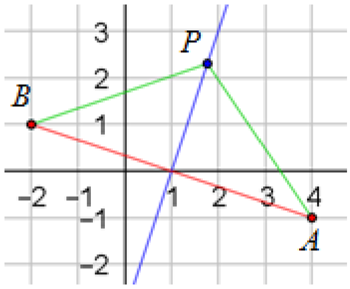
Solución de los Problemas Propuestos

1. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de $A(4, -1)$ y $B(-2, 1)$.
Solución:
Un punto $P(x, y)$ perteneciente a ese lugar geométrico debe cumplir:

$$d(P, A) = d(P, B) \Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}.$$



Desarrollando la expresión anterior:

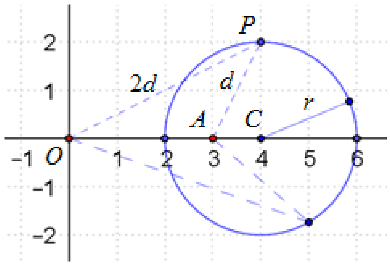
$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \Rightarrow$$

$$12x - 4y - 12 = 0 \Rightarrow 3x - y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3x - 3.$$

Se trata de una recta, que es la mediatriz del segmento AB.

2. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $O(0, 0)$ sea doble que la distancia al punto $A(3, 0)$.
Solución:
Los puntos $P(x, y)$ del plano cuya distancia a $O(0, 0)$ sea doble que la distancia a $A(3, 0)$, deben cumplir la relación: $d(O, P) = 2 \cdot d(A, P)$.



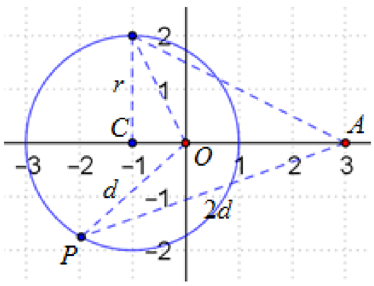
Luego:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4\left(x^2 - 6x + 9 + y^2\right) \Rightarrow$$

$3x^2 + 3y^2 - 24x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow$ (completando cuadrados) $\to$ $(x-4)^2 - 16 + y^2 + 12 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4$.

Se trata de una circunferencia con centro en $C(4, 0)$ y radio, $r = 2$.
$\to$ Dos de esos puntos son (2, 0) y (6, 0) $\to$ compruébalo. (Este problema se puso como ejemplo al principio del tema).

3. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al origen de coordenadas es la mitad que su distancia al punto $A(3, 0)$.
Solución:
Los puntos $P(x, y)$ del plano cuya distancia al punto $O(0, 0)$ sea la mitad que la distancia al punto $A(3, 0)$, deben cumplir la relación: $d(O, P) = \frac{1}{2} \cdot d(A, P) \Rightarrow 2 \cdot d(O, P) = d(A, P)$.



Luego:

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$4\left(x^2 + y^2\right) = x^2 - 6x + 9 + y^2 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 6x = 9 \Rightarrow$$

$x^2 + y^2 + 2x = 3 \Rightarrow$ (completando cuadrados) $\to$

$$(x+1)^2 - 1 + y^2 = 3 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 4.$$

Se trata de una circunferencia con centro en $C(-1, 0)$ y radio, $r = 2$.
$\to$ Dos de esos puntos son (1, 0) y (–1, 2) $\to$ compruébalo.

4. Halla la bisectriz del ángulo determinado por las rectas: $r: 4x-2y+6=0$ y $s: x+2y-4=0$.

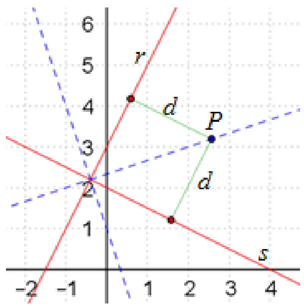
Solución:

La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a dos rectas dadas es constante.

Por tanto, si el punto $P(x, y)$ es de la bisectriz: $d(P,\ r)=d(P,\ s)$.

$$d(P,\ r)=\frac{4x-2y+6}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\frac{4x-2y+6}{2\sqrt{5}};\ d(P,\ s)=\frac{x+2y-4}{\pm\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{x+2y-4}{\pm\sqrt{5}}.$$

Igualando ambas distancias: $\dfrac{4x-2y+6}{2\sqrt{5}}=\dfrac{x+2y-4}{\pm\sqrt{5}}$.



Transformando la igualdad se obtiene:

→ Con $+\sqrt{5}$: $4x-2y+6=2\cdot(x+2y-4) \Rightarrow$

$2x-6y+14=0 \Rightarrow x-3y+7=0$.

→ Con $-\sqrt{5}$: $4x-2y+6=-2\cdot(x+2y-4) \Rightarrow$

$6x+2y-2=0 \Rightarrow 3x+y-1=0$.

Las bisectrices (interior y exterior) son dos rectas perpendiculares.

5. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a la recta $x = 6$ es doble que su distancia al punto (−3, 0). Da algunos puntos de ese lugar.

Solución:

Un punto $P(x, y)$ del plano cuya distancia a la recta $x = 6$ es doble que la distancia al punto $A(-3, 0)$, debe cumplir la relación: $d(P,\ r)=2\cdot d(P,\ A)$.

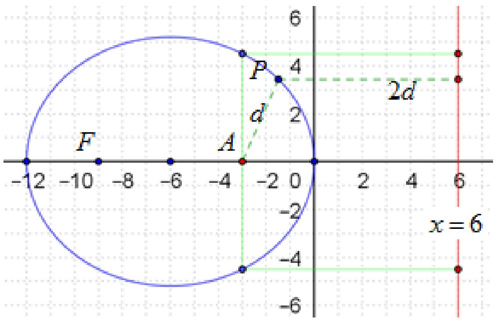
$$d(P(x,\ y),\ r: x-6=0)=6-x; \Rightarrow d(P,\ A)=\sqrt{(x+3)^2+y^2}.$$

Luego:

$$6-x=2\sqrt{(x+3)^2+y^2} \Rightarrow (6-x)^2=4\left((x+3)^2+y^2\right) \Rightarrow$$

$$36-12x+x^2=4x^2+24x+36+4y^2 \Rightarrow$$

$$3x^2+36x+4y^2=0.$$



La expresión $3x^2+36x+4y^2=0$ puede transformarse como sigue:

$$3x^2+36x+4y^2=0 \Leftrightarrow$$

$$3\left[x^2+12x\right]+4y^2=0 \Rightarrow 3\left[x^2+12x+\boxed{36-36}\right]+4y^2=0 \Rightarrow 3\left[(x+6)^2-36\right]+4y^2=0 \Rightarrow$$

$$3(x+6)^2+4y^2=108 \Rightarrow \frac{3(x+6)^2}{108}+\frac{4y^2}{108}=\frac{108}{108} \Rightarrow \frac{(x+6)^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$$

Se trata de una elipse centrada en el punto (–6, 0) y semiejes $a=6;\ b=\sqrt{27}$.

Sus focos son los puntos (–9, 0) y (–3, 0). Compruébalo.

→ Algunos de sus puntos son: (0, 0); (−9, 0); (−3, ±9/2).

6. Escribe la ecuación de las siguientes circunferencias:

a) Con centro $C(0, -2)$ y radio 3.
b) Con centro $C(0, -2)$ y que pasa por $P(3, 1)$.
c) Con centro $C(3, -2)$ y tangente al eje OX.
d) Con centro $C(-4, 3)$ y tangente al eje OY.

Solución:

a) $x^2+(y+2)^2=9$.

b) El radio es $d(C,\ P)=\sqrt{(3-0)^2+(1+2)^2}=\sqrt{18} \Rightarrow x^2+(y+2)^2=18$.

c) El radio es la distancia de $C(3, -2)$ al eje OX: $d\left(C(3,-2),\ y=0\right)=2 \to (x-3)^2+(y+2)^2=4$.

d) El radio es la distancia de $C(-4, 3)$ al eje OY: $d\left(C(-4,\ 3),\ x=0\right)=3 \to (x+4)^2+(y-1)^2=16$.

7. Indica el centro y el radio de las siguientes circunferencias:
a) $(x+4)^2+(y-1)^2=10$; b) $(x-3)^2+y^2=16$; c) $(x+2)^2+(y+2)^2=2^2$.
Expresa cada una de las ecuaciones anteriores en su forma general.
Solución:
a) $(x+4)^2+(y-1)^2=10 \to$ Centro $C(-4, 1)$; radio, $r=\sqrt{10}$.
Haciendo los cuadrados y trasponiendo términos:
$$x^2+8x+16+y^2-2y+1-10=0 \Rightarrow x^2+y^2+8x-2y+7=0.$$

b) $(x-3)^2+y^2=16 \to$ Centro $C(3, 0)$; radio, $r=4$.
Haciendo los cuadrados y trasponiendo términos:
$$x^2-6x+9+y^2-16=0 \Rightarrow x^2+y^2-6x-7=0.$$

c) $(x+2)^2+(y+2)^2=2^2 \to$ Centro $C(-2, -2)$; radio, $r=2$.
Haciendo los cuadrados y trasponiendo términos:
$$x^2+4x+4+y^2+4y+4=4 \Rightarrow x^2+y^2+4x+4y+4=0.$$

8. Halla el centro y el radio de la circunferencia de ecuación:
a) $x^2+y^2+2x-6y+6=0$; b) $x^2+y^2-4x+2y-4=0$; c) $x^2+y^2-4x+4y+4=0$.
Solución:
En todos los casos hay que completar binomios al cuadrado.
a) $x^2+y^2+2x-6y+6=0 \to \underline{x^2+2x+1}\boxed{-1}+\underline{y^2-6y+9}\boxed{-9}+6=0 \Rightarrow$
$(x+1)^2-1+(y-3)^2-9+6=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=4 \to C(-1, 3)$; $r = 2$.

b) $x^2+y^2-4x+2y-4=0 \to \underline{x^2-4x+4}\boxed{-4}+\underline{y^2+2y+1}\boxed{-1}-4=0 \Rightarrow$
$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1-4=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=9 \to C(2, -1)$; $r = 3$.

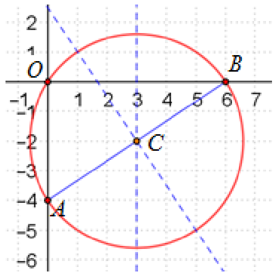
c) $x^2+y^2-4x+4y+4=0 \to \underline{x^2-4x+4}\boxed{-4}+\underline{y^2+4y+4}\boxed{-4}+4=0 \Rightarrow$
$(x-2)^2-4+(y+2)^2-4+4=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+2)^2=4 \to C(2, -2)$; $r = 2$.

9. Para los puntos $A(0, -4)$ y $B(6, 0)$, halla:
a) La mediatriz del segmento que determinan.
b) La ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y $O(0, 0)$.
Solución:
a) Si $P(x,\ y)$ es de la mediatriz, entonces:
$$d(P,\ A)=d(P,\ B) \Rightarrow \sqrt{x^2+(y+4)^2}=\sqrt{(x-6)^2+y^2}.$$
Desarrollando la expresión anterior.

$$x^2+(y+4)^2=(x-6)^2+y^2 \Rightarrow$$
$$x^2+y^2+8y+16=x^2-12x+36+y^2 \Rightarrow$$
$$12x+8y-20=0 \Rightarrow 3x+2y-5=0.$$

b) El centro de la circunferencia es el corte de la mediatriz hallada con la mediatriz del segmento de extremos *O* y *B*, que es *x* = 3. (El circuncentro del triángulo *AOB*).

$$\begin{cases} 3x+2y-5=0 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow x=3;\ y=-2 \rightarrow C(3,\ -2).$$



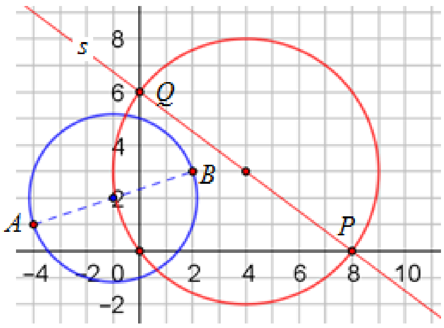
El radio es la distancia de *C* a *O*: $d(C,\ O)=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$.

La ecuación de la circunferencia es: $(x-3)^2+(y+2)^2=13$.

10. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene un diámetro determinado:
a) Por los puntos *A*(–4, 1) y *B*(2, 3).
b) Por los puntos de corte de la recta *s*: $3x+4y-24=0$ con los ejes de coordenadas.
<u>Solución</u>:
a) El centro está en el punto medio de *AB*; su radio mide la mitad de la distancia entre *A* y *B*.

$$C=\left(\frac{-4+2}{2},\ \frac{1+3}{2}\right)=(-1,\ 2);\ \ d(A,\ B)=\sqrt{(-4-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{40} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{40}}{2}=\sqrt{10}.$$

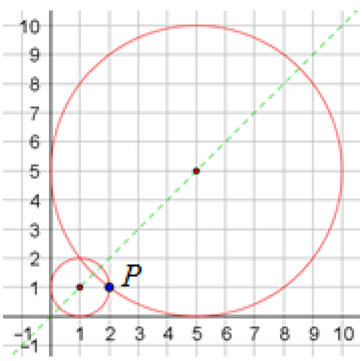
Por tanto, su ecuación es $(x+1)^2+(y-2)^2=10$.



b) Por los puntos de corte de la recta *s*: $3x+4y-24=0$ con los ejes de coordenadas son *P*(8, 0) y *Q*(0, 6).
Luego, el centro de esta circunferencia está en $C(4,\ 3)$; su radio es $r=\frac{\sqrt{8^2+6^2}}{2}=5$.

Su ecuación: $(x-4)^2+(y-3)^2=25$.

11. Halla la ecuación de las circunferencias que pasan por el punto *P*(2, 1) y son tangentes a los ejes de coordenadas.
<u>Solución</u>:
Si la circunferencia es tangente a los ejes cartesianos, como está en el primer cuadrante (por pasar por *P*(2, 1)), su centro estará en algún punto de la forma $C(a,\ a)$; y su radio medirá, *r* = *a*.



Por tanto, su ecuación es: $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$.

Por pasar por *P*(2, 1) $\Rightarrow (2-a)^2+(1-a)^2=a^2 \Rightarrow$

$$4-4a+a^2+1-2a+a^2=a^2 \Rightarrow$$
$$a^2-6a+5=0 \Rightarrow a=1;\ a=5.$$

Hay dos circunferencias que cumplen lo exigido. Son:

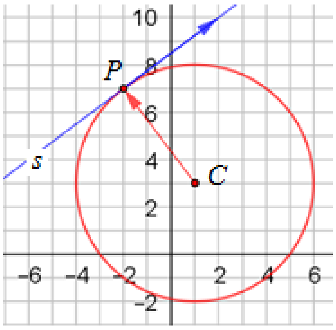
$$(x-1)^2+(y-1)^2=1;\ (x-5)^2+(y-5)^2=25.$$

12. Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x-1)^2+(y-3)^2=25$ en el punto $P(-2, 7)$ de ella.

Solución:

Puede comprobarse que el punto $P(-2, 7)$ pertenece a la circunferencia. En efecto:

$$(-2-1)^2+(7-3)^2=9+16=25.$$



La dirección de la recta tangente debe ser perpendicular a la dirección del radio correspondiente al punto de tangencia; esta dirección viene dada por el vector $\overrightarrow{CP}$ = (−2, 7) − (1, 3) = (−3, 4), siendo $C(1, 3)$ el centro de la circunferencia.

Un vector perpendicular a $\overrightarrow{CP}$ es $\vec{v}$ = (4, 3).

Luego, las ecuaciones paramétricas de la recta buscada son: $s:\begin{cases} x=-2+4t \\ y=7+3t \end{cases}$.

La ecuación punto pendiente de s es: $y-7=\dfrac{3}{4}(x+2) \Rightarrow s: 3x-4y+34=0$.

13. Halla las tangentes a la circunferencia $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ que sean paralelas a la recta $s: y=x+5$.

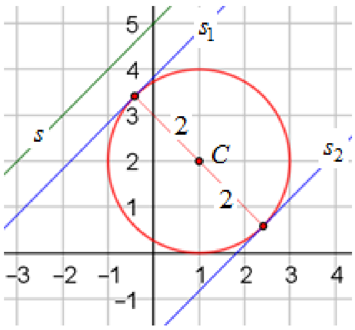
Solución:

Hay dos rectas que cumplen la propiedad pedida. Ambas deben tener pendiente 1, la misma pendiente que $s: y=x+5$, ($y=x+n$), y estar a distancia un radio (r = 2) del centro de la circunferencia.

El centro es $C(1, 2)$; luego debe cumplir que:

$$d(C,\ s: x-y+n=0)=2 \Rightarrow \frac{|1-2+n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2 \Rightarrow$$

$$|-1+n|=2\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} -1+n=2\sqrt{2} \to n=1+2\sqrt{2} \\ 1-n=2\sqrt{2} \to n=1-2\sqrt{2} \end{cases}.$$



Las tangentes pedidas son:

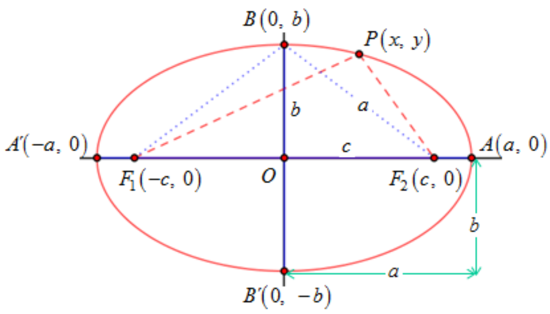
$$s_1: y=x+1+2\sqrt{2} \text{ y } s_2: y=x+1-2\sqrt{2}.$$

14. A partir de la definición de elipse y de su ecuación de la forma $d(P,\ F_1)+d(P,\ F_2)=2a \Rightarrow$ $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$, obtén su ecuación reducida: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Solución:

Cualquier punto $P(x,\ y)$ de la elipse centrada en $O(0, 0)$, con focos en los puntos $F_1=(-c,\ 0)$ y $F_2=(c,\ 0)$, y ejes $2a$ y $2b$, cumple que la suma de distancias $d(C,\ F_1)+d(C,\ F_2)=2a \Rightarrow$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$



Esta última ecuación puede transformarse como sigue:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$\to$ se hacen cuadrados $\to$

$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \to$ se desarrollan los binomios al cuadrado $\to \cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2+y^2}=4a^2-4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}+\cancel{x^2}-2cx+\cancel{c^2+y^2} \to$ se simplifica $\to$

$4cx-4a^2=-4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} \to cx-a^2=-a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} \to$ se eleva al cuadrado $\to c^2x^2-2ca^2x+a^4=a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right) \to$ se opera y trasponen términos; se saca factor común $\to c^2x^2-2ca^2x+a^4=a^2x^2-2ca^2x+a^2c^2+a^2y^2 \Rightarrow a^4=a^2x^2-c^2x^2+a^2c^2+a^2y^2 \Rightarrow$

$a^4-a^2c^2=\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2 \Rightarrow a^2\left(a^2-c^2\right)=\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2 \to$ se tiene en cuenta que

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2-c^2=b^2 \to a^2b^2=b^2x^2+a^2y^2 \to$ dividiendo por $a^2b^2 \to$

$$\frac{a^2b^2}{a^2b^2}=\frac{b^2x^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

15. Haz una representación gráfica aproximada de la elipse de ecuación $3x^2+4y^2-12=0$.

<u>Solución:</u>

La ecuación dada, $3x^2+4y^2-12=0 \Leftrightarrow 3x^2+4y^2=12 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2}{12}+\frac{4y^2}{12}=\frac{12}{12} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

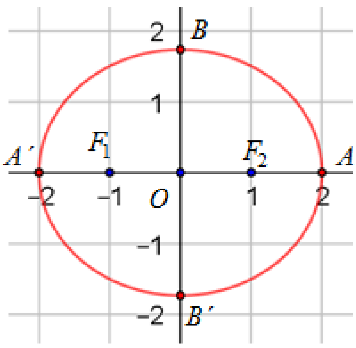
Es una elipse, centrada en el origen, con semiejes: $a = 2$ y $b=\sqrt{3}$.

Por tanto, sus vértices están en los puntos:

$A(2, 0)$; $A´(-2, 0)$; $B\left(\sqrt{3},\ 0\right)$ y $B´\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$.

Como $c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c=1$. Los focos están en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

Con estos datos se pueden trazar una elipse aproximada a la adjunta.



16. Indica los elementos característicos de las siguientes elipses:

a) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$; b) $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$; c) $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{2}=1$.

Para la última de ellas da su ecuación general.

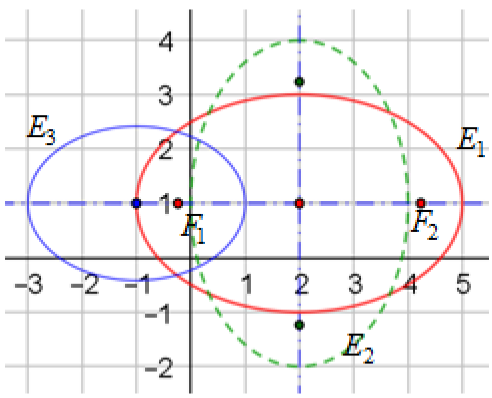
<u>Solución</u>:

a) $E_1 \equiv \frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$. Elipse centrada en el punto (2, 1), de semiejes $a = 3$ y $b = 2$.

Por tanto, $c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$. Focos (situados a izquierda y derecha del centro una distancia c) :

$F_1=\left(2-\sqrt{5},\ 1\right)$ y $F_2=\left(2+\sqrt{5},\ 1\right)$.

Excentricidad: $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.



b) $E_2 \equiv \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$. Elipse centrada en el punto (2, 1), de semiejes $a = 2$ y $b = 3 \Rightarrow$ los focos los tiene en el eje vertical.

Por tanto, $c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$. Focos (situados encima y debajo del centro una distancia c) :

$F_1=\left(2,\ 1+\sqrt{5}\right)$ y $F_2=\left(2,\ 1-\sqrt{5}\right)$.

Excentricidad: $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

c) $E_3 \equiv \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{2}=1$. Elipse centrada en el punto (–1, 1), de semiejes a = 2 y $b=\sqrt{2}$.
Por tanto, $c=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$. Focos (situados a izquierda y derecha del centro una distancia c) :
$F_1=\left(-1-\sqrt{2},\ 1\right)$ y $F_2=\left(-1+\sqrt{2},\ 1\right)$.

Excentricidad: $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

→ La ecuación en su forma general se obtiene quitando denominadores, desarrollando los cuadrados y trasponiendo todos los términos a un mismo miembro.

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{2}=1 \to \text{(multiplicando por 4)} \to (x+1)^2+2(y-1)^2=4 \Rightarrow$$
$$x^2+2x+1+2\left(y^2-2y+1\right)=4 \Rightarrow x^2+2y^2+2x-4y-1=0.$$

17. A partir de la ecuación de la elipse centrada en el punto $P(x_0,\ y_0)$ y de semiejes a y b,
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, obtén su <u>ecuación general</u>: $cx^2+dy^2+mx+ny+p=0$.
Utilizando las equivalencias encontradas, halla los elementos característicos de la le elipse de ecuación $4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$.

<u>Solución</u>:
Quitando denominadores y desarrollando los cuadrados se obtiene:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \Rightarrow b^2(x-x_0)^2+a^2(y-y_0)^2=a^2b^2 \Rightarrow$$
$$b^2\left(x^2-2x_0x+x_0^{\ 2}\right)+a^2\left(y^2-2y_0y+y_0^{\ 2}\right)=a^2b^2 \Rightarrow$$
$$b^2x^2-2b^2x_0x+b^2x_0^{\ 2}+a^2y^2-2a^2y_0y+a^2y_0^{\ 2}=a^2b^2 \to \text{ordenando y trasponiendo términos} \to$$
$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2x_0x-2a^2y_0y+b^2x_0^{\ 2}+a^2y_0^{\ 2}-a^2b^2=0.$$

→ Haciendo: $c=b^2$; $d=a^2$; $m=-2b^2x_0$; $n=-2a^2y_0$; $p=b^2x_0^{\ 2}+a^2y_0^{\ 2}-a^2b^2$, se obtiene la expresión buscada: $cx^2+dy^2+mx+ny+p=0$.

<u>Notas</u>: 1) Los parámetros c y d deben tener el mismo signo. 2) También deben cumplir que $c \neq d$, pues si son iguales la elipse se transforma en circunferencia.

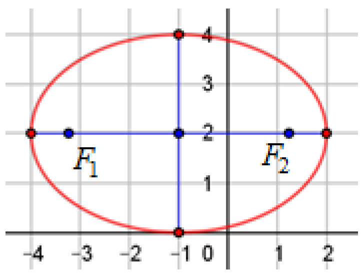
- Para $4x^2+9y^2+8x-36y+4=0 \Rightarrow$

$$4=b^2 \to b=2;\ 9=a^2 \to a=3;\ 8=-2\cdot 4x_0 \to x_0=-1;\ -36=-2\cdot 9y_0 \to y_0=2.$$

La elipse tiene centro en P(–1, 2) y semiejes a = 3 y b = 2.

Su ecuación equivalente es: $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$.

La semidistancia focal es: $c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$.
Por tanto, sus focos están en los puntos situados a izquierda y derecha de P una distancia de $\sqrt{5}$.
Serán $F_1\left(-1-\sqrt{5},\ 2\right)$ y $F_2\left(-1+\sqrt{5},\ 2\right)$.



Nota: Esta segunda parte del problema puede hacerse sin saber las equivalencias encontradas. Bastaría con completar cuadrados, como se ha hecho en problemas anteriores. Así:

$$4x^2+9y^2+8x-36y+4=0 \Leftrightarrow 4\left(x^2+2x\right)+9\left(y^2-4y\right)+4=0 \Rightarrow$$

$$4\left((x+1)^2-1\right)+9\left((y-2)^2-4\right)+4=0 \Rightarrow 4(x+1)^2-4+9(y-2)^2-36+4=0 \Rightarrow$$

$$4(x+1)^2+9(y-2)^2=36 \rightarrow \text{dividiendo por } 36 \rightarrow$$

$$\frac{4(x+1)^2}{36}+\frac{9(y-2)^2}{36}=\frac{36}{36} \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

18. Halla los parámetros de la elipse de ecuación $x^2+4y^2-4=0$.

Solución:

Dividiendo por 4: $x^2+4y^2-4=0 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{4y^2}{4}-\frac{4}{4}=0 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

Es la elipse centrada en el origen, de semiejes $a = 2$ y $b = 1$. Por tanto, $c=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$.

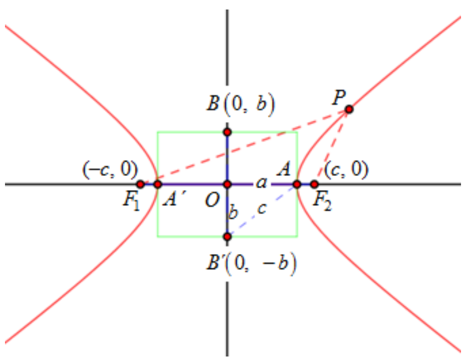
Focos: $F_1=\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$ y $F_2=\left(\sqrt{3},\ 0\right)$. Excentricidad: $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

19. A partir de la definición de hipérbola y de su ecuación de la forma $d\left(P,\ F_1\right)-d\left(P,\ F_2\right)=2a$ $\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$, obtén su ecuación reducida: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Solución:

Cualquier punto $P(x,\ y)$ de la hipérbola centrada en $O(0, 0)$, con focos en los puntos $F_1=(-c,\ 0)$ y $F_2=(c,\ 0)$, y ejes $2a$ y $2b$, cumple que la diferencia de distancias $d\left(C,\ F_1\right)-d\left(C,\ F_2\right)=2a \Rightarrow$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$



Expresión que puede transformarse como sigue:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \Rightarrow$$

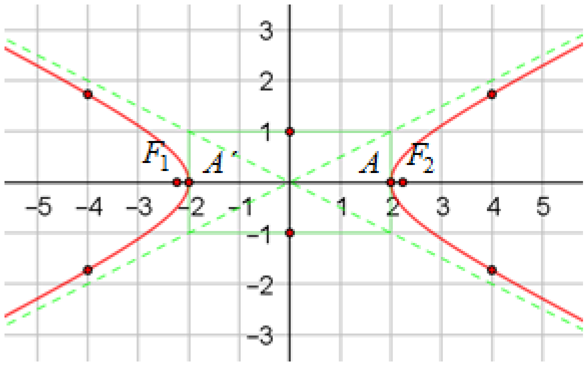
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$\rightarrow$ se hacen cuadrados $\rightarrow$ $(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$ $\rightarrow$ se desarrollan los binomios al cuadrado $\rightarrow$ $\cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2+y^2}=4a^2+4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}+\cancel{x^2}-2cx+\cancel{c^2+y^2}$ $\rightarrow$ se simplifica $\rightarrow$ $4cx-4a^2=+4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$ $\rightarrow$ $cx-a^2=a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$ $\rightarrow$ se eleva al cuadrado $\rightarrow$ $c^2x^2-2ca^2\cancel{x+a^4}=a^2\left(x^2-2c\cancel{x+c^2}+y^2\right)$ $\rightarrow$ se opera y trasponen términos; se saca factor común $\rightarrow$ $c^2x^2-2ca^2x+a^4=a^2x^2-2ca^2x+a^2c^2+a^2y^2 \Rightarrow c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$ $\Rightarrow \left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$ $\rightarrow$ se tiene en cuenta que $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2-a^2=b^2$ $\rightarrow$

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \rightarrow \text{dividiendo por } a^2b^2 \rightarrow \frac{b^2x^2}{a^2b^2}-\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

20. Haz una representación gráfica aproximada de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$.

Solución:
Es una hipérbola centrada en el origen, de semiejes $a = 2$ y $b = 1$.
Sus vértices son los puntos $A'(-2, 0)$ y $A(2, 0)$.
El parámetro $c=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$; por tanto, sus focos están en los puntos $F_1=\left(-\sqrt{5},\ 0\right)$ y $F_2=\left(\sqrt{5},\ 0\right)$.



Para dibujarla conviene trazar sus asíntotas: las rectas $y=-\frac{1}{2}x$ e $y=\frac{1}{2}x$.
Su gráfica es la adjunta.
→ Para buscar otros puntos de la hipérbola habría que despejar y:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1 \Rightarrow y^2=\frac{x^2}{4}-1 \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}.$$

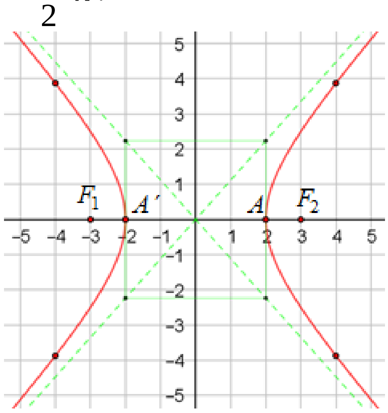
Así, para $x = 4$, $y=\pm\sqrt{3}\approx\pm1{,}73$ → puntos (4, 1,73); (4, –1,73).
Para la rama de la izquierda: (–4, 1,73); (–4, –1,73).
Observa que el valor de y no está definido si $|x|<2 \to x^2<4$.

21. Dibuja e indica todos los elementos de la hipérbola de focos (–3, 0) y (3, 0) y cuyo eje horizontal mide 4. Halla su ecuación.
Solución:
El eje horizontal es $2a = 4 \Rightarrow a = 2$.
Sus focos son $F_1=(-3,\ 0)$ y $F_2=(3,\ 0)$ $\Rightarrow 2c = 6$; $c = 3$.
Como $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$.

La hipérbola centrada en origen de semiejes $a = 2$ y $b=\sqrt{5}$ es: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

Sus vértices son: $A(2, 0)$; $A'(-2, 0)$:

Para dibujarla conviene trazar sus asíntotas: las rectas $y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x$ e $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$.



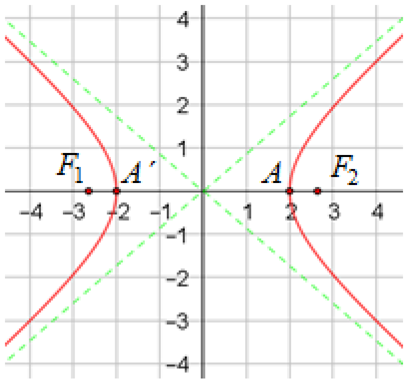
Su gráfica es la adjunta.
→ Para buscar otros puntos de la hipérbola habría que despejar y:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1 \Rightarrow y^2=5\cdot\left(\frac{x^2}{4}-1\right) \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{5}{4}x^2-5}.$$

Así, para $x = 4$, $y = \pm3{,}87$ → puntos (4, 3,87); (4, –3,87).
Para la rama de la izquierda: (–4, 3,87); (–4, –3,87).
Observa que el valor de y no está definido si $|x|<2 \to x^2<4$.

22. Haz una representación gráfica aproximada de la hipérbola de ecuación $3x^2-4y^2-12=0$.
Solución:
La ecuación dada, $3x^2-4y^2-12=0 \Leftrightarrow 3x^2-4y^2=12 \Leftrightarrow$

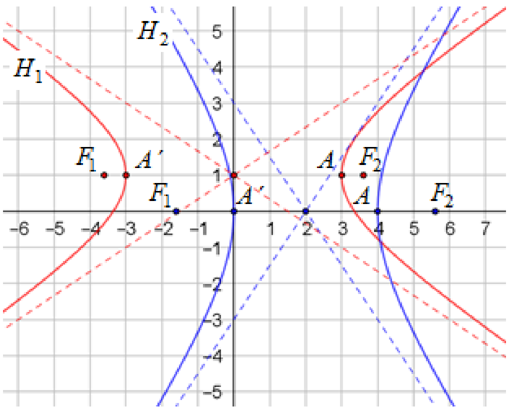
$$\Leftrightarrow \frac{3x^2}{12}-\frac{4y^2}{12}=\frac{12}{12} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1.$$



Es una hipérbola, centrada en el origen, con semiejes: $a = 2$ y $b=\sqrt{3}$.
Por tanto, sus vértices están en los puntos: $A(2, 0)$ y $A'(-2, 0)$
Como $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{7}$.
Los focos están en los puntos $F_1 = \left(-\sqrt{7},\ 0\right)$ y $F_2 = \left(\sqrt{7},\ 0\right)$.

Sus asíntotas son: $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$; $y = +\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.
Con estos datos se pueden trazar una hipérbola aproximada a la adjunta.
(Antes de dibujar la hipérbola conviene trazar las asíntotas, para que sirvan de guía).

23. Indica en cada caso los elementos característicos de las siguientes hipérbolas:
a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$; b) $\dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; c) $\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{(y-1)^2}{2} = 1$.
En cada caso determina sus asíntotas. Para la última de ellas da su ecuación general.
<u>Solución</u>:
a) $H_1 \equiv \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$. Hipérbola centrada en el punto (0, 1), de semiejes $a = 3$ y $b = 2$.
Por tanto, $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Focos (situados a izquierda y derecha del centro una distancia c) :
$F_1 = \left(-\sqrt{13},\ 1\right)$ y $F_2 = \left(\sqrt{13},\ 1\right)$.
Vértices (3 unidades a izquierda y derecha del centro):
$A(3, 1)$; $A'(-3, 1)$



Excentricidad: $e = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$.
Asíntotas: rectas que pasan por el punto (0, 1) con pendientes $\pm 2/3 \to$ $y-1 = -\dfrac{2}{3}x$; $y-1 = \dfrac{2}{3}x$.

b) $H_2 \equiv \dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. Hipérbola centrada en el punto (2, 0), de semiejes $a = 2$ y $b = 3$.
Por tanto, $c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. Focos (situados a izquierda y derecha del centro una distancia c):
$F_1 = \left(2-\sqrt{13},\ 0\right)$ y $F_1 = \left(2+\sqrt{13},\ 0\right)$.
Vértices (dos unidades a izquierda y derecha del centro): $A'(0, 0)$; $A(4, 0)$.
Excentricidad: $e = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.
Asíntotas: rectas que pasan por el punto (2, 0) con pendientes $\pm 3/2 \to$
$y = -\dfrac{3}{2}(x-2)$; $y = \dfrac{3}{2}(x-2)$.

c) $H_3 \equiv \dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{(y-1)^2}{2} = 1$. Hipérbola centrada en el punto (–1, 1), de semiejes $a = 2$ y $b = \sqrt{2}$.
Por tanto, $c = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$. Focos (situados a izquierda y derecha del centro una distancia c):

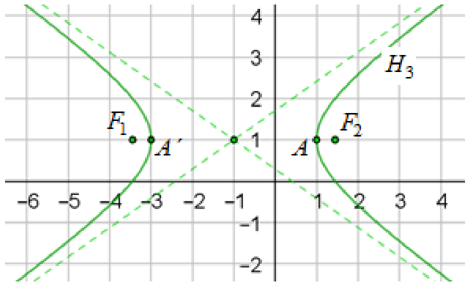
$F_1 = \left(-1-\sqrt{6},\ 1\right)$ y $F_2 = \left(-1+\sqrt{6},\ 1\right)$.

Vértices (dos unidades a izquierda y derecha del centro):

A(1, 1); *A´*(–3, 1)

Excentricidad: $e = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Asíntotas: rectas que pasan por el punto (–1, 1) con pendientes $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \to y-1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+1);\ y-1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$.



→ La ecuación en su forma general se obtiene quitando denominadores, desarrollando los cuadrados y trasponiendo todos los términos a un mismo miembro.

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{2} = 1 \to \text{(multiplicando por 4)} \to (x+1)^2 - 2(y-1)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 - 2\left(y^2 - 2y + 1\right) = 4 \Rightarrow x^2 - 2y^2 + 2x + 4y - 5 = 0.$$

24. A partir de la ecuación de la hipérbola centrada en el punto $P(x_0,\ y_0)$ y de semiejes *a* y *b*, $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, obtén su <u>ecuación general</u>: $cx^2 + dy^2 + mx + ny + p = 0$, con *c* y *d* de distinto signo.

Utilizando las equivalencias encontradas, halla los elementos característicos de la le elipse de ecuación $9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 43 = 0$.

<u>Solución</u>:

Quitando denominadores y desarrollando los cuadrados se obtiene:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2(x-x_0)^2 - a^2(y-y_0)^2 = a^2b^2 \Rightarrow$$

$$b^2\left(x^2 - 2x_0x + x_0^2\right) - a^2\left(y^2 - 2y_0y + y_0^2\right) = a^2b^2 \Rightarrow$$

$$b^2x^2 - 2b^2x_0x + b^2x_0^2 - a^2y^2 + 2a^2y_0y - a^2y_0^2 = a^2b^2 \to \text{ordenando y trasponiendo términos} \to$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2x_0x + 2a^2y_0y + b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0.$$

→ Haciendo: $c = b^2;\ d = -a^2;\ m = -2b^2x_0;\ n = +2a^2y_0;\ p = b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2$, se obtiene la expresión buscada: $cx^2 + dy^2 + mx + ny + p = 0$.

<u>Nota</u>: Debe observarse que los parámetros *c* y *d* tienen distinto signo.

Para $9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 43 = 0 \Rightarrow$

$9 = b^2 \to b = 3;\ -4 = -a^2 \to a = 2;$.

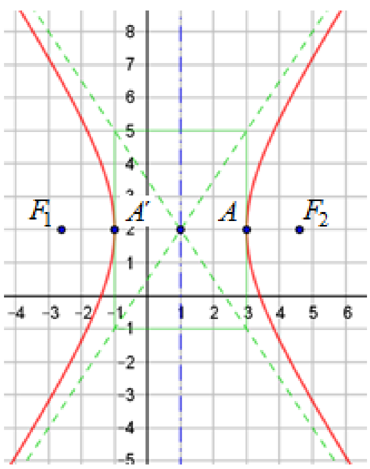
$-18 = -2{\cdot}9x_0 \to x_0 = 1;\ 16 = 2{\cdot}4y_0 \to y_0 = 2$

La hipérbola tiene centro en *P*(1, 2) y semiejes *a* = 2 y *b* = 3.

Su ecuación equivalente es: $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$.

La semidistancia focal es: $c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

Por tanto, sus focos están en los puntos situados a izquierda y derecha de *P* una distancia de $\sqrt{13}$.



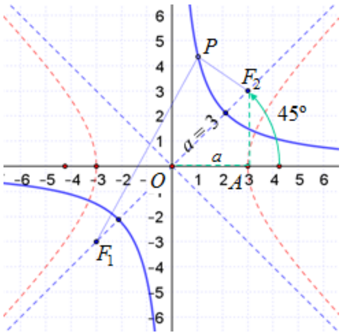
Serán $F_1\left(1-\sqrt{13},\ 2\right)$ y $F_2\left(1+\sqrt{13},\ 2\right)$.

Los vértices A y A' están a distancia 2 del centro. Son los puntos $A'(1 - 2, 2) = (-1, 2)$ y $A(1 + 2, 2) = (3, 2)$.

Nota: La segunda parte del problema puede hacerse completando cuadrados, como se hizo con la elipse: Problema 5.

25. Obtén la ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas, $\left[xy=\dfrac{a^2}{2} \Leftrightarrow xy=k\right]$, a partir de la definición y de su ecuación en la forma $d\left(P,\ F_1\right)-d\left(P,\ F_2\right)=2a \Rightarrow$ $\sqrt{(x+a)^2+y^2}-\sqrt{(x-a)^2+y^2}=2a$.

Solución:



Cualquier punto $P(x,\ y)$ de la hipérbola centrada en $O(0, 0)$, con focos en los puntos $F_2(a,\ a)$ y $F_1(-a,\ -a)$, y ejes $2a$ y $2b=2a$, cumple que la diferencia de distancias $d\left(P,\ F_1\right)-d\left(P,\ F_2\right)=2a \Rightarrow$

$$\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}-\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}=2a.$$

Esta expresión puede transformarse como sigue:

$\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}=2a+\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}$ → se hacen cuadrados

$\to \cancel{(x+a)^2}+(y+a)^2=4a^2+4a\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}+\cancel{(x-a)^2}+(y-a)^2$

→ se desarrollan los binomios al cuadrado →

$\cancel{x^2}+2ax+\cancel{a^2+y^2}+2ay+\cancel{a^2}=4a^2+4a\sqrt{x^2-2ax+a^2y^2+2ay+a^2}+\cancel{x^2}-2ax+\cancel{a^2+y^2}-2ay+\cancel{a^2}$

→ se simplifica → $4ax+4ay-4a^2=4a\sqrt{x^2-2ax+a^2+y^2-2ay+a^2}$ →

$\to x+y-a=\sqrt{x^2-2ax+a^2+y^2-2ay+a^2}$ → se eleva al cuadrado →

$\to x^2+y^2+a^2+2xy-2ax-2ay=x^2-2ax+a^2+y^2-2ay+a^2$ → se simplifica →

$\to 2xy=a^2 \Rightarrow xy=\dfrac{a^2}{2} \Leftrightarrow xy=k$.

Nota: En el tema 9 (Vectores) se utilizaron las ecuaciones de un giro de 45º para obtener esta expresión.

26. Halla para cada una de las siguientes hipérbolas sus vértices y focos, y haz su representación gráfica dañado valores.

a) $xy=8$; b) $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$; c) $xy=-4$.

Solución:

Se trata de hipérbolas equiláteras; la a) y c) referidas a sus asíntotas.

a) Como $xy=\dfrac{a^2}{2} \Leftrightarrow xy=k \Rightarrow k=\dfrac{a^2}{2} \Rightarrow 8=\dfrac{a^2}{2} \Rightarrow a=4$.

Sus focos están en los puntos $F_1(-4,\ -4)$ y $F_2(4,\ 4)$.

El vértice $A\left(x_0,\ x_0\right)$ cumple que $x_0{}^2+x_0{}^2=a^2 \Rightarrow 2x_0{}^2=16 \Rightarrow x_0=\sqrt{8}$.

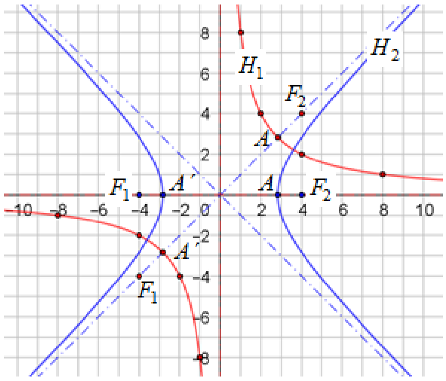
Por tanto, sus vértices son: $A\left(\sqrt{8},\ \sqrt{8}\right)$ y $A'\left(-\sqrt{8},\ -\sqrt{8}\right)$.

Despejando en $H_1 \equiv xy = 8 \Rightarrow y = \dfrac{8}{x}$.

Dando valores a x se obtiene algunos puntos de la hipérbola:

(1, 8); (2, 4); (4, 2); (8, 1); …

(–1, –8); (–2, –4); (–4, –2); (–8, –1)

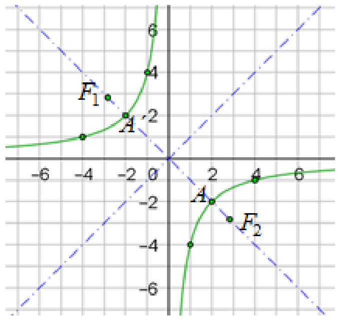


b) $H_2 \equiv \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{8} = 1 \rightarrow$ Hipérbola equilátera de parámetros:

$a = b = \sqrt{8}$; $c = 4$.

Es la hipérbola anterior, girada 45º en el sentido de las agujas del reloj.

c) $xy = -4 \rightarrow k = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow -4 = -\dfrac{a^2}{2} \Rightarrow a = \sqrt{8}$.



Esta hipérbola tiene sus focos en la recta $y = -x$. Puntos

Sus focos están en los puntos $F_1\left(-\sqrt{8},\ \sqrt{8}\right)$ y $F_2\left(\sqrt{8},\ -\sqrt{8}\right)$.

El vértice $A\left(x_0,\ x_0\right)$ cumple que $x_0^{\ 2} + x_0^{\ 2} = a^2 \Rightarrow 2x_0^{\ 2} = 8 \Rightarrow x_0 = 2$.

Por tanto, sus vértices son: $A(2,\ -2)$ y $A'(-2,\ 2)$.

Otros puntos son: (–1, 4); (–4, 1); (1,–4); (4, –1).

27. Indica en cada caso los elementos característicos de las siguientes parábolas:

a) $(x-1)^2 = 6y$; b) $(y-2)^2 = 2(x-3)$; c) $(x-1)^2 = -8y$.

Haz su representación gráfica.

Solución:

La ecuación reducida de la parábola de eje vertical, parámetro p y vértice en el punto $V\left(x_0,\ y_0\right)$ es:

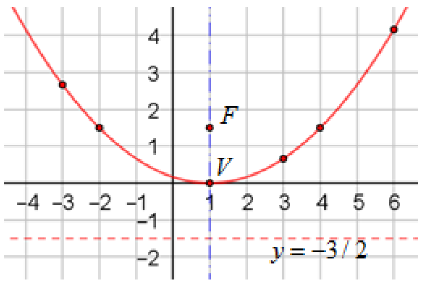
Parábola convexa (∪): $\left(x - x_0\right)^2 = 2p\left(y - y_0\right) \Rightarrow y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$.

Parábola cóncava (∩): $\left(x - x_0\right)^2 = -2p\left(y - y_0\right) \Rightarrow y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$.

→ Parábola de eje horizontal, parámetro p y vértice en el punto $V\left(x_0,\ y_0\right)$: $\left(y - y_0\right)^2 = 2p\left(x - x_0\right)$.

a) $(x-1)^2 = 6y \rightarrow$ parábola de eje vertical; convexa (∪);

$p = 3 \rightarrow p/2 = 3/2$; vértice (1, 0); foco (1, 0 + 3/2) = (1, 3/2);
directriz, $y = 0 - 3/2 \Rightarrow y = -3/2$.



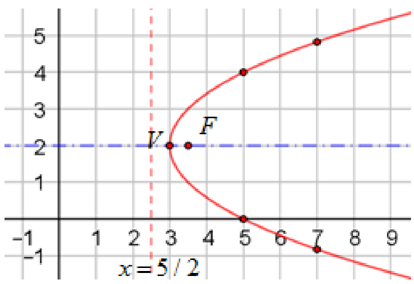
De $(x-1)^2 = 6y \Rightarrow y = \dfrac{1}{6}(x-1)^2$. Haciendo el cuadrado:

$$x^2 - 2x + 1 = 6y \Rightarrow y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}.$$

Otros puntos: (3, 4/6); (4, 3/2); (6, 25/6); (–2, 3/2); (–3, 8/3).

b) $(y-2)^2 = 2(x-3) \rightarrow$ parábola de eje horizontal.

$p = 1 \rightarrow p/2 = 1/2$; vértice (3, 2); foco (3 + 1/2, 2) = (7/2, 2);
directriz, $x = 3 - 1/2 \Rightarrow x = 5/2$.



De $(y-2)^2 = 2(x-3) \Rightarrow$

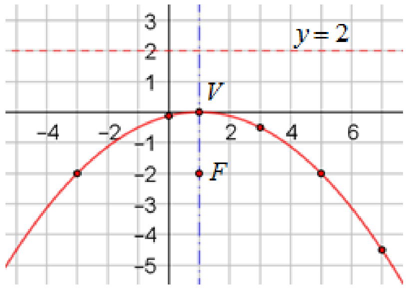
$$y - 2 = \pm\sqrt{2x-6} \Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{2x-6},\ x \geq 3.$$

Otros puntos: (5, 2 ± 2) → (5, 0), (5, 4); $\left(7,\ 2\pm\sqrt{8}\right)$.

c) $(x-1)^2=-8y$ → parábola de eje vertical; cóncava (∩);

p = 4 → p/2 = 2; vértice (1, 0); foco (1, 0 −2) = (1, –2);

directriz, y = 0 + 2 ⇒ y = 2.



De $(x-1)^2=-8y \Rightarrow y=-\frac{1}{8}(x-1)^2$. Haciendo el cuadrado:

$x^2-2x+1=-8y \Rightarrow y=-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}$.

Otros puntos: (3, –1/2); (5, –2); (7, –4,5); (0, –1/8); (–3, –2).

28. Halla la ecuación de la parábola:

a) De foco (3, 1) y directriz la recta y = −1.

b) De foco (0, 1) y directriz la recta x = −1.

c) De foco (0, 0) y vértice (0, −1).

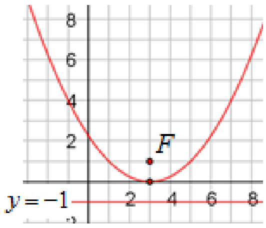
d) De vértice (0, 2) y directriz x = 4.

<u>Solución</u>:

a) De foco (3, 1) y directriz la recta y = −1.

Como la directriz es horizontal, la parábola es de eje vertical →

$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$.



La distancia del foco a la directriz es p = 2.

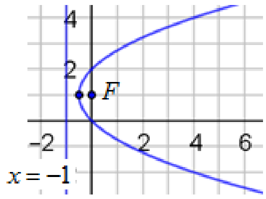
El vértice será V(3, 0).

Su ecuación es: $(x-3)^2=4y$.

b) De foco (0, 1) y directriz la recta x = −1.

Como la directriz es vertical, la parábola es de eje horizontal →

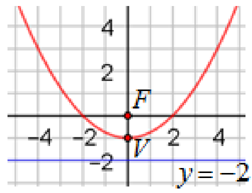
$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$.



La distancia del foco a la directriz es p = 1.

El vértice será V(–1/2, 1).

Su ecuación: $(y-1)^2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$.



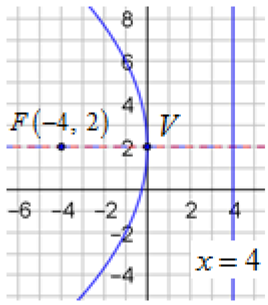
c) De foco (0, 0) y vértice (0, −1).

El eje de la parábola pasa por (0, 0) y (0, –1): es vertical; de ecuación, x = 0.

La directriz está a la misma distancia del vértice que el foco. Es la recta y = –2.

Por tanto, p = 2.

La ecuación de la parábola será: $x^2=4(y+1)$.



d) De vértice (0, 2) y directriz x = 4.

La directriz está 4 unidades a la derecha del vértice; luego el foco estará 4 unidades a la izquierda: F(–4, 2) → $(x-x_0)^2=-2p(y-y_0)$.

Se trata de una parábola (abierta a la izquierda) de eje horizontal y = 2.

El parámetro p = 8.

Su ecuación será: $(y-2)^2=-16x$.

29. Clasifica las siguientes cónicas y, en cada caso, halla sus elementos característicos:

a) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$; b) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$; c) $(x-1)^2=4(y-1)$;

d) $(y+1)^2=2x$; e) $x^2+y^2-4x-2y-4=0$; f) $x^2+4y^2-2x-3=0$;

g) $4x^2-y^2-4=0$; h) $2xy=10$; i) $4x^2+5y^2=40$;

j) $x^2-2x-y=0$; k) $x^2-2y^2=2$; l) $y^2=-2x-2$.

Solución:

a) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$. Elipse centrada en el origen, de semiejes *a* = 10 y *b* = 5.

Por tanto, $c=\sqrt{100-25}=5\sqrt{3}$. Focos: $F_1=\left(-5\sqrt{3},\ 0\right)$ y $F_2=\left(5\sqrt{3},\ 0\right)$.

Excentricidad: $e=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$. Hipérbola centrada en el origen, de semiejes *a* = *b* = 2. Por tanto, es equilátera.

Como $c=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$. Sus focos son: $F_1=\left(-2\sqrt{2},\ 0\right)$ y $F_2=\left(2\sqrt{2},\ 0\right)$. Excentricidad:

$e=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

Asíntotas: $y=x$ e $y=-x$.

c) $(x-1)^2=4(y-1)$. Parábola de eje vertical, con vértice en el punto (1, 1) y parámetro *p* = 2.
El foco está una unidad por encima del vértice: punto (2, 1).
La directriz está una unidad por debajo del vértice: recta $y=0$.

d) $(y+1)^2=2x$. Parábola de eje horizontal, con vértice en el punto (0, –1) y parámetro *p* = 1.
El foco lo tiene a la derecha del vértice (*p*/2 = +0,5), punto (0,5, –1).
La directriz está a la izquierda del vértice (–0,5): recta $x=-0,5$.

e) $x^2+y^2-4x-2y-4=0$. Circunferencia. Completando cuadrados:

$(x-2)^2-4+(y-1)^2-1-4=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=9$ → centro (2, 1); *r* = 3.

f) $x^2+4y^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1-1+4y^2-3=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+4y^2-4=0$.

Dividiendo por 4: $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{4y^2}{4}-\frac{4}{4}=0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ → Elipse centrada en el punto (1, 0), de semiejes *a* = 2 y *b* = 1. Por tanto, $c=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$.

Focos: $F_1=\left(1-\sqrt{3},\ 0\right)$ y $F_2=\left(1+\sqrt{3},\ 0\right)$. Excentricidad: $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

g) $4x^2-y^2-4=0$. Dividiendo por 4: $\frac{4x^2}{4}-\frac{y^2}{4}-\frac{4}{4}=0 \Rightarrow \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$ → Hipérbola centrada en el origen, de semiejes *a* = 1 y *b* = 2. Por tanto, $c=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$.

Focos: $F_1=\left(-\sqrt{5},\ 0\right)$ y $F_2=\left(\sqrt{5},\ 0\right)$. Excentricidad: $e=\sqrt{5}$.

h) $2xy = 10$. Hipérbola equilátera referida a sus asíntotas (los ejes cartesianos): $xy = 5$.

Ecuación general: $xy = \frac{a^2}{2}$; focos: $F_2(a,\ a)$ y $F_1(-a,\ -a)$.

$$\frac{a^2}{2} = 5 \Rightarrow a = \sqrt{10} \Rightarrow F_2\left(\sqrt{10},\ \sqrt{10}\right) \text{ y } F_1\left(-\sqrt{10},\ -\sqrt{10}\right).$$

i) $4x^2 + 5y^2 = 40$. Dividiendo por 40: $\frac{4x^2}{40} + \frac{5y^2}{40} = \frac{40}{40} \Rightarrow \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{8} = 1 \to$ Elipse centrada en el origen, de semiejes $a = \sqrt{10}$ y $b = \sqrt{8}$. Por tanto, $c = \sqrt{10-8} = \sqrt{2}$.
Focos: $F_1 = \left(-\sqrt{2},\ 0\right)$ y $F_2 = \left(\sqrt{2},\ 0\right)$. Excentricidad: $e = 1/\sqrt{5}$.

j) $x^2 - 2x - y = 0$. Parábola de eje vertical; cóncava.

$$x^2 - 2x - y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 - y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = y + 1 \Rightarrow p = 1/2.$$

Su vértice está en $V(1, -1)$; foco $F(1, -3/4)$; directriz, $y = -5/4$.

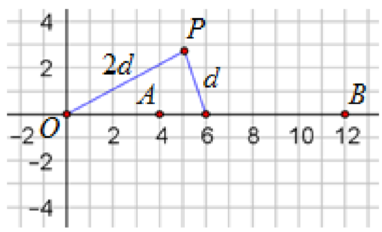
k) $x^2 - 2y^2 = 2$. Dividiendo por 2: $\frac{x^2}{2} - \frac{2y^2}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{1} = 1 \to$ Hipérbola centrada en el origen, de semiejes $a = \sqrt{2}$ y $b = 1$. Por tanto, $c = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$.
Focos: $F_1 = \left(-\sqrt{3},\ 0\right)$ y $F_2 = \left(\sqrt{3},\ 0\right)$. Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

l) $y^2 = -2x - 2 \to y^2 = -2(x+1)$. Parábola de eje horizontal, abierta a la izquierda; con vértice en $(-1, 0)$; $p = 1$. Foco: $(-3/2, 0)$; directriz: $x = -1/2$.

30. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto (0, 0) es doble que su distancia al punto (6, 0). Da algunos puntos de ese lugar. ¿Qué cónica resulta? Halla dos de sus elementos característicos.
Solución:
Si el punto $P(x,\ y)$ es de este lugar geométrico, entonces:

$$d\left(P,\ (0,\ 0)\right) = 2d\left(P,\ (6,\ 0)\right) \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-6)^2 + y^2}.$$



Los puntos $A(4, 0)$ y $B(12, 0)$ son de ese lugar geométrico.
Operando en la expresión anterior:

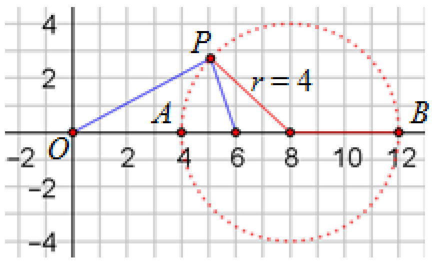
$$x^2 + y^2 = 4\left((x-6)^2 + y^2\right) \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 4\left(x^2 - 12x + 36 + y^2\right) \Rightarrow$$

$$3x^2 + 3y^2 - 48x + 144 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 16x + 48 = 0 \Rightarrow (x-8)^2 - 64 + y^2 + 48 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-8)^2 + y^2 = 16.$$



Es la circunferencia con centro en (8, 0) y radio 4.

31. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto (3, 0) sea la mitad que la distancia a la recta x = 9.

<u>Solución</u>:

Si $P(x, y)$ es uno de los puntos de ese lugar cumple:

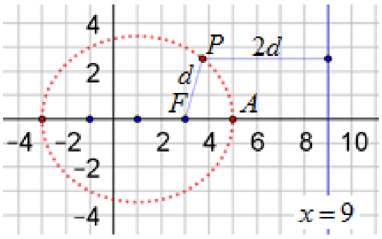
$$d(P,\ (3,\ 0)) = \frac{1}{2} d(P,\ x=9) \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-3)^2+y^2} = (9-x) \Rightarrow$$

$$4\left((x-3)^2+y^2\right) = (9-x)^2 \Rightarrow$$

$$4\left(x^2-6x+9+y^2\right) = 81-18x+x^2 \Rightarrow 3x^2-6x+4y^2-45=0 \Rightarrow$$

$$3\left(x^2-2x\right)+4y^2-45=0 \Rightarrow 3\left((x-1)^2-1\right)+4y^2-45=0 \Rightarrow$$

$$3(x-1)^2+4y^2=48 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$$



Elipse centrada en el punto (1, 0), de semiejes a = 4 y $b = 2\sqrt{3}$; con focos en (–1, 0) y (3, 0).

32. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto (3, 0) sea el doble que la distancia a la recta x = 9.

<u>Solución</u>:

Si $P(x, y)$ es uno de los puntos de ese lugar cumple:

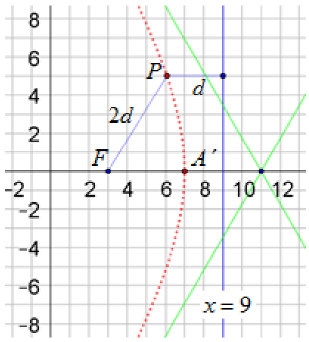
$$d(P,\ (3,\ 0)) = 2d(P,\ x=9) \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} = 2(9-x) \Rightarrow$$

$$(x-3)^2+y^2 = 4(9-x)^2 \Rightarrow x^2-6x+9+y^2 = 4\left(81-18x+x^2\right) \Rightarrow$$

$$3x^2-66x-y^2+315=0 \Rightarrow 3\left(x^2-22x\right)-y^2+315=0 \Rightarrow$$

$$3\left((x-11)^2-11^2\right)-y^2+315=0 \Rightarrow 3(x-11)^2-y^2=48 \Rightarrow$$

$$\frac{(x-11)^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1.$$



Hipérbola centrada en el punto (11, 0), de semiejes a = 4 y $b = 4\sqrt{3}$. En concreto, se trata de la rama izquierda de esa hipérbola.

33. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto (3, 0) sea igual que la distancia a la recta x = 9.

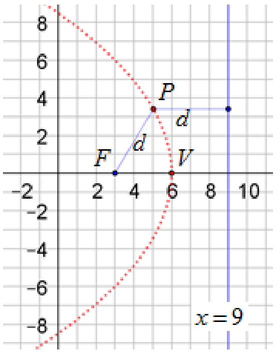
<u>Solución</u>:

Si $P(x, y)$ es uno de los puntos de ese lugar cumple:

$$d(P,\ (3,\ 0)) = d(P,\ x=9) \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} = (9-x) \Rightarrow$$

$$(x-3)^2+y^2 = (9-x)^2 \Rightarrow x^2-6x+9+y^2 = 81-18x+x^2 \Rightarrow$$

$$y^2 = -12x+72 \Rightarrow y^2 = -12(x-6).$$



Parábola de eje horizontal, abierta a la izquierda, con vértice en $V(6, 0)$ y foco en $F(3, 0)$.

34. Resuelve el sistema: $\begin{cases} y = x^2-1 \\ x+y=1 \end{cases}$. Da una interpretación geométrica de sus soluciones.

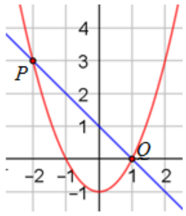
<u>Solución</u>:

La primera ecuación es la de una parábola; la segunda, la de una recta. Las soluciones serán los puntos de corte de la recta con la parábola.

Sustituyendo la y despejada de la primera ecuación en la segunda:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \to x + \left(x^2 - 1\right) = 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2;\ x = 1$$

Para $x = -2$, $y = 3$: punto $P(-2, 3)$. Para $x = 1$, $y = 0$: punto $Q(1, 0)$.



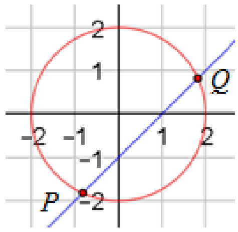
35. Resuelve el sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$. Da una interpretación geométrica de sus soluciones.

Solución:
La primera ecuación es la de una circunferencia; la segunda, la de una recta. Las soluciones serán los puntos de corte de la recta con la circunferencia.
Para resolver el sistema puede despejarse y en la segunda ecuación y sustituir en la primera.

$$\begin{cases} x^2 + (x-1)^2 = 4 \\ y = x - 1 \end{cases} \to x^2 + \left(x^2 - 2x + 1\right) = 4 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{4} \approx \begin{cases} -0{,}82 \\ 1{,}82 \end{cases}.$$

Las soluciones son los puntos $P(-0{,}82, -1{,}82)$ y $Q(1{,}82, 0{,}82)$.



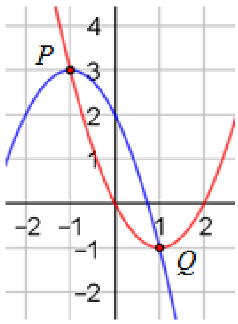
36. Resuelve el sistema $\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0 \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases}$. Da una interpretación geométrica de sus soluciones.

Solución:
Ambas expresiones se corresponden con ecuaciones de parábolas de eje vertical.

$$\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0 \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = y \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x+1)^2 + x^2 - 2x = 3 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Si $x = -1$, $y = 1 + 2 = 3$. Solución: punto $P(-1, 3)$.
Si $x = 1$, $y = 1 - 2 = -1$. Solución: punto $Q(1, -1)$.



37. Halla los puntos de corte de la elipse de ecuación $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0$ con la recta $2x + 3y + 2 = 0$.

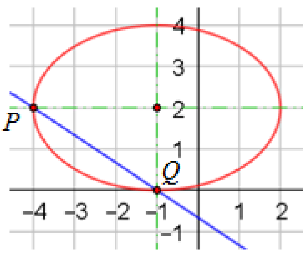
Solución:
Los puntos de corte se obtienen resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2 = 0 \\ 4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0 \end{cases} \to \text{despejando: } 2x = -3y - 2$$

$$\to \text{sustituyendo: } (2x)^2 + 9y^2 + 4(2x) - 36y + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$(-3y-2)^2 + 9y^2 + 4(-3y-2) - 36y + 4 = 0 \Rightarrow 9y^2 + 12y + 4 + 9y^2 - 12y - 8 - 36y + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$18y^2 - 36y = 0 \Rightarrow 18y(y-2) = 0 \Rightarrow y = 2;\ y = 0.$$



Si $y = 2$, $x = -4$. Solución: punto $P(-4, 2)$. Si $y = 0$, $x = -1$. Solución: punto $Q(-1, 0)$.

Nota: La ecuación $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0$ es equivalente a: $\dfrac{(x+1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$.

La elipse tiene centro en $(-1, 2)$ y semiejes $a = 3$ y $b = 2$.