Solución de los Problemas Propuestos

1. Halla la expresión del término general de las sucesiones:
a) 2, 4, 6, 8, 10, … b) 1, 2, 4, 8, 16, … c) 3, 6, 10, 18, 26, …
Halla el término décimo quinto de cada una de esas sucesiones.
Solución:
a) Es la sucesión de los números pares. Es una p. a. de diferencia 2. Su término general es $a_n = 2n$.

b) Es una p. g. de razón 2 y $b_1 = 1$. Su término general es $b_n = 1 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow b_n = 2^{n-1}$.

c) Esta sucesión es la suma, término a término, de las dos anteriores: $c_n = a_n + b_n$.
Su término general será: $c_n = 2n + 2^{n-1}$.

Los términos pedidos son:
$a_{15} = 2 \cdot 15 = 30$; $b_{15} = 1 \cdot 2^{14} = 16384$; $c_{15} = 2 \cdot 15 + 2^{14} = 30 + 16384 = 16414$.

2. Escribe los cinco primeros términos de la sucesión definida por recurrencia: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 1 \end{cases}$.
A la vista de esos términos halla otra expresión de su término general. Comprueba que dicha fórmula es válida para los primeros términos. Sin calcular a_{10}, ¿cuánto vale a_{11}?
Solución:
De $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 1 \end{cases} \Rightarrow a_2 = 2 \cdot a_1 - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$; $a_3 = 2 \cdot a_2 - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$;
$a_4 = 2 \cdot a_3 - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$; $a_5 = 2 \cdot a_4 - 1 = 2 \cdot 9 - 1 = 17$.
Por tanto:
$a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$; $a_4 = 9$; $a_5 = 17$.
Puede observarse (no siempre se observa *a la primera*) que la sucesión:
2, 3, 5, 9, 17, … ⇔ 1 + 1, 1 + 2, 1 + 4, 1 + 8, 1 + 16, … ⇒ $a_n = 1 + 2^{n-1}$.
Con esta fórmula:
$a_1 = 1 + 2^{1-1} = 1 + 2^0 = 1 + 1 = 2$; $a_2 = 1 + 2^{2-1} = 1 + 2 = 3$; $a_3 = 1 + 2^{3-1} = 5$; $a_4 = 1 + 2^{4-1} = 9$,
$a_5 = 1 + 2^{5-1} = 17$;… $a_{11} = 1 + 2^{11-1} = 1 + 2^{10} = 1 + 1024 = 1025$.

3. a) Escribe tres términos más de la sucesión: 1, 3, 6, 10, 15, …
b) ¿Cuál es la expresión de su término general?
Solución:
a) Puede observarse que los términos dados cumplen la propiedad que se indica:
1, 3, 6, 10, 15, … → 1; 3 = 1 + 2; 6 = 1 + 2 + 3; 10 = 1 + 2 + 3 + 4; 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5;
… (suma de los números naturales hasta el valor del subíndice, incluido).
Por tanto:
a_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21; a_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.

b) El término general es la suma de los *n* primeros números naturales: $a_n = \frac{(1+n) \cdot n}{2} = \frac{n + n^2}{2}$.

4. a) Escribe dos términos más de la sucesión: 2, 3, 6, 11, 18, 27, …
b) ¿Cuál es la expresión de su término general?
Solución:
a) Para determinar el criterio de formación de los sucesivos términos hay que observar con detenimiento los números dados:
2, 3, 6, 11, 18, 27, …
Los sucesivos incrementos (o disminuciones) entre términos consecutivos puede aportar información.
Aquí:
2, 3, 6, 11, 18, 27, …→ 2, 2 + 1 = 3, 3 + 3 = 6, 6 + 5 = 11, 11 + 7 = 18, 18 + 9 = 27, …
Cada término siguiente se obtiene sumando (al término anterior) el siguiente número impar, comenzando con el impar 1. Esto es, se está sumando, sucesivamente, 1, 3, 5, 7, 9, …
Por tanto, los dos siguientes términos deben ser:
a_7 = 27 + 11 = 38; a_8 = 38 + 13 = 51.

b) Para determinar el término general hay que hacer *otro descubrimiento*, observando que:
$a_1 = 2$; $a_2 = 3 = 2 + \boxed{1}$; $a_3 = 6 = 2 + \boxed{1+3}$; $a_4 = 11 = 2 + \boxed{1+3+5}$; $a_5 = 18 = 2 + \boxed{1+3+5+7}$.
Esto es, cada término se obtiene sumándole a 2 "la suma de los $n-1$ primeros números impares".
Los números impares son: 1, 3, 5, 7, … . Su término general $i_n = 2n-1$.
Luego el impar que ocupa la posición n – 1 será $i_{n-1} = 2n-3$ (Párate y comprueba que es así).

La suma de los n – 1 primeros números impares será:
$$S_{n-1} = \frac{(i_1 + i_{n-1})(n-1)}{2} \Rightarrow S_{n-1} = \frac{(1+2n-3)(n-1)}{2} = \frac{(2n-2)(n-1)}{2} = (n-1)(n-1) = (n-1)^2.$$
Por tanto, el término general de la sucesión 2, 3, 6, 11, 18, 27, … a_n, será:
$$a_n = 2 + (n-1)^2.$$

Nota: Este razonamiento se hace mucho más claro y rápido si se hubiese *visto* otra forma de escribir los términos de la sucesión.
En concreto:
2, 3, 6, 11, 18, 27, …→ 2, 3 = 2 + 1, 6 = 2 + 4, 11 = 2 + 9, 18 = 2 + 16, …
Los sucesivos términos se obtienen sumando *cuadrados*.

5. Interpola 3 números en progresión aritmética entre 14 y 37.
Solución:
En total habrá 5 números en p. a., siendo $a_1 = 14$ y $a_5 = 37$.
Como $a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow 37 = 14 + 4d \Rightarrow d = \frac{23}{4}$.
Por tanto:
$$a_2 = a_1 + d \Rightarrow a_2 = 14 + \frac{23}{4} = \frac{79}{4};\ a_3 = a_2 + d \Rightarrow a_3 = \frac{79}{4} + \frac{23}{4} = \frac{102}{4};\ a_4 = \frac{102}{4} + \frac{23}{4} = \frac{125}{4}.$$
Los cinco números son: $14 = \frac{56}{4}$, $\frac{79}{4}$, $\frac{102}{4}$, $\frac{125}{4}$ y $37 = \frac{148}{4}$.

6. Interpola 2 números en progresión geométrica entre 1,5 y 12.
Solución:
En total habrá 4 números en p. g., siendo $a_1 = 1,5$ y $a_4 = 12$.

Como $a_4 = a_1 \cdot r^3 \Rightarrow 12 = 1,5 \cdot r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{12}{1,5} = 8 \Rightarrow r = 2$.

Por tanto:

$a_2 = a_1 \cdot r \Rightarrow a_2 = 1,5 \cdot 2 = 3$; $a_3 = a_2 \cdot r \Rightarrow a_3 = 3 \cdot 2 = 6$.

Los cuatro números son: 1,5, 3, 6 y 12.

7. La sucesión $3,\ 0{,}3,\ 0{,}03,\ 0{,}003\ldots$ es una progresión geométrica de razón $|r| < 1$. Halla su término general y la suma de los infinitos términos de la progresión.

Solución:

Efectivamente se trata de una p. g. de razón r = 0,1.

Su término general es $a_n = 3 \cdot (0,1)^{n-1}$.

Su suma es:

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{3}{1-0,1} = \frac{3}{0,9} = \frac{30}{9}.$$

Observa que 3 + 0,3 + 0,03 + 0,003… = 3,333…, que es un número periódico.

Su suma es la fracción generatriz de dicho número: $3 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + ... = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$.

8. Halla el límite de la sucesión: {2, 2,7, 2,77, 2,777, 2,7777, …}.

Solución:

El límite de {2, 2,7, 2,77, 2,777, 2,7777, …} es la fracción generatriz del número periódico 2,777…

Este número se puede escribir como:

2,777… = 2 + 0,7 + 0,07 + 0,007 + …

$\to$ al número 2 se le suman los infinitos términos consecutivos de una p. g. de r = 0,1 y $a_1 = 0,7$.

Por tanto:

2,777… = 2 + (0,7 + 0,07 + 0,007 + …) = $2 + \left(\frac{a_1}{1-r}\right) = 2 + \frac{0,7}{1-0,1} = 2 + \frac{0,7}{0,9} = 2 + \frac{7}{9} = \frac{25}{9}$.

9. Utilizando la fórmula de la suma de los infinitos términos de una p. g. de razón $|r| < 1$ halla la fracción generatriz de los números periódicos: 3,707070… y 12,4666…

Solución:

- 3,707070… = 3 + 0,70 + 0,0070 + 0,000070…

$\to$ al número 3 se le suman los infinitos términos consecutivos de una p. g. de r = 0,01 y $a_1 = 0,70$.

Por tanto:

3,707070… = 3 + (0,70 + 0,0070 + 0,000070 + …) = $3 + \frac{0,70}{1-0,01} = 3 + \frac{70}{99} = \frac{367}{99}$.

- 12,4666… = 12,4 + 0,06 + 0,006 + 0,0006 + …

$\to$ al número $12,4 = \frac{124}{10}$ se le suman los infinitos términos consecutivos de una p. g. de r = 0,06 y $a_1 = 0,1$.

Por tanto:

12,4666… = 12,4 + (0,06 + 0,006 + 0,0006 + …) = $\frac{124}{10} + \frac{0,06}{1-0,1} = \frac{124}{10} + \frac{6}{90} = \frac{1122}{90}$.

Nota: En cursos pasados se estudiaron otros métodos para hallar la fracción generatriz.

10. ¿Cómo es la sucesión $a_n = \dfrac{n+3}{n+1}$: creciente o decreciente? Con la información obtenida halla sus cotas inferior y superior.

Solución:

Para contestar la pregunta hay que hallar la diferencia $a_{n+1} - a_n$. Si esta diferencia es positiva, la sucesión es creciente; si es negativa, será decreciente.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)+3}{(n+1)+1} - \frac{n+3}{n+1} = \frac{n+4}{n+2} - \frac{n+3}{n+1} = \frac{(n+4)(n+1)-(n+2)(n+3)}{(n+2)(n+1)} = \frac{-2}{(n+2)(n+1)} < 0,$$

para todo número natural *n*.

Por tanto, la sucesión es decreciente.

Algunos de sus términos valen:

$$a_1 = \frac{1+3}{1+1} = 2;\ a_2 = \frac{2+3}{2+1} = \frac{5}{3} = 1,66...;\ a_3 = \frac{6}{4} = 1,5\ \ldots$$

Como es decreciente, una cota superior es 2, el valor de a_1.

Como todos sus términos son positivos, una cota inferior puede ser 0.

En efecto, la desigualdad $a_n = \dfrac{n+3}{n+1} > 0$ es cierta, pues $\dfrac{n+3}{n+1} > 0 \Leftrightarrow n+3 > 0$, que se cumple para *n* = 1, 2, 3, …; esto es, siempre.

Observación: Hay infinitas cotas inferiores (y superiores). La cota inferior más grande, el ínfimo, es el valor del límite de la sucesión. En este caso es 1.

11. Demuestra que la sucesión de término general $a_n = \dfrac{4n-1}{n+1}$ es creciente y halla una cota inferior positiva (justificando que es una cota inferior).

Solución:

Hay que comprobar que $a_{n+1} - a_n \geq 0$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4(n+1)-1}{(n+1)+1} - \frac{4n-1}{n+1} = \frac{4n+3}{n+2} - \frac{4n-1}{n+1} = \frac{(4n+3)(n+1)-(4n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{5}{(n+2)(n+1)} > 0,$$ para todo número natural *n*.

Por tanto, la sucesión es creciente.

Como es creciente, una cota inferior es cualquier número que sea menor o igual que el primero de sus términos. En este caso, $a_1 = \dfrac{3}{2}$.

En efecto:

$$a_n = \frac{4n-1}{n+1} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \text{(por ser ambos términos de la fracción positivos)} \Leftrightarrow 2(4n-1) \geq 3(n+1) \Leftrightarrow$$

$$8n-2 \geq 3n+3 \Leftrightarrow 5n \geq 5 \Leftrightarrow n \geq 1.$$

Nota: Cualquier número del intervalo (0, 3/2] es una cota inferior positiva de la sucesión.

La mayor de ellas, el ínfimo, es 3/2.

12. Dada la sucesión $a_n = \dfrac{3n+10}{n+3}$:

a) Demuestra que es decreciente y acotada inferiormente por *k* = 3.

b) ¿A partir de qué término se cumple que $a_n < 3{,}01$?

c) Halla su límite.

Solución:

a) Hay que comprobar que $a_{n+1} - a_n \le 0$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)+10}{(n+1)+3} - \frac{3n+10}{n+3} = \frac{3n+13}{n+4} - \frac{3n+10}{n+3} = \frac{(3n+13)(n+3)-(3n+10)(n+4)}{(n+4)(n+3)} =$$

$$= \frac{-1}{(n+4)(n+3)} < 0,$$ para todo número natural *n*.

Por tanto, la sucesión es decreciente.

La sucesión estará acotada inferiormente por 3 si $a_n \ge 3$, para todo *n*.

$$a_n \ge 3 \Leftrightarrow \frac{3n+10}{n+3} \ge 3 \Leftrightarrow 3n+10 \ge 3(n+3) \Leftrightarrow 3n+10 \ge 3n+9 \Leftrightarrow 10 \ge 9,$$ que es cierto.

b) Hay que resolver la inecuación: $a_k = \dfrac{3k+10}{k+3} < 3{,}01 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3k+10 < 3{,}01(k+3) \Rightarrow 3k+10 < 3{,}01k + 9{,}03 \Rightarrow 0{,}97 < 0{,}01k \Rightarrow 97 < k.$$

Para todo $n \ge 98$ se cumple que $a_n < 3{,}01$

Observa que los infinitos términos, a partir de a_{98}, están en el intervalo (3, 3,01).

c) $\lim \dfrac{3n+10}{n+3} = 3$. (Toda sucesión decreciente y acotada inferiormente tiene límite. Su límite es el ínfimo; en este caso, 3).

13. Demuestra que $a_n = \dfrac{n-3}{4n+1}$ es creciente y acotada superiormente por *k* = 1/4. Halla su límite.

Solución:

- Creciente: Hay que comprobar que $a_n \le a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} - a_n \ge 0$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)-3}{4(n+1)+1} - \frac{n-3}{4n+1} = \frac{n-2}{4n+5} - \frac{n-3}{4n+1} = \frac{(n-2)(4n+1)-(n-3)(4n+5)}{(4n+5)(4n+1)} =$$

$$= \frac{13}{(4n+5)(4n+1)} > 0,$$ para todo número natural *n*.

Por tanto, la sucesión es creciente.

- La sucesión estará acotada superiormente por 1/4 si $a_n \le \dfrac{1}{4}$, para todo *n*.

Así es, pues: $a_n \le \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{n-3}{4n+1} \le \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 4n-12 \le 4n+1 \Leftrightarrow -12 \le 1$, que es cierto.

- $\lim a_n = \lim \dfrac{n-3}{4n+1}$ = (dividiendo por *n*) = $\lim \dfrac{\frac{n}{n} - \frac{3}{n}}{\frac{4n}{n} + \frac{1}{n}} = \lim \dfrac{1 - \frac{3}{n}}{4 + \frac{1}{n}} = \dfrac{1}{4}$.

14. Dada la sucesión $a_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, se pide:

a) Demuestra que es creciente y acotada superiormente por *k* = 1.
b) ¿A partir de qué término se cumple que $a_n > 0,99$?
c) Halla su límite.

Solución:

- Creciente: Hay que comprobar que $a_n \le a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} - a_n \ge 0$.

  $a_{n+1} - a_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)+1} - \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} > 0$, pues son dos fracciones positivas con el mismo numerador, siendo la primera mayor que la segunda, ya que su denominador es menor.
Por tanto, la sucesión es creciente.

- Acotada superiormente por *k* = 1. Hay que comprobar que $a_n \le 1$, para todo *n*.

Así es, pues:

$a_n \le 1 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{n+1} \le 1$, ya que a 1 se le resta una fracción positiva.

- $\lim a_n = \lim\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = \lim \dfrac{n}{n+1} = 1.$

(Si necesitas justificación de este resultado recuerda lo dicho para límites de expresiones racionales).

15. Dada la sucesión $a_n = 1 - \dfrac{(-1)^n}{n}$:

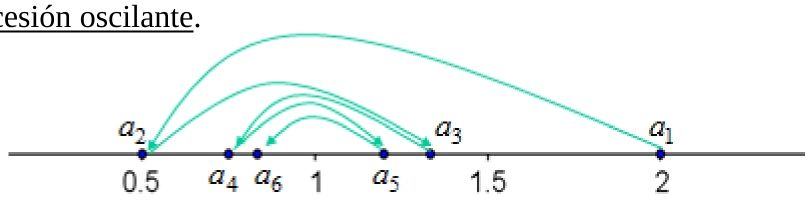
a) Halla sus 6 primeros términos.
b) Demuestra que está acotada superiormente por 2.
c) ¿A partir de qué término se cumple $|a_n - 1| < 0,002$?
d) Comprueba que $\lim\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n}\right) = 1$.

Solución:

a) $a_1 = 1 - \dfrac{(-1)^1}{1} = 1 - (-1) = 2$; $a_2 = 1 - \dfrac{(-1)^2}{2} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$; $a_3 = 1 - \dfrac{(-1)^3}{3} = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$,

$a_4 = 1 - \dfrac{(-1)^4}{4} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$; $a_5 = 1 - \dfrac{(-1)^5}{5} = 1 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{6}{5}$; $a_6 = 1 - \dfrac{(-1)^6}{6} = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.

Se trata de una sucesión oscilante.



b) Hay que ver que

$1 - \dfrac{(-1)^n}{n} \le 2 \Leftrightarrow -\dfrac{(-1)^n}{n} \le 1 \Rightarrow -(-1)^n \le n$, que es cierto, pues $-(-1)^n = \pm 1$ y $n \ge 1$.

c) $|a_n - 1| < 0,002 \Rightarrow \left|1-\frac{(-1)^n}{n}-1\right| < 0,002 \Rightarrow \left|-\frac{(-1)^n}{n}\right| < 0,002$.

$$\left|-\frac{(-1)^n}{n}\right| < 0,002 \Leftrightarrow \left|\pm\frac{1}{n}\right| < 0,002 \Rightarrow \frac{1}{n} < 0,002 \Rightarrow n > 500.$$

d) La sucesión $a_n = 1-\frac{(-1)^n}{n}$ podría considerarse como dos sucesiones:

$\{a_n\} = \{a_1,\ a_3,\ a_5,...\}$ y $\{a'_n\} = \{a_2,\ a_4,\ a_6,...\}$.

La primera es decreciente y acotada inferiormente por 1. Por tanto, su límite es 1.
La segunda es creciente y acotada superiormente por 1. Por tanto, su límite es 1.

Por tanto, $\lim\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$.

Nota: La acotación (inferior o superior) por 1 no se ha probado. Se deja como ejercicio al lector interesado.

16. Considera las sucesiones $\{a_n\} = \{1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \dots\}$ y $\{b_n\} = \{5,\ 2,\ -1,\ -4,\ \dots\}$.

a) Halla el término general de cada una de ellas. ¿Cuánto valen a_{300} y b_{35}?

b) Escribe la sucesión $c_n = \frac{a_n}{b_n}$. Calcula c_{35} y c_{300}. Halla su límite, si existe.

Solución:

a) $\{a_n\}$ = $\{1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \dots\}$ es una progresión aritmética de diferencia $d = 4$, con $a_1 = 1$.

Su término general será: $a_n = 1+(n-1)\cdot 4 \Rightarrow a_n = 4n-3$.

El valor de $a_{300} = 4\cdot 300 - 3 = 1197$.

$\{b_n\}$ = $\{5,\ 2,\ -1,\ -4,\ \dots\}$ es una progresión aritmética de diferencia $d = -3$, con $b_1 = 5$.

Su término general será: $b_n = 5+(n-1)\cdot(-3) \Rightarrow b_n = 8-3n$.

El valor de $b_{35} = 8-3\cdot 35 = -97$.

b) $c_n = \frac{4n-3}{8-3n} \Rightarrow c_{35} = \frac{4\cdot 35-3}{8-3\cdot 35} = \frac{147}{-97} \approx -1,5155$; $c_{300} = \frac{4\cdot 300-3}{8-3\cdot 300} = \frac{1197}{-892} \approx -1,3419$.

Su límite es: $\lim\frac{4n-3}{8-3n} = \lim\frac{4n}{-3n} = -\frac{4}{3}$.

17. Dada la sucesión $\{2,\ 3/4,\ 4/9,\ 5/16,\ 6/25,\ ...\}$, halla:

a) Su término general y los términos décimo y vigésimo.

b) ¿A partir de qué término $a_n < 0,001$?

c) ¿Cuál es su límite?

Solución:

a) Los numeradores de los sucesivos términos son 2, 3, 4, 5, … una p. a. de diferencia $d = 1$ y primer término 2. Su término general es $n+1$.

Los denominadores son 1, 4, 9, 16, …, los cuadrados de los números naturales: n^2.

Por tanto, el término general de la sucesión es $a_n = \frac{n+1}{n^2}$.

b) Hay que resolver la inecuación: $a_k = \dfrac{k+1}{k^2} < 0,001 \Rightarrow k+1 < 0,001k^2 \Rightarrow 0 < k^2 - 1000k - 1000$.

Resolviendo $k^2 - 1000k - 1000 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{1000 \pm \sqrt{1004000}}{2} \approx \begin{cases} -0,999 \\ 1000,999 \end{cases}$.

La inecuación se cumple cuando $k < -0999$ o $k > 1000,999$.
(El valor negativo no tiene sentido en este contexto: k debe ser un número natural).
Por tanto, para valores de $n > 1000,999$, esto es $n \geq 1001$, se cumple que $a_n < 0,001$.

c) $\lim a_n = \lim \dfrac{n+1}{n^2} = 0$.

18. Indica el límite de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 1}{5n - 2}$, b) $a_n = \dfrac{3n^2 + 1}{n^3 + 2n}$; c) $a_n = \dfrac{5n^2 - 5}{4n^2 - n}$; d) $a_n = \dfrac{\left(n^2 - 5\right)(2n+3)}{5n - 4n^3}$.

Solución:
En el límite, los polinomios del numerador y del denominador pueden sustituirse por el término de mayor grado. Por tanto:

a) $\lim \dfrac{2n^2 - 3n + 1}{5n - 2} = \lim \dfrac{2n^2}{5n} = \lim \dfrac{2n}{5} = \infty$.

b) $\lim \dfrac{3n^2 + 1}{n^3 + 2n} = \lim \dfrac{3n^2}{n^3} = \lim \dfrac{3}{n} = 0$.

c) $\lim \dfrac{5n^2 - 5}{4n^2 - n} = \lim \dfrac{5n^2}{4n^2} = \lim \dfrac{5}{4} = \dfrac{5}{4}$.

d) $\lim \dfrac{\left(n^2 - 5\right)(2n+3)}{5n - 4n^3} = \lim \dfrac{2n^3 + 3n^2 - 10n - 15}{5n - 4n^3} = \lim \dfrac{2n^3}{-4n^3} = \lim \left(-\dfrac{2}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

19. Indica el valor de los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim(2n-5)$; b) $\lim \dfrac{6n}{n^2+1}$; c) $\lim \dfrac{6n^2 + 3n}{2n^2 - 7n + 1}$: d) $\lim\left[(-1)^n n^2 - 5n\right]$.

Solución:
a) $\lim(2n-5)$ = +∞. Los polinomios tienden a infinito.

b) $\lim \dfrac{6n}{n^2+1} = 0$. El grado del numerador es menor que el grado del denominador.

c) $\lim \dfrac{6n^2 + 3n}{2n^2 - 7n + 1} = \lim \dfrac{6n^2}{2n^2} = \dfrac{6}{2} = 3$. Numerador y denominador son expresiones polinómicas con el mismo grado.

d) $\lim\left[(-1)^n n^2 - 5n\right]$, no tiene límite. Es una sucesión oscilante que toma, alternativamente, valores muy grandes positivos y muy grandes negativos.
Algunos de sus términos son:

$a_1 = -6$; $a_2 = -6$, $a_3 = -24$; $a_4 = -4$; $a_5 = -50$; $a_6 = +6$; …; $a_{10} = +50$, $a_{11} = -176$; …

20. Halla el valor de los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim \sqrt{n^2+3n}$; b) $\lim \dfrac{-3}{\sqrt{2n+5}}$; c) $\lim \sqrt{\dfrac{4n^2-3}{n^2+5n}}$; d) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{2n}$;

e) $\lim \dfrac{3n+2}{\sqrt{n^2+1}}$; f) $\lim \dfrac{\sqrt{n^3-n}}{2n-1}$ g) $\lim \dfrac{3n^2+2}{\sqrt{n^3+n^2}}$; h) $\lim \dfrac{\sqrt{9n^3+5n}}{n\sqrt{3n+1}}$.

Solución:

a) $\lim \sqrt{n^2+3n} = \infty$. Los valores de $a_n = \sqrt{n^2+3n}$ son cada vez más grandes cuando $n \to \infty$.

b) $\lim \dfrac{-3}{\sqrt{2n+5}} = 0$. Los valores de $a_n = \dfrac{-3}{\sqrt{2n+5}}$ cada vez más pequeños cuando $n \to \infty$.

En los casos que siguen se obtiene indeterminaciones de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$. Se resuelven operando con las expresiones radicales.

c) $\lim \sqrt{\dfrac{4n^2-3}{n^2+5n}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \sqrt{\lim \dfrac{4n^2-3}{n^2+5n}} = \sqrt{4} = 2$.

d) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{2n} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim \dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{4n^2}} = \lim \sqrt{\dfrac{n^2+3n}{4n^2}} = \lim \sqrt{\dfrac{n^2}{4n^2}} = \dfrac{1}{2}$.

Para hallar $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{2n}$ también pueden dividirse los términos de la sucesión por n, así queda:

$$\lim \dfrac{\dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{n}}{\dfrac{2n}{n}} = \lim \dfrac{\sqrt{\dfrac{n^2+3n}{n^2}}}{\dfrac{2n}{n}} = \dfrac{\sqrt{1}}{2} = \dfrac{1}{2} .$$

e) $\lim \dfrac{3n+2}{\sqrt{n^2+1}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim \dfrac{\sqrt{(3n+2)^2}}{\sqrt{n^2+1}} = \lim \dfrac{\sqrt{9n^2+12n+4}}{\sqrt{n^2+1}} = \lim \sqrt{\dfrac{9n^2+12n+4}{n^2+1}} = \sqrt{\dfrac{9}{1}} = 3$.

f) $\lim \dfrac{\sqrt{n^3-n}}{2n-1} = \lim \dfrac{\sqrt{n^3-n}}{\sqrt{(2n-1)^2}} = \lim \dfrac{\sqrt{n^3-n}}{\sqrt{4n^2-4n+1}} = \lim \sqrt{\dfrac{n^3-n}{4n^2-4n+1}} = \lim \sqrt{\dfrac{n^3}{4n^2}} = \lim \sqrt{\dfrac{n}{4}} = \infty$.

g) $\lim \dfrac{3n^2+2}{\sqrt{n^3+n^2}} = \lim \dfrac{\sqrt{(3n^2+2)^2}}{\sqrt{n^3+n^2}} = \lim \dfrac{\sqrt{9n^4+12n^2+4}}{\sqrt{n^3+n^2}} = \lim \sqrt{\dfrac{9n^4+12n^2+4}{n^3+n^2}} = \lim \sqrt{\dfrac{9n^4}{n^3}} = \infty$.

h) $\lim \dfrac{\sqrt{9n^3+5n}}{n\sqrt{3n+1}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim \dfrac{\sqrt{9n^3+5n}}{\sqrt{n^2(3n+1)}} = \lim \dfrac{\sqrt{9n^3+5n}}{\sqrt{3n^3+n^2}} = \lim \sqrt{\dfrac{9n^3+5n}{3n^3+n^2}} = \sqrt{\dfrac{9}{3}} = \sqrt{3}$.

21. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim \left(2n - \dfrac{n^2}{n-1}\right)$; b) $\lim \left(\dfrac{n^2+2n}{n+1} - \dfrac{n^2}{n-1}\right)$; c) $\lim \left(\dfrac{n^2-2n}{2n-1} - \dfrac{n^2+1}{n}\right)$.

Solución:

Son indeterminaciones del tipo ∞ – ∞. Se resuelven operando.

a) $\lim\left(2n-\dfrac{n^2}{n-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim\left(\dfrac{2n^2-2n-n^2}{n-1}\right)=\lim\dfrac{n^2-2n}{n-1}=\infty$.

b) $\lim\left(\dfrac{n^2+2n}{n+1}-\dfrac{n^2}{n-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim\left(\dfrac{(n^2+2n)(n-1)}{n^2-1}-\dfrac{n^2(n+1)}{n^2-1}\right)=\lim\left(\dfrac{-2n}{n^2-1}\right)=0$.

c) $\lim\left(\dfrac{n^2-2n}{2n-1}-\dfrac{n^2+1}{n}\right)=[\infty-\infty]=\lim\left(\dfrac{(n^2-2n)n-(n^2+1)(2n-1)}{(n^2-2n)\cdot n}\right)=$

$=\lim\left(\dfrac{n^3-2n^2-(2n^3-n^2+2n-1)}{n^3-2n^2}\right)=\lim\dfrac{-n^3-n^2-2n+1}{n^3-2n^2}=\lim\dfrac{-n^3}{n^3}=-1$.

22. Halla:

a) $\lim\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$; b) $\lim\left(2n-\sqrt{2n^2+2}\right)$; c) $\lim\left(\sqrt{4n^2+5n}-2n\right)$;

d) $\lim\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+1}\right)$; e) $\lim\left(\sqrt{2n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right)$; f) $\lim\left(\dfrac{n}{\sqrt{n}-1}-\dfrac{n}{\sqrt{n}+1}\right)$.

<u>Solución</u>:

En todos los casos se obtienen indeterminaciones de la forma ∞ – ∞. Se resuelven multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada.

a) $\lim\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)=[\infty-\infty]=\lim\dfrac{\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}=$

$=\lim\dfrac{n^2-(n^2-1)}{\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}=\lim\dfrac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}=\dfrac{1}{\infty}=0$

b) $\lim\left(2n-\sqrt{2n^2+2}\right)=[\infty-\infty]=\lim\dfrac{\left(2n-\sqrt{2n^2+2}\right)\left(2n+\sqrt{2n^2+2}\right)}{\left(2n+\sqrt{2n^2+2}\right)}=$

$=\lim\dfrac{4n^2-(2n^2+2)}{\left(2n+\sqrt{2n^2+2}\right)}=\lim\dfrac{2n^2-2}{2n+\sqrt{2n^2+2}}=$

$=\lim\dfrac{\dfrac{2n^2}{n^2}-\dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{2n}{n^2}+\dfrac{\sqrt{2n^2+2}}{n^2}}=\lim\dfrac{2-\dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{2}{n}+\sqrt{\dfrac{2n^2+2}{n^4}}}=\left(\dfrac{2+0}{0+0}\right)=\infty$.

c) $\lim\left(\sqrt{4n^2+5n}-2n\right)=[\infty-\infty]$.

$\lim\left(\sqrt{4n^2+5n}-2n\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{4n^2+5n}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2+5n}+2n\right)}{\left(\sqrt{4n^2+5n}+2n\right)}=\lim\dfrac{5n}{\sqrt{4n^2+5n}+2n}=\dfrac{5}{4}$.

d) $\lim\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+1}\right) = [\infty - \infty] = \lim\dfrac{\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{2n-1}+\sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{2n-1}+\sqrt{n+1}\right)} =$

$$= \lim\frac{(2n-1)-(n+1)}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{n+1}} = \lim\frac{n-2}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{n+1}} = (:n) = \lim\frac{1-2/n}{\sqrt{\frac{2n-1}{n^2}}+\sqrt{\frac{n+1}{n^2}}} = \frac{1}{0} = \infty .$$

e) $\lim\left(\sqrt{2n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right) = [\infty - \infty]$. Multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada se tiene:

$$\lim\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+1}\right) = \lim\frac{\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{2n-1}+\sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{2n-1}+\sqrt{n+1}\right)} =$$

$$= \lim\frac{(2n-1)-(n+1)}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{n+1}} = \lim\frac{n-2}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{n+1}} = (:n) = \lim\frac{1-2/n}{\sqrt{\frac{2n-1}{n^2}}+\sqrt{\frac{n+1}{n^2}}} = \frac{1}{0} = \infty .$$

f) $\lim\left(\dfrac{n}{\sqrt{n}-1}-\dfrac{n}{\sqrt{n}+1}\right) = [\infty - \infty]$. Operando:

$$\lim\left(\frac{n}{\sqrt{n}-1}-\frac{n}{\sqrt{n}+1}\right) = \lim\left(\frac{n\left(\sqrt{n}+1\right)-n\left(\sqrt{n}-1\right)}{n-1}\right) = \lim\left(\frac{2n}{n-1}\right) = 2 .$$

23. (Optativo) Demuéstrese que la sucesión $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ es creciente y acotada.

<u>Solución</u>:
Para demostrar que <u>es creciente</u> hay que ver que $a_n < a_{n+1}$.
Puede hacerse estudiando el desarrollo del binomio de Newton correspondiente a cada uno de esos términos.

Aplicando la fórmula $(p+q)^n = \binom{n}{0}p^n + \binom{n}{1}p^{n-1}q + \binom{n}{2}p^{n-2}q^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}pq^{n-1} + \binom{n}{n}q^n$ a la expresión $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, se tiene:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}\cdot 1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot 1^{n-2}\cdot\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\cdot 1^{n-3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n} .$$

Teniendo en cuenta que $\dbinom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}$, la expresión anterior puede escribirse:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{4!}\cdot\frac{1}{n^4} + \ldots =$$

$\to$ Observando que: $\dfrac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{2!}\cdot\dfrac{n-1}{n} = \dfrac{1}{2!}\cdot\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$;

$\dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\cdot\dfrac{1}{n^3} = \dfrac{1}{3!}\cdot\dfrac{(n-1)\cdot(n-2)}{n^2} = \dfrac{1}{3!}\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-2}{n} = \dfrac{1}{3!}\cdot\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)$; …, se tiene:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{4!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)+...+$$
$$+\ ...\ +\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\to (n+1 \text{ sumandos})$$

Aplicando este resultado al término a_{n+1} se tendrá:

$$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+$$
$$+\frac{1}{4!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{n+1}\right)+...+\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Comparando ordenadamente los sumandos (los dos primeros son iguales), se observa que, a partir del tercero, los correspondientes a a_{n+1} son mayores que los de a_n. Así, por ejemplo, para el tercer y cuarto sumandos:

$$\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right);\ \frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)>\frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right);\ ...$$

Por tanto, $a_n<a_{n+1}$. Luego la sucesión es estrictamente creciente.

Para demostrar que <u>es acotada</u> hay que ver existe un número *k* tal que $a_n<k$.
Como se ha visto arriba,

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{4!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)+...+$$
$$+\ ...\ +\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Como cada uno de los factores con paréntesis son menores que 1: $\left(1-\frac{1}{n}\right)<1;\ \left(1-\frac{2}{n}\right)<1;...,$ entonces:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{n!}.$$

Por otra parte: $\frac{1}{2!}=\frac{1}{2};\ \frac{1}{3!}=\frac{1}{3\cdot 2}<\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{2^2};\ \frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3};...;\ \frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}.$

Luego:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}<1+1+1=3.$$

Las fracciones que aparecen en el último término forman una p. g. de razón $r=0,5$ y $a_1=0,5$, cuya suma, cuando $n\to\infty$, es $S=\frac{0,5}{1-0,5}=1$.

Por tanto, $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$.

<u>Observación</u>: Si esta demostración te ha resultado interesante, puedes encontrar (quizá con más rigor matemático) una definición más completa de *e* [pinchando aquí](). Ahí se demuestra que la sucesión que define al número *e* es creciente y acotada: por tanto, tiene límite.
Otra demostración similar (explicada con más detalle) la encuentras en este [vídeo]().