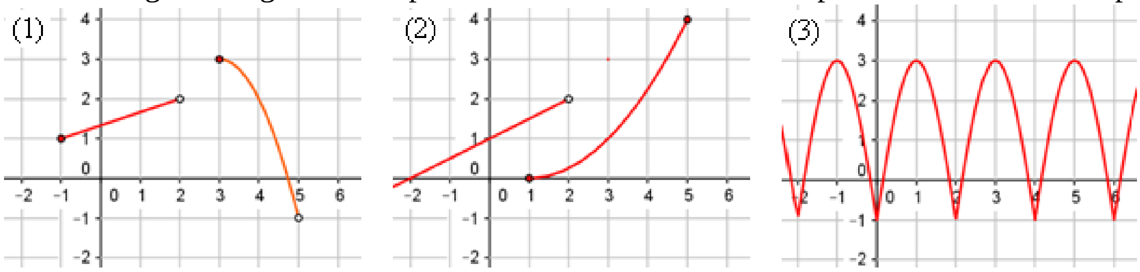
Solución de los Problemas Propuestos

1. ¿Cuál de las siguientes gráficas no puede ser la de una función? Explica brevemente tu respuesta.



Además, para cada una de las funciones, contesta a las siguientes cuestiones:
a) Determina su dominio y recorrido.
b) ¿Cuánto vale $f(-1)$ y $f(4)$?
c) Indica alguna de sus características: crecimiento o decrecimiento, continuidad, periodicidad…
Solución:
La gráfica representada en (2) no es la de una función, pues a los puntos del intervalo [1, 2) les hace corresponder dos imágenes.

a) Función (1) → Dominio = $[-1, 2) \cup [3, 5)$; Recorrido = $(-1, 3]$.
Función (3) → Dominio = **R**; Recorrido = $[-1, 3]$.

b) Función (1) → $f(-1) = 1$; $f(4) = 2$.
Función (3) → $f(-1) = 3$; $f(4) = -1$.

c) Función (1) → crece en el intervalo $[-1, 2)$; decrece en ([3, 5); tiene un máximo absoluto, en $x = 3$. No es continua; no es periódica.
Función (3) → Además de ser continua, su característica fundamental es que es periódica de periodo 2. En el ciclo [0, 2], crece desde 0 hasta 1; decrece desde 1 hasta 2. Tiene un máximo en $x = 1$; y mínimos, en los extremos.
En general:

crece en (0, 1); (2, 3); (4, 5) … → $(2n,\ 2n+1)$, para n entero.

decrece en (1, 2); (3, 4); (5. 6) … → $(2n-1,\ 2n)$, para n entero.

máximos en 1, 3, 5, … $2n - 1$.
mínimos en 0, 2, 4, … $2n$.

(Recuerda que los números pares, tanto positivos como negativos, se escriben como $2n$; los impares, como $2n - 1$ o como $2n + 1$, siendo n un número entero).

2. En la gráfica adjunta se muestra la relación entre el tiempo y la distancia recorrida en una marcha ciclista.
a) ¿Qué mide la variable independiente? ¿Y la variable dependiente?
b) ¿Qué distancia aproximada recorren en la segunda hora de carrera?
c) ¿Qué indica la parte plana de la gráfica?
d) ¿Cuál ha sido la velocidad media durante la marcha?

Solución:
a) La variable independiente mide el tiempo de duración de la marcha; la dependiente, la distancia recorrida.

b) En la segunda hora, de 1 a 2, recorren unos 10 km.

c) En ese tiempo no se mueve: han hecho un descanso en la marcha.

d) En las 4 horas que dura la marcha recorren 60 km, a una velocidad media de 15 km/h.
Podría aplicarse la fórmula de la tasa de variación media:

$$TVM[0,\ 4]=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{60}{4}=15.$$

3. Halla el dominio de definición de las funciones:

a) $f(x)=x^2-3x$; b) $f(x)=\frac{4}{x^2-3x}$; c) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+3x-4}$; d) $f(x)=\sqrt{3x-9}$.

<u>Solución</u>:

a) $f(x)=x^2-3x$ está definida siempre, para todo $x\in\mathbf{R}$. (Las funciones polinómicas siempre está definidas, pues sus imágenes se obtienen mediante sumas, restas y multiplicaciones; en ningún caso se divide por 0).

b) $f(x)=\frac{4}{x^2-3x}\to$ No está definida cuando el denominador vale 0: en $x = 0$ y en $x = 3$.
Por tanto, Dom(f) = $\mathbf{R}$ – {0, 3}.

c) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+3x-4}\to$ está definida siempre que el denominador sea distinto de 0.
$x^2+3x-4=0\Rightarrow x=-4,\ x=1\to$ Por tanto, Dom(f) = $\mathbf{R}$ – {–4, 1}.

d) $f(x)=\sqrt{3x-9}$ está definida siempre que $3x-9\geq 0\Rightarrow x\geq 3$. Dom($f$) = [3, +∞).

4. Para cada una de las funciones anteriores, halla:
a) La imagen de los números –1, 0, 2 y 3.
b) Los puntos en los que la imagen vale 0.
<u>Solución</u>:

a) Para $f(x)=x^2-3x\to f(-1)=(-1)^2-3\cdot(-1)=4$; $f(0)=0$; $f(2)=4-6=-2$; $f(3)=9-9=0$.

Para $f(x)=\frac{4}{x^2-3x}\to f(-1)=\frac{4}{4}=1$; $f(0)=\frac{4}{0}$, no está definida; $f(2)=\frac{4}{-2}=-2$; $f(3)=\frac{4}{0}$, no existe.

Para $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+3x-4}\to$

$$f(-1)=\frac{-3}{1-3-4}=\frac{-3}{-6}=0,5;\ f(0)=\frac{4}{-4}=-1;\ f(2)=\frac{0}{6}=0;\ f(3)=\frac{9-4}{9+9-4}=\frac{5}{14}.$$

Para $f(x)=\sqrt{3x-9}\to f(-1)=\sqrt{-3-9}$, no existe; $f(0)=\sqrt{-9}$, no existe; $f(2)=\sqrt{-3}$, no existe; $f(3)=\sqrt{9-9}=\sqrt{0}=0$.

b) En todos los casos son las soluciones de la ecuación $f(x)=0$.

Para $f(x)=x^2-3x\to x^2-3x=0\Rightarrow x = 0, x = 3$.

Para $f(x)=\frac{4}{x^2-3x}\to\frac{4}{x^2-3x}=0$, no tiene solución. Ningún punto se transforma en 0: el valor 0 no pertenece a la su imagen.

Para $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+3x-4} \to \dfrac{x^2-4}{x^2+3x-4}=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=-2,\ x=2$.

Para $f(x)=\sqrt{3x-9} \to \sqrt{3x-9}=0 \Rightarrow 3x-9=0 \Rightarrow x=3$.

5. Halla el dominio de definición de las funciones:

a) $f(x)=-x^3+4x^2+3$; b) $g(x)=\dfrac{4x+3}{5x+3}$; c) $h(x)=\sqrt{16-2x}$; d) $k(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$.

Solución:

a) Es una función polinómica; está definida en todo **R**.

b) La expresión $g(x)=\dfrac{4x+3}{5x+3}$ no está definida cuando $5x+3=0 \Rightarrow x=-\dfrac{3}{5}$.

Por tanto, Dom(g) = **R** – {–3/5}.

c) $h(x)=\sqrt{16-2x}$ está definida siempre que $16-2x\ge 0 \Rightarrow x\le 8$. Dom($h$) = [0, +∞).

d) $k(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$ está definida para todos los valores de x que verifiquen la inecuación $x^2-3x+2\ge 0$. Resolviendo $x^2-3x+2=(x-1)\cdot(x-2)\ge 0$, se obtiene que el conjunto solución es $(-\infty,1]\cup[2,\infty)$. Por tanto, Dom($k$) = $(-\infty,1]\cup[2,\infty)$.

6. Para cada una de las siguientes funciones calcula $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(4)$. Si en algún caso no puede determinarse su valor, indica el motivo.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{si } x<2 \\ x-1, & \text{si } x\ge 2\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases} 1/x, & \text{si } x<0 \\ 1/(x-2), & \text{si } x>0\end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases} 2, & \text{si } x<1 \\ 2x+1, & \text{si } 1\le x\le 3\end{cases}$.

Solución:

a) Para $x<2$, $f(x)=x^2+1 \to f(-2)=(-2)^2+1=5$; $f(0)=1$; $f(1)=1+1=2$.

Para $x\ge 2$, $f(x)=x-1 \to f(2)=2-1=1$; $f(4)=4-1=3$.

b) Para $x<0$, $f(x)=\dfrac{1}{x} \to f(-2)=\dfrac{1}{-2}=-0,5$. En $x=0$ no está definida $\to f(0)$ no existe.

Para $x>0$, $f(x)=\dfrac{1}{x-2} \to f(1)=\dfrac{1}{1-2}=-1$; $f(2)=\dfrac{1}{2-2}=\dfrac{1}{0}$, no está definida; $f(4)=\dfrac{1}{2}$.

c) Para $x<1$, $f(x)=2 \to f(-2)=2$; $f(0)=2$.

Para $1\le x\le 3$, $f(x)=2x+1 \to f(1)=2+1=3$ $f(2)=4+1=5$; $f(4)$ no está definida.

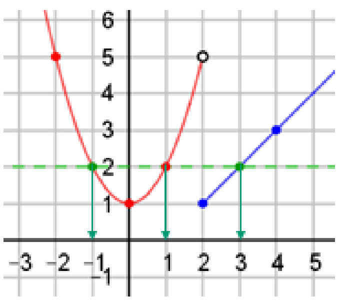
7. a) Representa, calculando algunos de sus puntos, la gráfica de la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{si } x<2 \\ x-1, & \text{si } x\ge 2\end{cases}$.

b) Observando la gráfica contesta:

b1) ¿Es una función continua? b2) ¿Para qué valores de x se cumple que $f(x)=2$?

Solución:

a) Por el problema anterior se sabe que la gráfica pasa por los puntos:
(–2, 5); (0, 1); (1, 2); (2, 1); (4, 3)



b1) La función no es continua en $x=2$: tiene un salto.

b2) Se traza una horizontal por $y=2$ y se observan los cortes con la gráfica.

Hay tres valores de x que se transforman en 2: $f^{-1}(2)=\{-1,\ 1,\ 3\}$.

Puede verse algebraicamente:
$\to$ Para $x < 2$, $f(x)=x^2+1 \ \to\ x^2+1=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=-1; x=1$.
$\to$ Para $x \geq 2$, $f(x)=x-1 \ \to; x-1=2 \Rightarrow x=3$.

8. Representa dando valores la función $f(x)=\begin{cases} x^2-2, & \text{si } x\leq 1 \\ x-1, & \text{si } 1<x\leq 4 \\ \dfrac{12}{x}, & \text{si } x>4 \end{cases}$.
A partir de su gráfica indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, y sus máximos y mínimos, si los tiene; sus discontinuidades y sus asíntotas, si las tiene.
Solución:
Su dominio es todo **R**, pero actúa de tres maneras diferentes, dependiendo de en qué intervalo esté la variable independiente. Es una función definida a trozos.

- Para todo $x\in(-\infty,\ 1]$, la función que interviene es una parábola, $f(x)=x^2-2$.

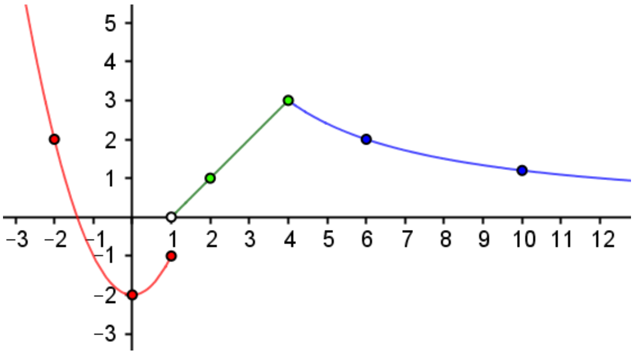
Puntos:
$f(-2)=2$, (−2, 2); $f(0)=-2$, (0, −2); $f(1)=-1$, (1, −1).

- Para todo $x\in(1,\ 4]$, la función que interviene es $f(x)=x-1$.

Puntos: $f(2)=1$, (2, 1); $f(4)=3$, (4, 3).
$\to$ En el punto x = 1 hay que sustituir en $f(x)=x^2-2$; pero, para valores de x próximos a 1 y situados a su derecha, la función es $f(x)=x-1$. Así, $f(1{,}01)=1{,}01-1=0{,}01$: cuando x es un poco mayor que 1, la función toma valores próximos a 0. Es obvio que la función da un salto en x = 1: no es continua en ese punto.

- Para todo $x\in(4,\ +\infty)$, la función que interviene es $f(x)=\dfrac{12}{x}$.

Puntos: $f(6)=2$, (6, 2); $f(10)=1{,}2$, (10, 1,2)



$\to$ En el punto x = 4: aunque para el estudio de la continuidad se precisa el concepto de límite, de momento puede verse que "a una variación pequeña de x le corresponde una variación pequeña de $f(x)$". Así, en el punto x = 4, y a su izquierda, hay que sustituir en $f(x)=x-1$, siendo $f(4)=3$; pero, inmediatamente a su derecha hay que sustituir en $f(x)=\dfrac{12}{x}$, siendo $f(4{,}01)=\dfrac{12}{4{,}01}\approx 2{,}993$, valor muy próximo a 3. Luego, *puede concluirse* que la función es continua en x = 4.
Su gráfica es la adjunta.

La función es:
decreciente si $x\in(-\infty,\ 0)\cup(4,\ +\infty)$; creciente si $x\in(0,\ 4)$.
En x = 0 tiene un mínimo, que es absoluto. En x = 4 tiene un máximo relativo.
La recta y = 0, el eje OX es asíntota horizontal hacia +∞.

9. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en los intervalos que se dan:

a) $f(x)=2x-1$, en [0, 3]; b) $g(x)=\dfrac{6}{x}$, en [1, 6]; c) $h(x)=-0,5x^2+4x+1$, en [2, 4].

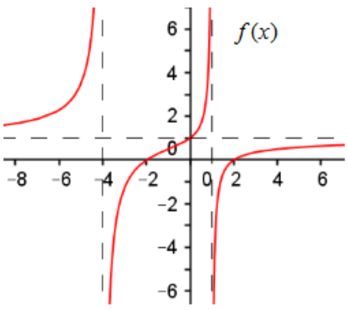
<u>Solución</u>:

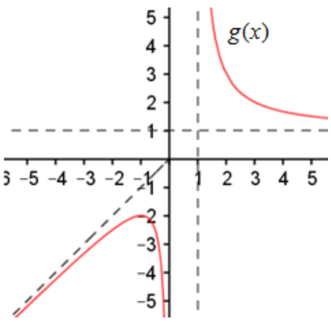
La tasa de variación media en el intervalo [a, b] se define como: $TVM[a,b]=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

a) $TVM[0,\ 3]=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{3-(-1)}{3}=\dfrac{4}{3}$.

b) $TVM[1,\ 6]=\dfrac{g(6)-g(1)}{6-1}=\dfrac{1-6}{5}=-1$. c) $TVM[2,\ 4]=\dfrac{h(4)-h(2)}{4-2}=\dfrac{9-7}{2}=1$.

10. Para las funciones representadas en las figuras adjuntas, determina:
a) Su dominio y recorrido.
b) La ecuación de sus asíntotas.
c) Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Sus máximos y mínimos, si los tiene, indicando las coordenadas de dichos puntos.





<u>Solución</u>:

→ Para calcular el dominio se recorre el eje *OX* de izquierda a derecha, observando qué valores tienen imagen. En la práctica se trazan rectas verticales sobre el eje *OX* y se observa cuáles cortan a la gráfica.

→ Para calcular el recorrido se recorre el eje *OY* de abajo arriba, observando qué valores son imagen de algún valor del eje *OX*. Para detectarlo con rapidez se trazan rectas horizontales sobre el eje *OY* para ver cuáles cortan a la gráfica.

→ Las asíntotas son las líneas de trazos que se han dibujado.

- Función $f(x)$:

a) Está definida en todos los puntos, menos en $x = -4$ y $x = 1$.
Su dominio puede expresarse así: Dom(f) = **R** – {–4, 1}; Dom(f) = (–∞, –4) ∪ (–4, 1) ∪ (1, +∞).
Recorrido: todos los números reales, **R**.
b) Las asíntotas son las líneas de trazos que se han dibujado.
Las verticales pasan por las abscisas –4 y 1. Son las rectas de ecuaciones $x=-4$ y $x=1$.
La horizontal pasa por la ordenada 1. Su ecuación es $y=1$.
c) La función es creciente en todo su dominio. Al aumentar la x en cada uno de los tres intervalos abiertos en los que está definida [x ∈ (–∞, –4) ∪ (–4, 1) ∪ (1, +∞)], la función tomas valores más grandes.
d) No tiene máximos ni mínimos.

- Función $g(x)$:

a) Dominio: (–∞, 0) ∪ (1, +∞). Recorrido: (–∞, –2] ∪ (1, +∞).
b) Asíntotas:
Verticales: $x=0$ y $x=1$. Horizontal: $y=1$. Oblicua: $y=x$, hacia la izquierda (hacia –∞).
c) Crecimiento: $x\in(-\infty,\ -1)$. Decrecimiento: $x\in(-1,\ 0)\cup(1,\ +\infty)$.
d) Tiene un máximo en la abscisa $x = -1$, su valor es $g(-1)=-2$: punto (–1, –2).

11. Utilizando las definiciones comprueba que la función $f(x)=x^2+2x$:
a) Es creciente en $x = 1$.
b) Es decreciente en $x = -2$.
c) Tiene un mínimo en $x = -1$.
<u>Solución</u>:
a) Hay que ver que $f(1-h)\le f(1)\le f(1+h)$, para h positivo y pequeño.
Se tiene:

$$f(1-h)=(1-h)^2+2(1-h)=3-4h+h^2 \to f(1-h)=3-h(4-h);$$
$$f(1)=3;$$
$$f(1+h)=(1+h)^2+2(1+h)=3+4h+h^2 \to f(1+h)=3+h(4+h).$$

Para h positivo y pequeño:

$$h(4-h)>0 \Rightarrow f(1-h)=3-h(4-h)<3;\ f(1+h)=3+h(4+h)>3.$$

b) Hay que ver que $f(-2-h)\ge f(-2)\ge f(-2+h)$, para h positivo y pequeño.

$f(-2-h)=(-2-h)^2+2(-2-h)=2h+h^2=h(2+h)>0$ (producto de positivos);
$f(-2)=0$;
$f(-2+h)=(-2+h)^2+2(-2+h)=h^2-2h=h(h-2)<0$ (producto de + por –).

c) Hay que ver que $f(-1-h)\ge f(-1)\le f(-1+h)$, para h positivo y pequeño.

$f(-1-h)=h^2-1>-1$, pues $h^2>0$;
$f(-1)=-1$;
$f(-1+h)=h^2-1>-1$

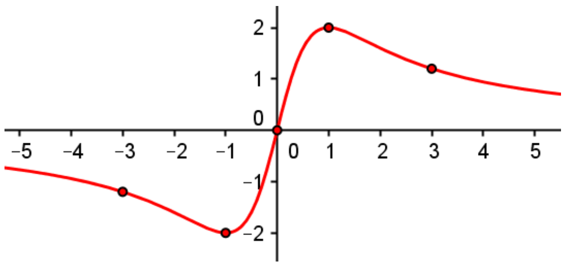
Efectivamente, se cumple lo indicado.

12. Dibuja una función que cumpla las siguientes condiciones:
1) Está definida para todo número real.
2) Es simétrica respecto del origen de coordenadas.
3) Tiene un máximo absoluto en el punto (1, 2); otro de sus puntos es (3, 1,2).
4) Tiene el eje de abscisas como asíntota horizontal.
Da, al menos, tres puntos más de su gráfica; indica también su recorrido.
<u>Solución</u>:
Si es simétrica respecto del origen, entonces $f(-x)=-f(x)$.
Por tanto: $f(-1)=-f(1)=-2$. En consecuencia, el punto (–1, –2) será el mínimo absoluto de la función.
Por lo mismo, otro de sus puntos es (–3, –1,2). También debe pasar por el punto (0, 0).

Como el eje *OX*, la recta $y = 0$, es asíntota horizontal, la función se pegará cada vez más al eje: tomando valores muy próximos a 0, tanto hacia –∞ como hacia +∞.

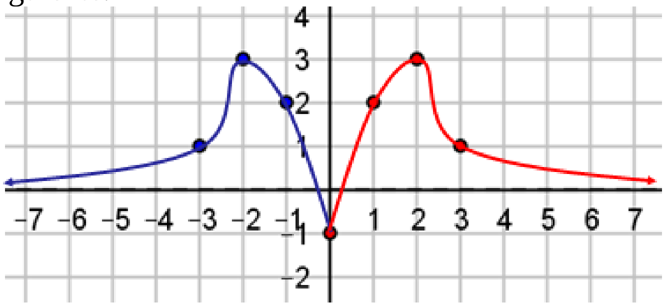
Los tres puntos más que se han dado son: (–1, –2), (–3, –1,2) y (0, 0).

Una de las posibilidades gráficas es la que se da en la figura adjunta.



13. Dibuja una función f sabiendo que:
1) Es simétrica respecto del eje OY.
2) Está definida en todo **R**.
3) Cumple que: $f(0) = -1$; $f(1) = 2$; $f(2) = 3$ y $f(3) = 1$.
4) En $x = 0$ y $x = 2$ tiene, respectivamente, sus valores mínimos y máximos.
5) Crece en el intervalo (0, 2); decrece a partir de $x = 2$.
6) Tiene el eje OX como asíntota horizontal.

Solución:
Puntos de la función son: (0, –1), (1, 2), (2, 3) y (3, 1).
Por ser simétrica respecto de OY (el eje actúa como un "espejo"), entonces, también son de la función los puntos (–1, 2), (–2, 3) y (– 3, 1). Por la misma razón alcanza otro máximo para $x = -2$, punto (–2, 3). Además, será creciente en el intervalo $(-\infty, -2)$; y decreciente en el intervalo (–2, 0).
Su gráfica puede ser la siguiente.

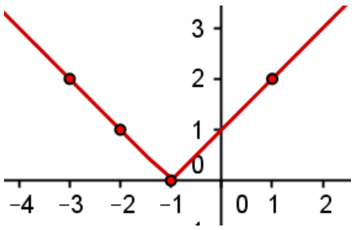


14. Expresa como una función definida a trozos la función $f(x) = |x+1|$. Haz su gráfica.

Solución:
El valor de $x + 1$ cambia de signo en $x = -1$, siendo negativo a su izquierda; por tanto:

$$f(x) = |x+1| = \begin{cases} -(x+1), & \text{si } x < -1 \\ x+1, & \text{si } x \geq -1 \end{cases}.$$

Su gráfica está formada por dos semirrectas.
Puntos:
Para $x < -1$: (–3, 2); (–2, 1).
Para $x \geq -1$: (–1, 0); (1, 2).



15. Dada la función $f(x) = x-2$, halla la expresión de las siguientes funciones asociadas a ella:
a) $-f(x)$; b) $f(-x)$; c) $|f(x)|$; d) $f(x-4)$.
A partir de la gráfica de $f(x)$ haz la gráfica de las otras funciones.

Solución:
a) $-f(x) = -(x-2) = -x+2$.

b) Se sustituye x por $-x$: $f(-x) = (-x)-2 = -x-2$.

c) Como $f(x) = x-2 = 0$ si $x = 2$, se observa que: $\begin{cases} \text{si } x < 2, & x-2 < 0 \\ \text{si } x \geq 2, & x-2 \geq 0 \end{cases}$. En consecuencia, hay que cambiar el signo cuando $x < 2$. Luego,

$$|f(x)| = \begin{cases} -(x-2), & \text{si } x < 2 \\ x-2, & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow |f(x)| = \begin{cases} -x+2, & \text{si } x < 2 \\ x-2, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$

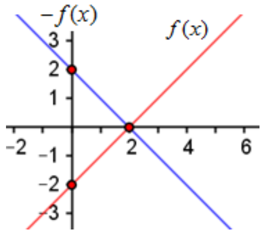
d) Se cambia x por $x-4$: $f(x-4) = (x-4)-2 = x-6$

16. A partir de la gráfica de $f(x)=x-2$ haz la gráfica de:

a) $-f(x)$; b) $f(-x)$; c) $|f(x)|$; d) $f(x-4)$.

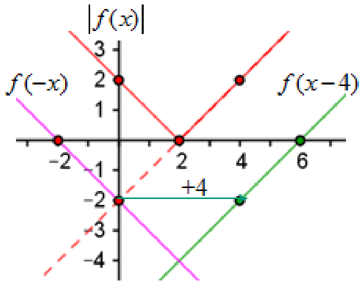
Solución:

La gráfica de $f(x)=x-2$ es la recta que pasa por los puntos (0, –2) y (2, 0).
Por tanto:



a) La gráfica de $-f(x)$ es la simétrica de $f(x)=x-2$ respecto del eje OX: se obtiene girando (“volteando”) $f(x)$ alrededor de OX.

b) La función $f(-x)=(-x)-2=-x-2 = -f(x)-4$.
Se obtiene bajando 4 unidades la gráfica de $-f(x)$.



c) La gráfica de $|f(x)|$ se obtiene “volteando” la imagen negativa de $f(x)$: lo negativo se hace positivo.

d) La gráfica de $f(x-4)$ se obtiene trasladando 4 unidades hacia la derecha la de $f(x)$.

17. Halla la expresión algebraica de cada una de las funciones que se obtienen al trasladar la función $y=f(x)=x^2-3x$ según el vector que se indica:

a) $\vec{a}$ = (0, 3); b) $\vec{b}$ = (–1, 0); c) $\vec{c}$ = (3, 2).

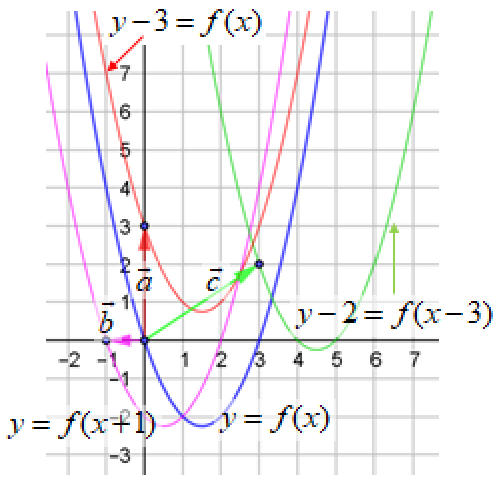
Solución:

La traslación de vector $\vec{v}=(x_0,\ y_0)$ transforma el punto $P(x, y)$ en otro $P'(x',\ y')$, siendo:

$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$. (Puede verse en Tema 9. Vectores: cambio de ejes).

Luego $y=f(x) \rightarrow y'=f(x') \Leftrightarrow y-y_0=f(x-x_0)$.

Por tanto:



a) Para $\vec{a}$ = (0, 3) se tiene: $\begin{cases} x' = x \\ y' = y-3 \end{cases}$.

La función trasladada es $y-3=f(x)=x^2-3x \Rightarrow$

$\Rightarrow y=x^2-3x+3$.

Todos los puntos de $y=f(x)$ se trasladan 3 unidades hacia arriba.

b) Para $\vec{b}$ = (–1, 0) se tiene: $\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y \end{cases}$.

La función trasladada es:

$y=f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1) \Leftrightarrow y=x^2-x-2$.

Todos los puntos de $y=f(x)$ se trasladan 1 unidad hacia la izquierda.

c) Para $\vec{c}$ = (3, 2), se tiene: $\begin{cases} x' = x-3 \\ y' = y-2 \end{cases}$. La función trasladada es:

$y-2=f(x-3)=(x-3)^2-3(x-3) \Leftrightarrow y=x^2-9x+20$.

18. Estudia, aplicando la definición, la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^4-x^2$; b) $g(x)=x^3-x-1$; c) $h(x)=-\dfrac{x}{x^2+1}$.

Solución:
Recuerda:

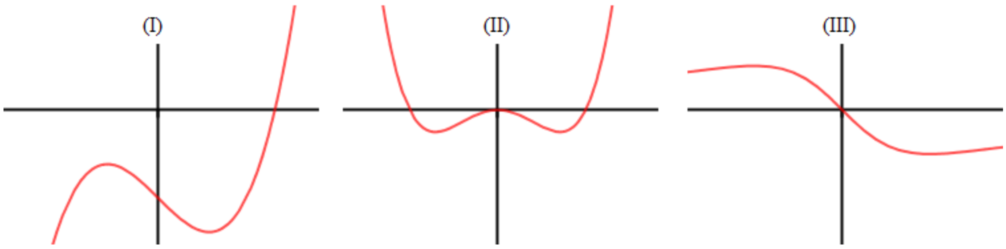
- Funciones pares: son simétricas respecto del eje OY; cumplen que $f(-x)=f(x)$.
- Funciones impares: son simétricas respecto del origen, que es el centro de simetría; cumplen que $f(-x)=-f(x)$.

a) $f(-x)=(-x)^4-(-x)^2=x^4-x^2=f(x)$ $\rightarrow$ función par: simétrica respecto del eje OY.

b) $g(-x)=(-x)^3-(-x)-1=-x^3+x-1\neq \pm g(x)$ $\rightarrow$ no es simétrica.

c) $h(-x)=-\dfrac{(-x)}{(-x)^2+1}=-\dfrac{-x}{x^2+1}=\dfrac{x}{x^2+1}=-h(x)$ $\rightarrow$ función impar: simétrica respecto del origen.

19. Las siguientes gráficas corresponden a las funciones del problema anterior.
a) Atendiendo al estudio realizado sobre su simetría, emparéjalas con su expresión algebraica.
b) Halla los puntos de corte de cada una de las gráficas con los ejes de coordenadas. Marca en cada caso el valor de la función en los puntos $x = -1$
c) ¿Alguna de esas funciones tiene asíntotas?



Solución:
a) La función (I) no es simétrica. Por tanto, debe corresponderse con $g(x)$.
La función (II) es simétrica respecto del eje OY: se corresponde con $f(x)$.
La función (III) es simétrica respecto del origen: se corresponde con $h(x)$.

b) Corte con el eje OX: se hace $y = 0$; corte con el eje OY: se hace $x = 0$.

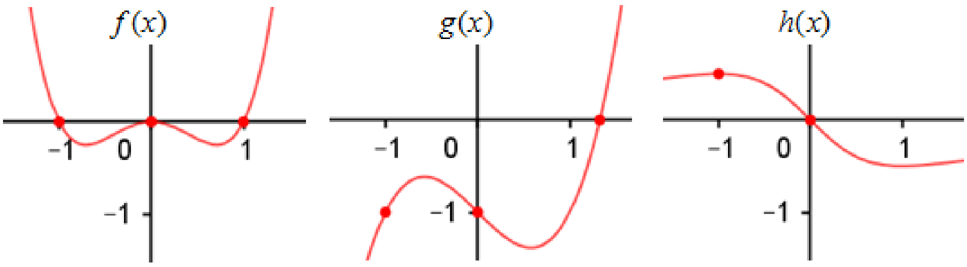
- $f(x)=x^4-x^2 \rightarrow 0=x^4-x^2 \Rightarrow 0=x^2\left(x^2-1\right) \Rightarrow x=0; x=-1; x=1$.

Puntos (0, 0), (–1, 0); (1, 0).
Si $x = 0$, $f(0)=0$, punto (0, 0).

- $g(x)=x^3-x-1 \rightarrow 0=x^3-x-1$: esta ecuación no puede resolverse, pues no tiene ninguna solución entera. Una solución aproximada es $x = 1,32$.

Si $x = 0$, $g(0)=-1$, punto (0, –1).

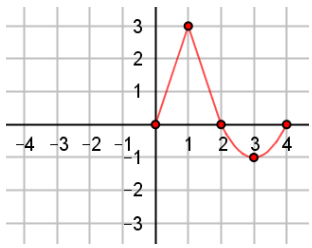
- $h(x)=-\dfrac{x}{x^2+1} \rightarrow 0=-\dfrac{x}{x^2+1} \Rightarrow x=0$. Punto (0, 0).



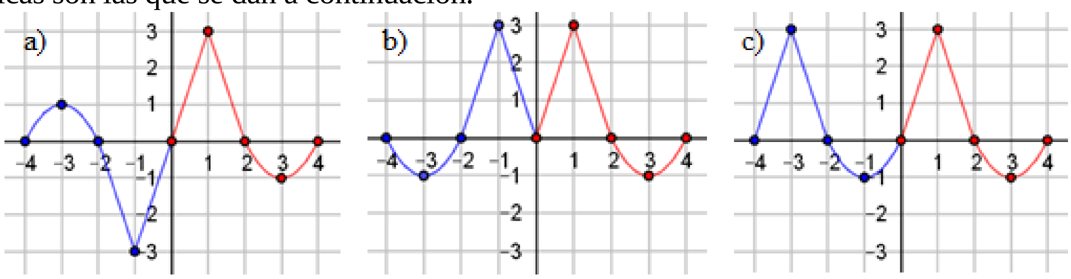
c) La función $h(x)$ toma valores más próximos a 0 cuando x se hace muy grande. Puede comprobarse que $h(10) = -\frac{10}{10^2+1} = -\frac{10}{101} = -0,099$; $h(100) = -\frac{100}{10001} = -0,0099$.
Hacia la izquierda, hacia –∞, como la función es impar, sucede lo mismo (pero en positivo).
Sea como sea, hacía cualquiera de los dos lados (hacia +∞ y hacia –∞) la función toma valores cada vez más próximos a 0: eso significa que el eje *OX* es asíntota horizontal de la función.

Nota: Solo la función $f(x) = 0$ puede ser, a la vez, par e impar. Por esa razón, si se ha detectado una de las dos simetrías, no es necesario estudiar la otra.

20. Completa, trazando la parte que falta en cada caso, la gráfica de la función dada para que sea:
a) Simétrica respecto del origen.
b) Simétrica respecto del eje *OY*.
c) Periódica.
d) Si es periódica, ¿cuánto valdrá la función en *x* = 5?; ¿y en *x* = 35?



Solución:
Las gráficas son las que se dan a continuación.



Observa:
a) Simétrica respecto del origen (función impar), $f(-x) = -f(x)$:
$f(1) = 3 \Rightarrow f(-1) = -3$; $f(2) = 0 \Rightarrow f(-2) = 0$; $f(3) = -1 \Rightarrow f(-3) = 1$; $f(4) = 0 \Rightarrow f(-4) = 0$.

b) Simétrica respecto del eje *OY* (función par), $f(-x) = f(x)$:
$f(1) = 3 \Rightarrow f(-1) = 3$; $f(2) = 0 \Rightarrow f(-2) = 0$; $f(3) = -1 \Rightarrow f(-3) = 1$; $f(4) = 0 \Rightarrow f(-4) = 0$.

c) Periódica de periodo 4, $f(x-4) = f(x) = f(x+4)$:
$f(0) = 0 \Rightarrow f(-4) = 0$; $f(1) = 3 \Rightarrow f(-3) = 3$; $f(2) = 0 \Rightarrow f(-2) = 0$; $f(3) = -1 \Rightarrow f(-1) = -1$.

d) $f(5) = f(1) = 3$; $f(35) = f(32+3) = f(3) = -1$.

21. Dadas las funciones $f(x)=2x$ y $g(x)=\dfrac{2}{x-1}$. Halla:

a) Las funciones compuestas: $g(f(x))$ y $f(g(x))$. Indica su dominio.

b) $g(f(1))$, $g(f(4))$, $f(g(3))$ y $f(g(1))$.

<u>Solución</u>:

a) $g(f(x))=\dfrac{2}{f(x)-1}=\dfrac{2}{2x-1}$.

Está definida siempre que $2x-1\neq 0 \Rightarrow$ su dominio es **R** $-\{1/2\}$.

$\rightarrow$ $f(g(x))=2\cdot g(x)=2\cdot\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{4}{x-1}$

Está definida siempre que $x-1\neq 0 \Rightarrow$ su dominio es **R** $-\{1\}$.

b) $g(f(1))=\dfrac{2}{2\cdot 1-1}=2$; $g(f(4))=\dfrac{2}{2\cdot 4-1}=\dfrac{2}{7}$;

$f(g(3))=\dfrac{4}{3-1}=2$; $f(g(1))=\dfrac{4}{1-1}$: no está definida.

22. a) Halla la función inversa de $f(x)=-2x+3$.

b) Comprueba, paso a paso, que $f\left(f^{-1}(4)\right)=4$. ¿Cuánto vale $f^{-1}\left(f(5)\right)$?

<u>Solución</u>:

a) Por definición, si f^{-1} es la inversa de *f*, se cumple que $f\left(f^{-1}(x)\right)=x \Rightarrow$

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=-2f^{-1}(x)+3=x\Rightarrow 2f^{-1}(x)=3-x\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3-x}{2}.$$

<u>Observación</u>: Cambiando *x* por *y*, de $y=-2x+3\rightarrow x=-2y+3\Rightarrow 2y=3-x\Rightarrow y=\dfrac{3-x}{2}$.

b) Efectivamente, $f\left(f^{-1}(4)\right)=f\left(\dfrac{3-4}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+3=1+3=4$.

Evidentemente, $f^{-1}\left(f(5)\right)=5$, por definición de inversa.

También puede verse paso a paso:

$$f^{-1}\left(f(5)\right)=f^{-1}\left(-2\cdot 5+3\right)=f^{-1}\left(-7\right)=\frac{3-(-7)}{2}=5.$$

23. Dadas $f(x)=x^2-2x$ y $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$, halla:

a) $f\left(g(2)\right)$ y $g\left(f(-1)\right)$; b) El dominio de $f\left(g(x)\right)$; c) La función inversa de $g(x)$.

<u>Solución</u>:

a) $f\left(g(2)\right)=f\left(-1\right)=1+2=3$. $g\left(f(-1)\right)=g(3)=\dfrac{1}{0}\rightarrow$ no está definido.

b) $f\left(g(x)\right)=\left(g(x)\right)^2-2\cdot g(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}-2\cdot\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{5-2x}{(x-3)^2}$ $\rightarrow$ Su dominio es **R** $-\{3\}$.

c) Si y es la inversa de *g* $\Rightarrow g(y)=x\Rightarrow\dfrac{1}{y-3}=x\Rightarrow\dfrac{1}{x}=y-3\Rightarrow y=\dfrac{1}{x}+3$.

24. Dadas $f(x)=x^2-3x+4$ y $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, halla:

a) $f\left(g(0)\right)$ y $g\left(f(-1)\right)$; b) El dominio de $f\left(g(x)\right)$; c) La función inversa de $g(x)$.

<u>Solución</u>:

a) Como $g(0)=1 \Rightarrow f\left(g(0)\right)=f\left(1\right)=1-3+4=2$.

Como $f(-1)=8 \Rightarrow g\left(f(-1)\right)=g(8)=\dfrac{1}{\sqrt{8+1}}=\dfrac{1}{3}$.

b) $f\left(g(x)\right)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2-3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+4=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{\sqrt{x+1}}+4=\dfrac{1-3\sqrt{x+1}+4\left(x+1\right)}{x+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(g(x)\right)=\dfrac{4x+5-3\sqrt{x+1}}{x+1} \to$ como $\sqrt{x+1}$ está definida para $x\geq -1$ y el denominador, $x+1$ no puede valer 0, su dominio está formado por los números reales $x > -1$: Dom = $(-1, +\infty)$.

c) Si y es la inversa de $g \Rightarrow g(y)=x \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{y+1}}=x \Rightarrow \dfrac{1}{x}=\sqrt{y+1} \Rightarrow \dfrac{1}{x^2}=y+1 \Rightarrow y=\dfrac{1}{x^2}-1$.

25. Para $f(x)=x^2+4x$, calcula: $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(-3)$, $f^{-1}(-4)$ y $f^{-1}(-5)$

<u>Solución</u>:

Recuerda: para hallar $f^{-1}(y_0)$ se resuelve la ecuación $f(x)=y_0$.

- $f^{-1}(0) \to$ Las soluciones de $x^2+4x=0$ son $x = 0$, $x = -4 \Rightarrow f^{-1}(0)=\{-4,\ 0\}$.
- $f^{-1}(-3) \to x^2+4x=-3 \Leftrightarrow x^2+4x+3=0 \Rightarrow x=-3, x=-1 \Rightarrow f^{-1}(-3)=\{-3,\ -1\}$.
- $f^{-1}(-4) \to x^2+4x=-4 \Leftrightarrow x^2+4x+4=0 \Rightarrow x=-2$, doble $\Rightarrow f^{-1}(-4)=-2$.
- $f^{-1}(-5) \to x^2+4x=-5 \Leftrightarrow x^2+4x+5=0$, no tiene solución. Por tanto $f^{-1}(-5)$ no existe.

Esto significa que -5 no es del recorrido de la función.

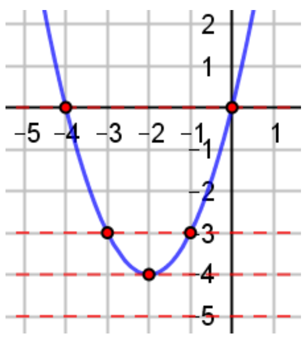
26. Representa la función $f(x)=x^2+4x$ e interpreta gráficamente el resultado del problema anterior.

<u>Solución</u>:

La gráfica de *f* es la parábola de la figura.

Algunos puntos son:

x	–4	–3	–2	–1	0
$f(x)=x^2+4x$	0	–3	–4	–3	0
Puntos	(–4, 0)	(–3, –3)	(–2, –4)	(–1, –3)	(0, 0)



Trazando las rectas horizontales $y = 0$, $y = -3$ e $y = -4$, se ve que cortan a la parábola en los puntos de abscisa –4 y 0, –3 y –1, y –4, respectivamente. Esos valores son, también respectivamente, las soluciones de $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(-3)$ y $f^{-1}(-4)$.

Como la recta $y = -5$ no corta a la curva, –5 no es del recorrido de *f*.