tag } x=\dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$.

<u>Características fundamentales:</u>

- Su dominio de definición es $\mathbf{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$, pues para $x=\pm\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ se anula el denominador: $\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=0$.
- Toma valores que varían entre –∞ y +∞: su recorrido es todo **R**.
- Es periódica de periodo *p* = π. Esto es: $\text{tag } x=\text{tag }(x+\pi)$ para cualquier valor *x* de su dominio.
- Tiene por asíntotas verticales las rectas $x=\pm\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

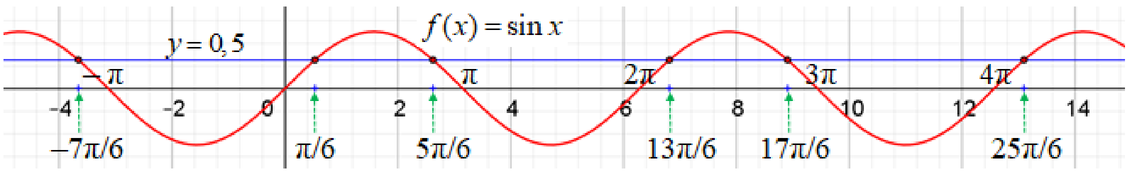


Interpretación gráfica de las soluciones de las ecuaciones trigonométricas sencillas

<u>Caso 1</u>: La ecuación $\sin x=0,5$, cuya solución en grados se halla con la calculadora, pulsando $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ 0.5 $\boxed{=}$ → se obtiene 30º; la otra solución es 180º – 30º = 150º: sin 150º = 0,5.

Todas sus soluciones son: $x=\begin{cases}30^\circ+k\cdot 360^\circ\\150^\circ+k\cdot 360^\circ\end{cases}$, *x* ∈ **Z**. Y en radianes: $x=\begin{cases}\pi/6+2k\pi\\5\pi/6+2k\pi\end{cases}$, *x* ∈ **Z**.

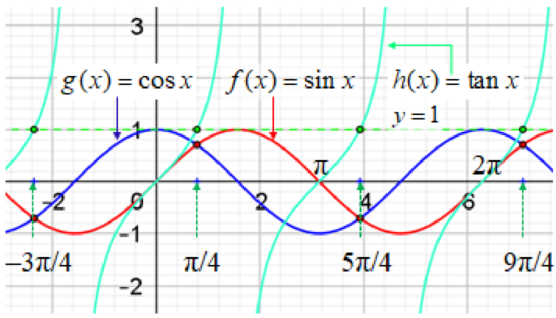
Gráficamente, estas soluciones son las abscisas de los puntos de corte de la función $f(x)=\sin x$ con la recta horizontal $y=0,5$.



<u>Caso 2</u>: Las soluciones de la ecuación $\sin x=\cos x$ son las abscisas de los puntos de corte de las gráficas asociadas a las funciones $f(x)=\sin x$ y $g(x)=\cos x$.

$$x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\[2mm]\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi\end{cases}.$$

- Estas soluciones son las mismas que las de la ecuación $\tan x=1\ \rightarrow\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$. Los cortes de $h(x)=\tan x$ con la recta horizontal $y=1$.

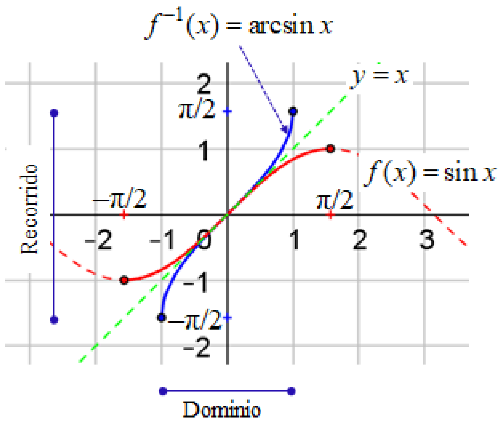


Funciones trigonométricas inversas

Estas funciones permiten hallar un número del que se conoce su seno, su coseno o su tangente.

→ En las calculadoras aparecen encima de las teclas $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ y $\boxed{\tan}$, como **$\sin^{-1}$**, **$\cos^{-1}$** y **$\tan^{-1}$**.

La forma clásica de referirse a ellas es "arcoseno" (arcsen o arcsin), "arcocoseno" (arccos) y "arcotangente" (arctag o arctan).



Función arcoseno:

Si $f(x) = \sin x$ su función inversa es $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

También se denota por $y = \sin^{-1} x$.

Se cumple que $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ y $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$.

Esto es: $\arcsin x = y \Leftrightarrow \sin y = x$.

Como la función seno toma valores entre −1 y 1, el dominio de la función arcoseno será el intervalo [−1, 1].

Su recorrido es el intervalo [−π/2, π/2].

Las gráficas de $f(x) = \sin x$ y de $y = \sin^{-1} x$ son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante, la recta $y = x$.

→ En las calculadoras esta función se activa con la tecla **$\sin^{-1}$**, pulsando $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ x $\boxed{=}$.

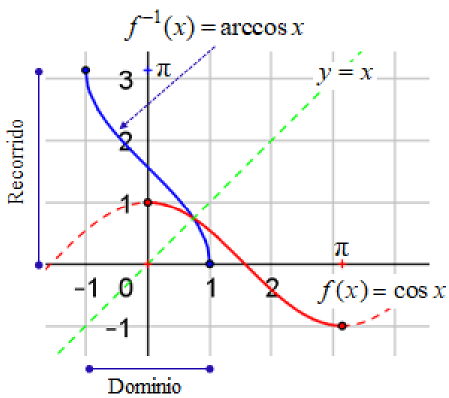
Deben ponerse en el modo RAD.

Así, por ejemplo: $\arcsin(0,5) = \frac{\pi}{6} \approx 0,5236$; $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \approx -1,5708$; $\arcsin(1,2) \to$ ERROR.

Función arcocoseno:

Si $f(x) = \cos x$ su función inversa es $f^{-1}(x) = \arccos x = \cos^{-1} x$.

Se cumple que $\arccos(\cos x) = x$ y $\cos(\arccos x) = x$.



Esto es: $\arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x$.

Como la función coseno toma valores entre −1 y 1, el dominio de la función arcoseno será el intervalo [−1, 1].

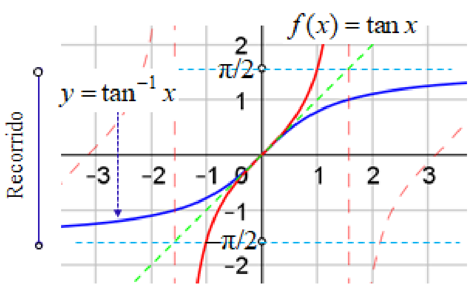
Su recorrido es el intervalo [0, π].

Las gráficas de $f(x) = \cos x$ y de $y = \cos^{-1} x$ son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

→ En las calculadoras esta función se activa con la tecla **$\cos^{-1}$**, pulsando $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\cos}$ x $\boxed{=}$.

Así, por ejemplo: $\arccos(-0,5) = \frac{2\pi}{3} \approx 2,0944$; $\arcsin(0,7) \approx 0,7954$; $\arccos(2) \to$ ERROR.

Función arcotangente:



Si $f(x) = \tan x$ su inversa es $f^{-1}(x) = \arctan x = \tan^{-1} x$.

Esto es: $\arctan x = y \Leftrightarrow \tan y = x$.

Como la función tangente toma valores entre −∞ y +∞, el dominio de la función arcotangente es el intervalo (−∞, +∞).

Su recorrido es el intervalo (−π/2, π/2).

Las gráficas de $f(x) = \tan x$ y de $y = \tan^{-1} x$ son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

→ En las calculadoras esta función se activa con la tecla **$\tan^{-1}$**, pulsando $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\tan}$ x $\boxed{=}$.

Así, por ejemplo: $\arctan(1) = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854$; $\arcsin(-4) \approx -1,3258$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Representa gráficamente las rectas de ecuación $y = -x + 2$ e $y = \frac{x}{2} - 3$.

A partir de ellas haz las gráficas de $f(x) = |-x+2|$ y $g(x) = \left|\frac{x}{2} - 3\right|$.

2. Una empresa de alquiler de coches ofrece dos tipos de contrato:
(I) Pago de una cantidad fija de 39 € y un coste adicional de 0,35 € por km recorrido.
(II) 0,48 € por km recorrido.
a) Si la persona que alquila el coche estima que va a recorrer unos 250 km, ¿qué tipo de contrato le interesa? ¿Y si espera recorrer unos 500 km?
b) ¿Cuál es el número mínimo de km que hay que recorrer para que el contrato (I) sea el más barato? Justifica tu respuesta.

3. En la ciudad de Madrid, la Tarifa 2 del servicio de taxi (que se aplicará todos los días de 21 a 07 horas y sábados, domingos y festivos de 07 a 21 horas, para el año 2020) se especifica como sigue:
Inicio servicio: 3,15 euros. Precio kilométrico: 1,35 euros/km.
a) ¿Cuánto cuesta un trayecto de 8 km?
b) Halla la función que da el precio del trayecto dependiendo de los kilómetros recorridos?

4. La función parte decimal de un número *x* se define como sigue: $Dec(x) = x - ENT[x]$.
Halla la parte decimal de –3,2, –3,89, 2, 2,3, 2,46, Con esos datos haz su representación gráfica.

5. La función $f(x) = \frac{x}{|x|}$ se suele llamar función signo. Halla algunos de sus pares y represéntala gráficamente. Defínela a trozos.

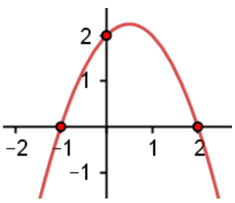
6. Estudia el comportamiento de la función $f(x) = 2 + (-1)^{ENT[x]}$ para los valores de $x \in [0, 6)$; después contesta:
a) ¿Cuál es su recorrido? b) Si es periódica indica su período.
c) Haz un esbozo de su gráfica. d) Defínela a trozos.

7. Halla los puntos de corte de las funciones cuadráticas con los ejes de coordenadas:
a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; b) $f(x) = -x^2 + 4x$; c) $f(x) = 0,5x^2 + 1$; d) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.
Indica también las coordenadas de su vértice y la ecuación de su eje de simetría.

8. Halla la función cuadrática que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (0, 6), (–1, 0) y (3, 0).

9. De una función cuadrática se conocen los puntos (1, 7), (2, 9) y (4, 1), ¿qué valor le corresponderá a *x* = 3?

10. La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde *a*, *b*, $c \in$ **R**.
Halla los valores de *a*, *b* y *c*. Indica también las coordenadas del vértice de la parábola.



11. a) Dada $f(x)=ax^3+bx^2-9x$, encuentra los valores de *a* y *b* sabiendo que $f(1)=f(-1)=0$.
b) Halla una función polinómica de cuarto grado que corte al eje *OX* en los puntos (–2, 0), (–1, 0), (1, 0) y (2, 0); y al eje *OY*, en el punto (0, 2).

12. Dada la función $f(x)=x^3+bx^2-4x+4$:
a) Halla el valor de *b* sabiendo que corta al eje *OX* en *x* = –2.
b) Supuesto que *b* = –1, indica los demás puntos de corte con los ejes. Da algunos valores más y esboza su gráfica.

13. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones; indica en cada caso los puntos de corte de cada gráfica con los ejes de coordenadas. En todos los casos, calcula el valor de la función para *x* = –1, 2 y 3, si se puede.
a) $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$; b) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}$; c) $f(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+3x}$; d) $f(x)=\dfrac{4}{x^2+1}$.

14. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:
a) $f(x)=\sqrt[3]{x-5}$; b) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$; c) $f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$; d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-6}{x}}$.
En todos los casos, calcula el valor de la función para *x* = –3, 0 y 5, si se puede.

15. Un granjero tiene 1200 metros de malla para cercar un terreno rectangular.
a) Si un lado del rectángulo mide *x* metros, ¿cuánto medirá el otro lado? ¿Cuál será el área de ese rectángulo en función de *x*?
b) Indica las dimensiones de ese rectángulo cuando *x* es igual a 100, 200 y 300 metros; comprueba que la fórmula anterior es correcta.
c) ¿Para qué valor de *x* el área del rectángulo será máxima?

16. El rendimiento intelectual, en tanto por ciento, de un estudiante, depende de los minutos que lleva estudiando. Si la función que da su rendimiento es: $R(t)=\dfrac{-1}{30}t^2+2t+70$, *t* en minutos.
a) ¿Cuál es su rendimiento al comenzar a estudiar?
b) ¿En qué momento su rendimiento es mayor? ¿Cuál es ese rendimiento?
c) Si decide descansar cuando su rendimiento está por debajo del 70 %, ¿en qué minuto debe hacerlo?

17. Durante los 11 años de funcionamiento de una empresa, sus beneficios (en millones de euros) se ajustaron a la función $B(t)=-0,3t^2+3,3t-1$, siendo $t\in[0, 11]$ es el tiempo transcurrido en años desde el momento inicial.
a) Determina en qué momento del tiempo los beneficios fueron de 2 millones de euros.
b) ¿En qué momento los beneficios fueron máximos?
c) ¿En qué periodo de tiempo la empresa tuvo ganancias?

18. Los ingresos y los costes, en euros, de una empresa vienen dados por las funciones $I(x)=50000x-4000x^2$ y $C(x)=100000+5000x$, donde *x* son miles de unidades producidas y vendidas; esto es, *x* = 1, significa 1000 unidades.
Halla:
a) Los puntos de equilibrio: en donde la empresa ni gana ni pierde.
b) La función que da el beneficio y los valores de producción en los que ese beneficio es positivo.

19. Si los costes de una empresa vienen determinados por la función $f(x)=x^2-6x+40$, donde x representa la cantidad producida de un determinado artículo, con $x\geq 0$ y $f(x)$ en euros.

a) ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo? Si el coste fuese 80 €, ¿cuántas serían las unidades producidas?
b) ¿Disminuye el coste alguna vez? ¿Cuál es el coste mínimo por artículo? ¿Cuántos artículos se producen a ese coste mínimo?
c) Representa la función y justifica nuevamente las respuestas anteriores a partir de la gráfica.

20. Representa gráficamente, dando valores a x para hallar algunos de sus puntos, las funciones:

a) $f(x)=1,4^x$; b) $f(x)=0,6^x$; c) $f(x)=-\left(1,4^x\right)$; d) $f(x)=e^{x-1}$.

Represéntalas también utilizando Google (o cualquier programa informático disponible).

21. A partir de la gráfica de $f(x)=e^x$ representa las funciones:

a) $f_1(x)=-e^x$; b) $f_2(x)=\dfrac{e^x}{2}$; c) $f_3(x)=2+e^x$; d) $f_4(x)=e^{x/2}$.

Comprueba tus resultados utilizando algún programa informático.

22. Determina el dominio de definición de las funciones:

a) $f(x)=2^{5-x}$; b) $f(x)=e^{\frac{1}{x+2}}$; c) $f(x)=e^{\frac{1}{x^2+1}}$; d) $f(x)=3^{\frac{x}{x-1}}$.

23. Halla el dominio de definición de las funciones:

a) $f(x)=\log(6-2x)$; b) $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$; c) $f(x)=x\ln x$; d) $f(x)=\log(x-1)^2$

24. Represента gráficamente, dando valores, las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{si } x<0\\ 2^x, & \text{si } x\geq 0\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{si } x<1\\ \ln x, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases}2^{x-2}, & \text{si } x\leq 2\\ x-2, & \text{si } x>2\end{cases}$.

25. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^{2x-1}=243$; b) $2^x=5$; c) $\dfrac{3^{2x}}{9}=729$; d) $3\cdot 5^{2x}=225$.

e) $xe^x=0$; f) $x\left(e^{x-2}-1\right)=0$; g) $(x+1)\left(e^x-3\right)=0$; h) $x^2e^x-2xe^x=0$.

26. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^x+2^{x+1}+2^{x+3}=88$; b) $3^x-7\cdot 3^{x-2}=18$; c) $9^x-4\cdot 3^{x+1}+27=0$;
d) $4\cdot 5^x-12\cdot 5^{x-1}=200$; e) $3^x-2\cdot 3^{x-1}=9$; f) $2^{x+1}-12\cdot 2^{1-x}=13$.

27. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log(x+5)^2=2$; b) $\log_3 x=5$; c) $\ln\left(x^2-1\right)=0$; d) $\log_x 4=-1$.

28. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $2\log(x-3)=1$; b) $\log(x+1)+\log x=\log 20$;
c) $\log(2x+2)-\log(x-3)=1$; d) $\log(x+6)-2\cdot\log(x-3)=1$.

29. La población de una determinada región crece anualmente a un ritmo del 2 %. Si actualmente tiene 750000 habitantes, ¿cuántos años han de pasar para que llegue a tener 1 millón?

30. Un equipo de fútbol de categoría regional comenzó con 100 socios. Desde su fundación el número de socios creció de manera uniforme (con crecimiento porcentual igual año a año). Si al cabo de 9 años el número de socios era de 3844, ¿a qué porcentaje creció anualmente?

31. Supongamos que la cantidad de madera de un bosque aumenta un 6 % anualmente. Si en el año 2020 había una cantidad de madera equivalente a 1000 toneladas:
a) Escribe la expresión de la función que proporciona la cantidad de madera que habrá al cabo de *x* años (desde el año 2020). ¿Qué cantidad de madera habrá en 2030?
b) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que la cantidad de madera sea doble que la del año 2020?
c) Haz la gráfica que representa la cantidad de madera a lo largo del tiempo. (En eje *OY* puede tomarse 1 = 1000 t; en el eje *OX*, *x* = 0 indica el año 2020).

32. La función que da el valor de un automóvil a partir del momento de su adquisición es $P(t) = 25000 \cdot 1,2^{-t}$, *t* en años y *P* en euros.
a) ¿Cuánto costó nuevo?
b) ¿Cuánto valdrá a los 2 años de su adquisición?
c) Representa gráficamente la función $P(t)$ en el intervalo [0, 10]. (En el eje vertical puedes adaptar la escala de manera que 1 = 5000 €).

33. Supongamos que la función que da la cantidad (en porcentaje) de un determinado fármaco presente en sangre, en mg, respecto al tiempo, en horas, desde el momento en que este es inyectado viene dada por $C(t) = 100 \cdot \left(0,85^t\right)$.
a) ¿Qué porcentaje queda al cabo de 4 horas?
b) ¿Si se supone que cuando queda en sangre menos de un 2 % de la dosis inicial el fármaco deja de hacer efecto, ¿en qué momento dejará de hacer efecto el fármaco inyectado?

34. En determinadas condiciones, una población de mosquitos crece ajustándose a la función $f(x) = 0,8 + 1,2e^{0,5x}$, donde $f(x)$ es el número de mosquitos en miles y *x* el tiempo en días desde el momento presente.
a) ¿Cuánto tiempo, en días, tardará en triplicarse la población inicial?
b) Si se mantienen las condiciones iniciales, ¿cuántos mosquitos habrá al cabo de 8 días?

35. En determinadas condiciones, una población de mosquitos crece ajustándose a la función $f(x) = \dfrac{10}{1 + 4e^{-0,5x}}$, donde $f(x)$ es el número de mosquitos en miles y *x* el tiempo en días desde el momento presente.
a) ¿Cuánto tiempo, en días, tardará en triplicarse la población inicial?
b) Si se mantiene el modelo de crecimiento, ¿cuántos mosquitos habrá al cabo de 8 días?

36. A partir de la gráfica de la función $f(x) = \sin x$, representa las funciones:

a) $f_1(x) = 2(\sin x)$; b) $f_2(x) = \sin(2x)$; c) $f_3(x) = \dfrac{\sin x}{2}$; d) $f_4(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

37. A partir de la gráfica de la función $f(x) = \sin x$, representa la función $f(x) = 2 - \sin x$.

38. A partir de la gráfica de $f(x) = \cos x$ dibuja, en el mismo intervalo [0, 4π], la gráfica de las funciones $f_1(x) = 1 + \cos x$, $f_2(x) = \cos x - 2$ y $f_3(x) = \cos(x - 2) + 3$.