TEMA 12. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

1. DEFINICIÓN Y TÉRMINO GENERAL

Una sucesión es un conjunto de números dispuestos ordenadamente: $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ ...\}$.
Lo normal es que el orden de sus términos obedezca a algún criterio, que algunas veces permite expresar mediante una fórmula el término general, a_n, de esa sucesión, siendo n un número natural.
(El término general puede designarse con cualquier otra letra: b_n, c_n, …; $n \in$ **N*** = {1, 2, 3, …}).

- Una sucesión puede definirse de varias maneras:

1) Dando el criterio de formación de sus términos.
2) Enumerando algunos de sus términos; los necesarios para que pueda deducirse un criterio sólido.
3) Indicando la expresión de su término general.
4) Por recurrencia: indicando algún término y el criterio para obtener los siguientes.

Ejemplos:
a) Un criterio puede ser "la sucesión de los números naturales múltiplos de 3".
Se puede dar también indicando algunos de sus términos: {3, 6, 9, 12, 15, …}.
Su término general es $a_n = 3n$.
La fórmula del término general permite calcular el valor de cualquier término; así, por ejemplo, el término vigésimo tercero es $a_{23} = 3 \cdot 23 = 69$.

b) La sucesión {1, 4, 9, 16, 25, …} ⇔ la sucesión de los cuadrados de los números naturales ⇔ a la sucesión cuyo término general es $a_n = n^2$.

c) La sucesión $c_n = \dfrac{6n+1}{3n-2}$ es: $c_1 = \dfrac{6 \cdot 1+1}{3 \cdot 1-2} = \dfrac{7}{1}$; $c_2 = \dfrac{6 \cdot 2+1}{3 \cdot 2-2} = \dfrac{13}{4}$; $c_3 = \dfrac{19}{7}$; $c_4 = \dfrac{25}{10}$, …

d) Una sucesión puede definirse por recurrencia diciendo, por ejemplo: $a_1 = 4$ y $a_n = 2a_{n-1} - 3$.
Así: $a_1 = 4$; $a_2 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$; $a_3 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$; $a_4 = 2 \cdot 7 - 3 = 11$; $a_5 = 2 \cdot 11 - 3 = 19$…

¿Cómo se halla el término general?
Para hallar la fórmula del término general hay que descubrir alguna relación entre sus términos. Estas relaciones pueden consistir en sumar (o restar) un número fijo, en multiplicar (o dividir) por un número fijo, o en combinaciones de ambas operaciones.

Ejemplo:
La sucesión {6, 12, 18, 24, …} es la de los múltiplos de 6: $a_n = 6n$.
A partir de ella puede descubrirse el término general de {7, 13, 19, 25, …}, pues se obtiene sumando 1 a los términos de {6, 12, 18, 24, …}. Por tanto, su término general puede escribirse como $a_n = 6n + 1$.
Siguiendo un razonamiento similar, la sucesión {1, 4, 7, 10, …}, cuyos términos se obtienen restando 2 a {3, 6, 9, 12, …}, puede escribirse como $b_n = 3n - 2$.
Con esto, la sucesión $\left\{\dfrac{7}{1},\ \dfrac{23}{4},\ \dfrac{19}{7},\ \dfrac{25}{10},\ ...\right\}$ tendrá por término general $c_n = \dfrac{6n+1}{3n-2}$.

2. PROGRESIONES

Las sucesiones más sencillas son las progresiones. Se estudian en Secundaria. Aquí se recordarán brevemente.

Progresiones aritméticas

Una sucesión es una progresión aritmética cuando cada término se obtiene sumando al anterior un número fijo, llamado diferencia de la progresión.

En general, si el primer término es a_1 y la diferencia *d*, la progresión aritmética es:

$$a_1 \quad a_2 = a_1 + d \quad a_3 = a_2 + d \quad a_4 = a_3 + d \quad \ldots \quad a_n = a_{n-1} + d$$

- El término general de una progresión aritmética es: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.
- La suma de los *n* primeros términos de una progresión aritmética es: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$.

Ejemplos:

a) La sucesión 4, 7, 10, 13, … es una p. a. de diferencia $d = 3$ y primer término $a_1 = 4$.
Su término general es: $a_n = 4 + (n-1) \cdot 3 \Leftrightarrow a_n = 3n + 1$.

b) La suma de los primeros 500 números naturales: 1 + 2 + 3 + 4 + … + 499 + 500 será:

$$S_{500} = \frac{(1+500) \cdot 500}{2} = 125250.$$

c) La suma: 4 + 7 + 10 + 13 +… + a_{200}, vale, $S = \dfrac{(a_1 + a_{200}) \cdot 200}{2}$.

Como $a_1 = 4$ y $d = 3 \Rightarrow a_{200} = 4 + 199 \cdot 3 = 601$, entonces: $S_{200} = \dfrac{(4+601) \cdot 200}{2} = 60500$.

Progresiones geométricas

Una sucesión es una progresión geométrica cuando cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo, llamado razón de la progresión.

Si el primer término de una progresión geométrica es a_1 y la razón es *r*, la progresión será:

$$a_1 \quad a_2 = a_1 r \quad a_3 = a_2 r \quad a_4 = a_3 r \quad \ldots \quad a_n = a_{n-1} r$$

- El término general de la progresión geométrica es: $a_n = a_1 r^{n-1}$.
- La suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica es: $S_n = \dfrac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1}$

Ejemplos:

a) La sucesión 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... es una progresión geométrica de razón $r = 2$.
Su término general será: $a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} \Rightarrow a_{10} = 2^9 = 512$.

b) La sucesión 3, 0,3, 0,03, 0,003, 0,0003, ... es una progresión geométrica de razón $r = 0{,}1$.
Su término general será: $a_n = 3 \cdot 0{,}1^{n-1} = \dfrac{3}{10^{n-1}}$.

c) La suma de los 10 primeros términos de la progresión 1, 2, 4, 8, ... es : $S = \dfrac{1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 1023$.

3. ALGUNOS TIPOS DE SUCESIONES

Sucesión creciente

Una sucesión es creciente si cada término es mayor o igual que el anterior: $a_{n+1} \geq a_n$.

Si $a_{n+1} > a_n$ la sucesión se llama estrictamente creciente.

Por ejemplo, la sucesión 1; 1,1; 1,111; … es (estrictamente) creciente.

- Para demostrar que una sucesión es creciente hay que comprobar que $a_{n+1} - a_n \geq 0$.

Ejemplo:

La sucesión $a_n = \dfrac{2n+3}{n+2}$ es creciente.

En efecto: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2(n+1)+3}{(n+1)+2} - \dfrac{2n+3}{n+2} = \dfrac{2n+5}{n+3} - \dfrac{2n+3}{n+2} =$

$= \dfrac{(2n+5)(n+2)-(2n+3)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \dfrac{1}{(n+3)(n+2)} > 0$, para todo número natural *n*.

Sucesión decreciente

Una sucesión es decreciente si cada término es menor o igual que el anterior: $a_{n+1} \leq a_n$.

Si $a_{n+1} < a_n$ la sucesión se llama estrictamente decreciente.

Por ejemplo, la sucesión 1; 1/2; 1/3; 1/4; … es estrictamente decreciente.

- Para demostrar que una sucesión es decreciente hay que comprobar que $a_{n+1} - a_n \leq 0$.

Ejemplo:

La sucesión $a_n = \dfrac{6n+1}{3n-2}$ es estrictamente decreciente.

En efecto:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{6(n+1)+1}{3(n+1)-2} - \frac{6n+1}{3n-2} = \frac{6n+7}{3n+1} - \frac{6n+1}{3n-2} = \frac{(6n+7)(3n-2)-(6n+1)(3n+1)}{(3n+1)(3n-2)} =$$

$= \dfrac{-15}{(3n+1)(3n-2)} < 0$, para todo número natural *n*.

Sucesión acotada

Una sucesión está acotada superiormente si existe una constante *k*, tal que $a_n \leq k$, para todo *n*.

- La cota superior más pequeña se llama supremo. Es la cota superior más significativa.

Una sucesión está acotada inferiormente si existe una constante *k*, tal que $k \leq a_n$, para todo *n*.

- La cota inferior más grande se llama ínfimo. Es la cota inferior más significativa.

Ejemplo:

La sucesión $a_n = \dfrac{6n+1}{3n-2}$ está acotada inferiormente por *k* = 2.

Para demostrarlo hay que ver que $a_n \geq 2$. Esto es que $\dfrac{6n+1}{3n-2} \geq 2$, para todo *n*. Se ve así:

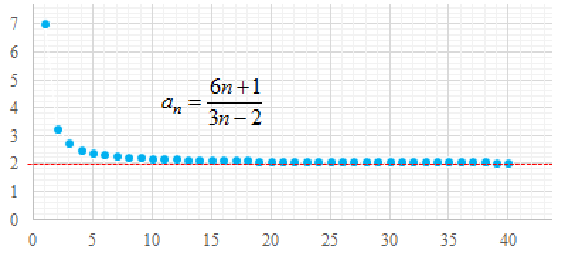
Como el denominador es positivo, $\dfrac{6n+1}{3n-2} \geq 2 \Leftrightarrow 6n+1 \geq 2(3n-2) \Leftrightarrow 6n+1 \geq 6n-4 \Rightarrow 1 \geq -4$,

que efectivamente es cierto.

4. INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

La sucesión vista en el ejemplo anterior, $a_n = \dfrac{6n+1}{3n-2}$, es decreciente. En efecto, sus términos toman cada vez valores más pequeños:

$$a_1 = \frac{7}{1} = 7;\quad a_2 = \frac{13}{4} = 3,25;\quad a_3 = \frac{19}{7} \approx 2,71...\ ;$$
$$a_{10} = \frac{61}{28} \approx 2,18;\ \ldots\ a_{30} = \frac{181}{88} \approx 2,06;\ \ldots$$



pero está acotada inferiormente por el número 2. Esto significa que, por mucho que disminuya el valor de los sucesivos términos, nunca tomarán valores inferiores a 2; aunque cada vez se acercan más a 2. Así: $a_{1000} = \dfrac{6001}{2998} \approx 2,0016...$; o $a_{10000} = \dfrac{60001}{29998} \approx 2,00016...$

Las diferencias $a_{1000} - 2 < 0,002$ y $a_{10000} - 2 < 0,0002$ son bastante pequeñas.

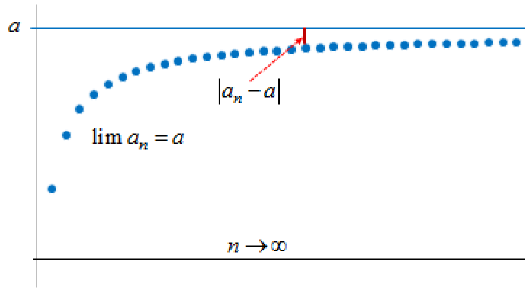
Esto es, cuando *n* se hace muy grande (tan grande como se quiera), la diferencia $a_n - 2$ se hace muy pequeña (tan pequeña como se quiera).

- Decir que *n* se hace muy grande se expresa con la notación $n \to \infty$; y que $a_n - 2$ se hace muy pequeña, con la notación $a_n - 2 \to 0$, que es lo mismo que decir que $a_n \to 2$.

Esto se resume escribiendo: $\lim \dfrac{6n+1}{3n-2} = 2$.

Definición de límite de una sucesión

- En general, se dice que la sucesión a_n tiende a *a*, o que $\lim(a_n) = a$, si para valores grandes de *n* la diferencia $|a_n - a|$ es tan pequeña como se desee.



Con notación precisa puede escribirse:

$$\lim(a_n) = a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ k,\ \forall\ n > k \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

(Para todo (∀) número ε, positivo y tan pequeño como se quiera, existe (∃) un número natural *k*, de manera que todos (∀) los términos que siguen a a_k distan de *a* menos que el valor de ε dado).

→ Así, por ejemplo, y como aproximación a una demostración, puede verse que $\lim \dfrac{2n-1}{2n} = 1$.

Si se elige ε = 0,001, hay que ver que a partir de algún termino a_k, la diferencia $\left|\dfrac{2n-1}{2n} - 1\right| < 0,001$.

Para encontrar ese *k* hay que resolver la inecuación

$$\left|\frac{2n-1}{2n} - 1\right| < 0,001 \Rightarrow \left|\frac{-1}{2n}\right| < 0,001 \Rightarrow \frac{1}{2n} < 0,001 \Rightarrow \frac{1}{0,002} < n \Rightarrow n > 500.$$

El valor de *k* será 500. Esto es, a partir del término $a_{500} = 0,999$ (si *n* > 500) todos los siguientes valen más que 0,999. Luego, entre 0,999 y 1 hay infinitos términos. Como, además, la sucesión es creciente(*), cada vez su valor se acercará más a 1.

→ El término $a_{501} = 0,999001996...$, cumple que $|a_{501} - 1| = |0,999001996... - 1| < 0,001$.

(*) Es creciente, pues $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2n+1}{2n+2} - \dfrac{2n-1}{2n} = \dfrac{2}{(2n+2)\cdot 2n} > 0$.

- Las sucesiones que tienen límite se llaman convergentes.

Toda sucesión creciente y acotada superiormente tiene límite. El límite coincide con la cota superior mínima. (Análogamente, toda sucesión decreciente y acotada inferiormente tiene límite. El límite coincide con la cota inferior máxima, la mayor de las cotas inferiores).

→ La sucesión 4, 7, 10, 13, …, cuyo término general es $a_n = 3n+1$, toma cada vez valores más grandes, y supera cualquier número arbitrariamente grande; esto es, no tiene cota superior. Esta sucesión no tiene límite finito; se podría decir que es ilimitada, o que su límite es infinito (+ ∞): $\lim(a_n) = \lim(3n+1) = +\infty$. (Es una sucesión divergente).

5. LÍMITE DE ALGUNAS SUCESIONES

Sucesiones de tipo polinómico

Su término general es de la forma $a_n = P(n)$, siendo $P(n)$ un polinomio en *n*.

Tienden a $\pm\infty$ (no tienen límite, aunque se dice que vale $\pm\infty$): $\lim P(n) = \pm\infty$.

Ejemplos:

a) $\lim\left(n^3 - 7n^2 - 1000\right) = +\infty$.

Observa. Aunque $a_1 = 1 - 7 - 1000 = -994$, $a_{100} = 1000000 - 70000 - 1000 = 929000 \ldots \to +\infty$.

b) $\lim\left(-n^2 + 10n + 80\right) = -\infty$. Observa: $a_{100} = -10000 + 100 + 80 = -9820$, $a_{1000} = -989920 \to -\infty$.

Recuerda: Las expresiones polinómicas toman valores muy grandes cuando la variable se hace muy grande, siendo el término de mayor grado el que determina el signo.

Sucesiones de tipo racional

Su término general es de la forma $a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$; en particular, $a_n = \dfrac{k}{Q(n)}$, $k \in \mathbf{R}$.

- Las sucesiones del tipo $a_n = \dfrac{k}{Q(n)}$ tienen límite 0. Reciben el nombre de sucesiones nulas.

Ejemplos:

a) La sucesión $a_n = \dfrac{1}{3n+1}$ toma cada vez valores más próximos a cero: $\lim \dfrac{1}{3n+1} = 0$.

Puede verse que: $a_{10} = \dfrac{1}{31}$; $a_{100} = \dfrac{1}{301}$; … $\Rightarrow \lim \dfrac{1}{3n+1} = 0$.

b) Análogamente, $\lim \dfrac{3}{n^2 - 2n + 4} = 0$.

- Las sucesiones del tipo $a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$, dan lugar a una indeterminación del tipo $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Pueden presentarse tres casos:

Caso 1: El grado de $Q(n)$ es mayor que el de $P(n)$. Su límite vale 0.

Ejemplo:

$\lim \dfrac{2n-1}{n^2-5} = 0$. Observa que si $a_n = \dfrac{2n-1}{n^2-5}$, entonces: $a_{100} = \dfrac{199}{9995}$; … $a_{1000} = \dfrac{1999}{999995}$; … → 0.

Caso 2: El grado de $Q(n)$ es menor que el de $P(n)$. Su límite vale ∞.

Ejemplo:

a) $\lim \dfrac{n^2-n}{2n+3}=+\infty$. Observa que si $a_n=\dfrac{n^2-n}{2n+3}$, entonces: $a_{100}=\dfrac{9900}{203}$; … $a_{1000}=\dfrac{999000}{2003}$ $\to \infty$.

Caso 3: Los polinomios $P(n)$ y $Q(n)$ son del mismo grado. Entonces, $\lim \dfrac{P(n)}{Q(n)}=\dfrac{p}{q}$, siendo p y q los coeficientes principales de $P(n)$ y $Q(n)$, respectivamente.

Ejemplos:

a) $\lim \dfrac{3n^2-17}{2n^2-16n+49}=\dfrac{3}{2}$. b) $\lim \dfrac{-2n^2+5n}{n^2-7}=\dfrac{-2}{1}=-2$. c) $\lim \dfrac{4n^3-5n}{3n^3+7n^2+4}=\dfrac{4}{3}$.

→ Obsérvese que, en relación con el límite, los términos significativos son los de mayor grado. En la práctica podría prescindirse de los términos de menor grado. Así, puede escribirse, por ejemplo:

a) $\lim \dfrac{3n^2-17}{2n^2-16n+49}=\lim \boxed{\dfrac{3n^2}{2n^2}}=\lim \dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$;

b) $\lim \dfrac{-n^3+3n^2-2n+17}{2n^2+n-8}=\lim \dfrac{-n^3}{2n^2}=\lim \dfrac{-n}{2}=-\infty$;

c) $\lim \dfrac{4n^3+3n^2-2n+17}{2n^5+5n^2+3n}=\lim \dfrac{4n^3}{2n^5}=\text{im}\dfrac{2}{n^2}=0$.

→ La justificación de estos resultados puede hacerse transformando la sucesión dada en otra equivalente cuyo límite sea más fácil de calcular; para ello, puede dividirse cada término del numerador y del denominador de la sucesión inicial por n elevada al mayor grado presente en la sucesión. En el ejemplo a) anterior, dividendo por n^4 queda:

$$\lim \frac{3n^2-17}{2n^4-16n+49}=\lim \frac{\frac{3n^2}{n^4}-\frac{17}{n^4}}{\frac{2n^4}{n^4}-\frac{16n}{n^4}+\frac{49}{n^4}}=\lim \frac{\frac{3}{n^2}-\frac{17}{n^4}}{2-\frac{16}{n^3}+\frac{49}{n^4}}=\left(\frac{0-0}{2-0+0}\right)=0.$$

Sucesiones con raíces

Son del tipo $\sqrt{a_n}$, siendo a_n cualquier sucesión.

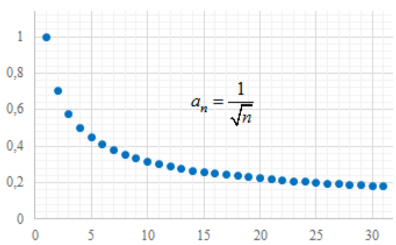
Su límite depende de la expresión en cuestión. Para determinarlo pueden ser necesarias las transformaciones usuales con radicales.

Ejemplos:

a) $\lim \sqrt{n}=\infty$. La sucesión $a_n=\sqrt{n}$ toma valores arbitrariamente grandes: $a_{10000}=\sqrt{10000}=100$.

b) La sucesión $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ toma valores cada vez más pequeños: $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$.

c) $\lim \sqrt{\dfrac{9n-3}{25n+5}}=\sqrt{\lim \dfrac{9n-3}{25n+5}}=\sqrt{\dfrac{9}{25}}=\dfrac{3}{5}$.



d) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2-3n}}{n}=\lim \sqrt{\dfrac{n^2-3n}{n^2}}=\lim \sqrt{1-\dfrac{3}{n}}=1$.

6. OPERACIONES CON SUCESIONES. INDETERMINACIÓN [∞ – ∞]

Las operaciones con sucesiones se realizan siguiendo las propiedades algebraicas habituales.
Las operaciones con límites se comportan también de la forma usual: cumplen las propiedades usuales. No obstante, hay veces en los que el límite presenta dificultades: son los llamados casos indeterminados. En total hay 7 formas indeterminadas, que, escritas esquemáticamente, son:

$$\left[\frac{0}{0}\right] \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad [0\cdot\infty] \quad [\infty-\infty] \quad [1^{\infty}] \quad [0^0] \quad [\infty^0]$$

→ En el caso de sucesiones que son cociente de polinomios se ha resuelto la indeterminación $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

→ Aquí se resolverá la indeterminación [∞ – ∞] para dos situaciones particulares.

Diferencia de sucesiones racionales: indeterminación [∞ – ∞]
La indeterminación puede resolverse operando en la expresión dada, hasta transformarla en otra forma indeterminada del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Se ve con el siguiente ejemplo.

Ejemplo:
Si $a_n=\frac{2n^2-3}{n+3}$ y $b_n=\frac{2n^2-5n}{n+2}$, el $\lim(a_n-b_n)=\lim\left(\frac{2n^2-3}{n+3}-\frac{2n^2-5n}{n+2}\right)=[\infty-\infty]$.
Este límite se transforma operando: haciendo la resta.

$$\lim\left(\frac{2n^2-3}{n+3}-\frac{2n^2-5n}{n+2}\right)=\lim\left(\frac{(2n^2-3)(n+2)-(n+3)(2n^2-5n)}{(n+3)(n+2)}\right)=$$

$$=\lim\left(\frac{\boxed{3n^2}+12n-6}{\boxed{n^2}+5n+6}\right)=\lim\left(\boxed{\frac{3n^2}{n^2}}\right)=\lim(3)=3.$$

Diferencia de sucesiones con raíces: indeterminación [∞ – ∞]
La indeterminación puede resolverse transformándola en otra de la forma del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Esta transformación se consigue multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada de la diferencia.

Ejemplo:
Si $a_n=\sqrt{n^2+2n}$ y $b_n=\sqrt{n^2-3n}$, el $\lim(a_n-b_n)=\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-3n}\right)=[\infty-\infty]$.
Multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada:

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-3n}\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-3n}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-3n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-3n}\right)}=$$

$$=\lim\frac{(n^2+2n)-(n^2-3n)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-3n}}=\lim\frac{5n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-3n}}=\text{(dividiendo por } n\text{)}=$$

$$=\lim\frac{\frac{5n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n}+\frac{\sqrt{n^2-3n}}{n}}=\lim\frac{5}{\sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2-3n}{n^2}}}=\left[\frac{5}{1+1}\right]=\frac{5}{2}.$$

7. SUCESIONES DE TIPO EXPONENCIAL. EL NÚMERO *e*

Sucesiones de tipo exponencial

Las más sencillas son de la forma $a_n = p{\cdot}k^n$, con p y $k \in \mathbf{R}$.
Su límite depende de los valores de p y k. En todos los casos hay que recodar el funcionamiento de las expresiones con potencias.

Ejemplos:

a) La sucesión $a_n = 3{\cdot}2^n$ toma valores cada vez más grandes: $\lim\left(3{\cdot}2^n\right) = 3{\cdot}\lim\left(2^n\right) = \left[3{\cdot}\infty\right] = \infty$.

b) La sucesión $a_n = 2^{-n}$ toma valores tan pequeños como se quiera: $\lim 2^{-n} = 0$.

Observa que $a_n = 2^{-n} = \dfrac{1}{2^n}$. Algunos de sus términos son: $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_{10} = \dfrac{1}{2^{10}}$, … → 0.

→ La sucesión $a_n = r^n$ con $|r| < 1$ es nula. Esto es, si $|r| < 1 \Rightarrow \lim r^n = 0$. Esto permite demostrar la fórmula de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón r, con $|r| < 1$.

Recuerda que la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica es: $S_n = \dfrac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r - 1}$.

Si $|r| < 1$ y el número de términos tendiese a infinito, como la expresión $r^n \to 0$, se tendrá que

$$\lim S_n = \lim \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r - 1} = \frac{a_1(-1)}{r - 1} = \frac{a_1}{1 - r}.$$

Ejemplo:

a) La suma $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots$, (p. g. de razón $r = 0{,}5$ y $a_1 = 1$), valdrá: $S = \dfrac{1}{1 - 0{,}5} = 2$.

b) El número periódico, $p = 3{,}4\widehat{7} = 3{,}47777\ldots$ Su fracción generatriz puede hallarse como sigue:

3,47777… = 3,4 + 0,07 + 0,007 + 0,0007 + … = 3,4 + (p. g. de r = 0,1 y $a_1 = 0{,}07$) =

$$= 3{,}4 + \frac{0{,}07}{1 - 0{,}1} = \frac{34}{10} + \frac{0{,}07}{0{,}99} = \frac{34}{10} + \frac{7}{99} = \frac{3436}{990} \to p = 3{,}4\widehat{7} = 3{,}47777\ldots = \frac{3436}{990}$$

El número *e*

El número e (de Euler) es la base de los logaritmos neperianos. Este número, que es irracional, se define como el límite de la sucesión $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Esto es: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

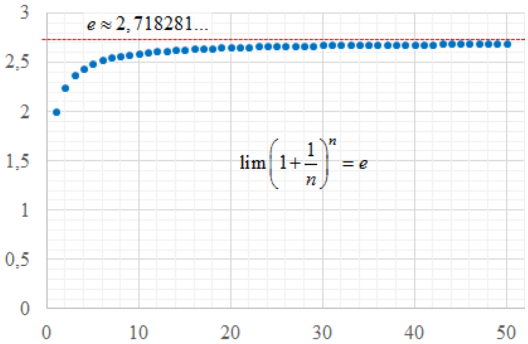
Si n se hace muy grande, el valor de a_n tiende a $[1^\infty]$.

Observa la tendencia de esta sucesión:

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2;\ a_{10} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}59374246;\ \ldots$$

$$a_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = (1{,}01)^{100} = 2{,}704813829;\ \ldots$$

$$a_{1000} = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = (1{,}001)^{1000} = 2{,}716923932\ldots$$



Pasando al límite: $a_n \to e \approx 2{,}718281828\ldots$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Halla la expresión del término general de las sucesiones:
a) 2, 4, 6, 8, 10, … b) 1, 2, 4, 8, 16, … c) 3, 6, 10, 18, 26, …
Halla el término décimo quinto de cada una de esas sucesiones.

2. Escribe los cinco primeros términos de la sucesión definida por recurrencia: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 1 \end{cases}$.
A la vista de esos términos halla otra expresión de su término general. Comprueba que dicha fórmula es válida para los primeros términos. Sin calcular a_{10}, ¿cuánto vale a_{11}?

3. a) Escribe tres términos más de la sucesión: 1, 3, 6, 10, 15, …
b) ¿Cuál es la expresión de su término general?

4. a) Escribe dos términos más de la sucesión: 2, 3, 6, 11, 18, 27, …
b) ¿Cuál es la expresión de su término general?

5. Interpola 3 números en progresión aritmética entre 14 y 37.

6. Interpola 2 números en progresión geométrica entre 1,5 y 12.

7. La sucesión 3, 0,3, 0,03, 0,003… es una progresión geométrica de razón $|r| < 1$. Halla su término general y la suma de los infinitos términos de la progresión.

8. Halla el límite de la sucesión: {2, 2,7, 2,77, 2,777, 2,7777, …}.

9. Utilizando la fórmula de la suma de los infinitos términos de una p. g. de razón $|r| < 1$ halla la fracción generatriz de los números periódicos: 3,707070… y 12,4666…

10. ¿Cómo es la sucesión $a_n = \dfrac{n+3}{n+1}$: creciente o decreciente? Con la información obtenida halla sus cotas inferior y superior.

11. Demuestra que la sucesión de término general $a_n = \dfrac{4n-1}{n+1}$ es creciente y halla una cota inferior positiva (justificando que es una cota inferior).

12. Dada la sucesión $a_n = \dfrac{3n+10}{n+3}$:
a) Demuestra que es decreciente y acotada inferiormente por *k* = 3.
b) ¿A partir de qué término se cumple que $a_n < 3{,}01$? c) Halla su límite.

13. Demuestra que $a_n = \dfrac{n-3}{4n+1}$ es creciente y acotada superiormente por *k* = 1/4. Halla su límite.

14. Dada la sucesión $a_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, se pide:
a) Demuestra que es creciente y acotada superiormente por *k* = 1.

b) ¿A partir de qué término se cumple que $a_n > 0,99$? c) Halla su límite.

15. Dada la sucesión $a_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$:

a) Halla sus 6 primeros términos. b) Demuestra que $a_n \le 2$.

c) ¿A partir de qué término se cumple $|a_n - 1| < 0,002$? d) Comprueba que $\lim\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$.

16. Considera las sucesiones $\{a_n\} = \{1, 5, 9, 13, \ldots\}$ y $\{b_n\} = \{5, 2, -1, -4, \ldots\}$.

a) Halla el término general de cada una de ellas. ¿Cuánto valen a_{300} y b_{35}?

b) Escribe la sucesión $c_n = \frac{a_n}{b_n}$. Calcula c_{35} y c_{300}. Halla su límite, si existe.

17. Dada la sucesión $\{2, 3/4, 4/9, 5/16, 6/25, ...\}$, halla:

a) Su término general y los términos décimo y vigésimo.

b) ¿A partir de qué término $a_n < 0,001$? c) ¿Cuál es su límite?

18. Indica el límite de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{5n - 2}$, b) $a_n = \frac{3n^2 + 1}{n^3 + 2n}$; c) $a_n = \frac{5n^2 - 5}{4n^2 - n}$; d) $a_n = \frac{(n^2 - 5)(2n + 3)}{5n - 4n^3}$.

19. Indica el valor de los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim(2n - 5)$; b) $\lim \frac{6n}{n^2 + 1}$; c) $\lim \frac{6n^2 + 3n}{2n^2 - 7n + 1}$: d) $\lim\left[(-1)^n n^2 - 5n\right]$.

20. Halla el valor de los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim\sqrt{n^2 + 3n}$; b) $\lim \frac{-3}{\sqrt{2n + 5}}$; c) $\lim\sqrt{\frac{4n^2 - 3}{n^2 + 5n}}$; d) $\lim \frac{\sqrt{n^2 + 3n}}{2n}$;

e) $\lim \frac{3n + 2}{\sqrt{n^2 + 1}}$; f) $\lim \frac{\sqrt{n^3 - n}}{2n - 1}$ g) $\lim \frac{3n^2 + 2}{\sqrt{n^3 + n^2}}$; h) $\lim \frac{\sqrt{9n^3 + 5n}}{n\sqrt{3n + 1}}$.

21. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\left(2n - \frac{n^2}{n - 1}\right)$; b) $\lim\left(\frac{n^2 + 2n}{n + 1} - \frac{n^2}{n - 1}\right)$; c) $\lim\left(\frac{n^2 - 2n}{2n - 1} - \frac{n^2 + 1}{n}\right)$.

22. Halla:

a) $\lim\left(n - \sqrt{n^2 + 1}\right)$; b) $\lim\left(2n - \sqrt{2n^2 + 2}\right)$; c) $\lim\left(\sqrt{4n^2 + 5n} - 2n\right)$;

d) $\lim\left(\sqrt{2n - 1} - \sqrt{n + 1}\right)$; e) $\lim\left(\sqrt{2n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + 1}\right)$; f) $\lim\left(\frac{n}{\sqrt{n} - 1} - \frac{n}{\sqrt{n} + 1}\right)$.

23. (Optativo) Demuéstrese que la sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es creciente y acotada.