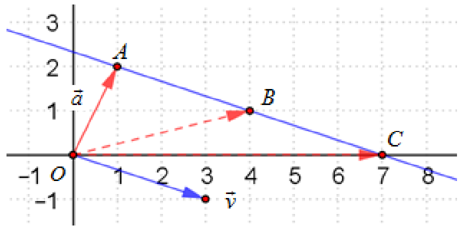
Solución de los Problemas Propuestos

1. Representa gráficamente la recta que pasa por el punto $A(1, 2)$ y tiene por vector director $\vec{v}=(3,\ -1)$. Da otros dos puntos de ella.



Solución:
Se representa el punto A y el vector $\vec{v}$. En el punto A se traza una línea recta que siga la dirección de $\vec{v}$.
Dos puntos más se obtienen sumando $\vec{a}+\vec{v}$ y $\vec{a}+2\vec{v}$:

$\vec{a}+\vec{v}$ = (1, 2) + (3, –1) = (4, 1) → B.

$\vec{a}+2\vec{v}$ = (1, 2) + 2 · (3, –1) = (7, 0) → C.

2. Halla la ecuación vectorial de la recta del ejercicio anterior. A partir de esa ecuación obtén las demás expresiones de la recta.
Solución:
La ecuación vectorial es: $\vec{x}=\vec{a}+k\vec{v} \to (x,\ y)=(1,\ 2)+k\cdot(3,\ -1)$.

Paramétricas: $\begin{cases} x=1+3k \\ y=2-k \end{cases} \Rightarrow$ Continua: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-1}$.

General: $-(x-1)=3(y-2) \Rightarrow x+3y-7=0 \ \Rightarrow$ Explícita: $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3}$.

3. Expresa la recta de ecuación $y=2x-3$ en las demás formas: explícita, continua, paramétrica y vectorial.
Solución:
De la ecuación explícita $y=2x-3$.
General (implícita o cartesiana): Se pasan todos los términos a un mismo miembro ⇒ $2x-y-3=0$.

Paramétricas: si se hace $x = k$, puede escribirse: $\begin{cases} x= \quad k \\ y=-3+2k \end{cases}$:

Con esto: uno de sus puntos es $A(0, -3)$; y su vector de dirección, $\vec{v}=(1,\ 2)$.

Luego, sus ecuaciones vectorial y continua serán: $(x,\ y)=(0,\ -3)+k\cdot(1,\ 2) \to \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+3}{2}$.

4. Dadas las rectas $r:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{1}$ y $s: y=-2x+4$, halla:
a) La pendiente y ordenada en el origen de cada una de ellas.
b) El punto donde se cortan.
Solución:
a) Se expresa r en forma explícita: $r: x-2=3y \Rightarrow y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}$.

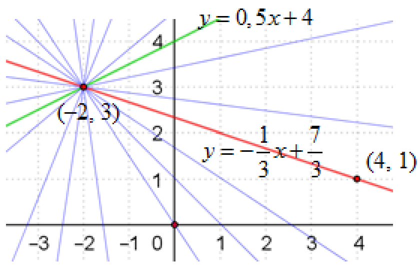
Su pendiente es $m=\dfrac{1}{3}$; la ordenada en el origen, $n=-\dfrac{2}{3}$. Para s: $m = -2$; $n = 4$.

b) Hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3} \\ y=-2x+4 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}=-2x+4 \Rightarrow x-2=-6x+12 \Rightarrow x=2;\ y=0.$$ Punto (2, 0).

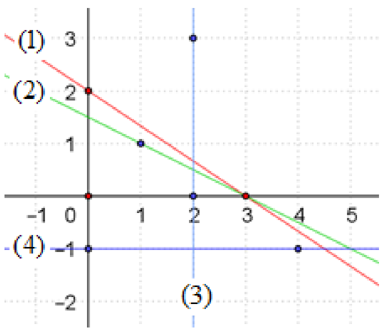
5. Halla la ecuación del haz de rectas que pasa por el punto *A*(−2, 3). De ese haz halla la ecuación explícita de la recta que:
a) tiene pendiente 0,5; b) pasa por el punto *B*(4, 1).
Represéntalas gráficamente.
Solución:
La ecuación del haz de rectas que pasa por el punto *A*(−2, 3) es: $y-3=m(x+2)$.

a) La recta de ese haz con pendiente 0,5 será:
$y-3=0,5(x+2)\Rightarrow y=0,5x+4$.



b) La recta de ese haz que pasa por el punto *B*(4, 1) cumple:
$1-3=m(4+2)\Rightarrow m=-\frac{1}{3}$.
Su ecuación será: $y-3=-\frac{1}{3}(x+2)\Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$.

6. Representa gráficamente las siguientes rectas:
a) $2x+3y-6=0$; b) $x+2y-3=0$; c) $x-2=0$; d) $2y+2=0$.
Solución:
a) Dos puntos de $2x+3y-6=0$ se obtiene haciendo $x = 0$ e $y = 0$, obteniéndose, respectivamente: (0, 2) y (3, 0) → se traza la recta que los contiene → (1).



b) Despejando *y* (forma explícita) y dando dos valores a *x*:
$x+2y-3=0\ \Rightarrow\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. Puntos: (1, 1); (3, 0) → (2).

c) $x-2=0$ → es una recta vertical que pasa por la abscisa 2: $x=2$.
Dos de sus puntos son: (2, 0) y (2, 3) → (3).

d) $2y+2=0$ → es la recta horizontal, de ecuación $y=-1$. Dos de sus puntos son: (0, −1) y (4, −1) → (4)

7. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos:
a) *A*(2, 5) y *B*(3, 4); b) *A*(−1, 3) y *B*(2, 4); c) *A*(−1, 2) y *B*(2, 2); d) *A*(3, −1) y *B*(3, 2).
Solución:
a) Utilizando la fórmula de la recta que pasa por dos puntos:
$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-5}{4-5}\ \Rightarrow\ \frac{x-2}{1}=\frac{y-5}{-1}\Rightarrow -x+2=y-5\Rightarrow y=-x+7.$$

b) Utilizando la expresión $y=mx+n$ e imponiendo que los puntos dados la cumplan.
(−1, 3) es de la recta: $3=-m+n$; (2, 4) es de la recta: $4=2m+n$.
Se obtiene el sistema: $\begin{cases}3=-m+n\\4=2m+n\end{cases}\underset{E2+2E1}{\overset{E1-E2}{\Rightarrow}}\begin{cases}-1=-3m\\10=3n\end{cases}\Rightarrow m=\frac{1}{3};n=\frac{10}{3}\ \Rightarrow\ y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$

c) Utilizando la expresión $y=mx+n\ \Rightarrow$
$$\begin{cases}(-1,\ 2)\to 2=-m+n\\(2,\ 2)\to 2=2m+n\end{cases}\underset{E2+2E1}{\overset{E1-E2}{\Rightarrow}}\begin{cases}0=-3m\\6=3n\end{cases}\Rightarrow m=0;n=2\ \Rightarrow\ y=2$$, es una recta horizontal.

d) Igualmente, para los puntos $A(3, -1)$ y $B(3, 2)$:

$$\begin{cases}(3,\ -1)\to -1=3m+n\\ (3,\ 2)\to 2=3m+n\end{cases} \Rightarrow_{E2-E1} \begin{cases}-1=3m+n\\ 3=0\end{cases} \to \text{Incompatible.}$$

Observando que x vale 3 en ambos casos, se deduce que se trata de una recta vertical: $x=3$.
Puede verse que su vector de dirección es $\vec{v}=(3,\ 2)-(3,\ -1)=(0,\ 3)\equiv(0,\ 1)$.

Observación. Utilizando la ecuación continua de la recta: $\frac{x-3}{3-3}=\frac{y+1}{2+1} \Rightarrow \boxed{\frac{x-3}{0}}=\frac{y+1}{2+1} \Rightarrow \boxed{x=3}$.

8. Determina la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $2x+3y-8=0$; $x+2y-5=0$. b) $x-2y+1=0$; $-2x+4y+3=0$.

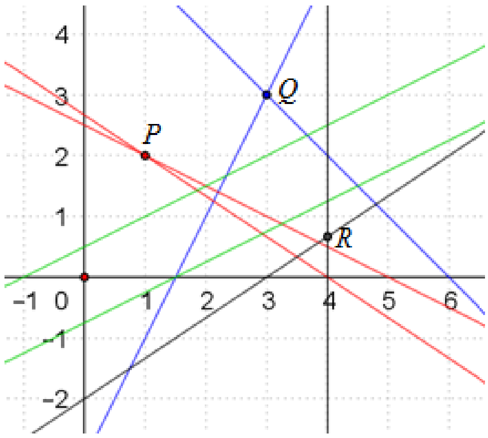
c) $y=2x-3$; $x+y-6=0$. d) $x=4$; $2x-3y=6$.

Haz la representación gráfica.

Solución:

En cada caso hay que resolver (si son compatibles) los sistemas que determinan. Si el sistema fuera incompatible, las recas serán paralelas.

a) $\begin{cases}2x+3y-8=0\\ x+2y-5=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x+3y=8\\ x+2y=5\end{cases} \Rightarrow_{\substack{2E1-3E2\\2E2-E1}} \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases} \Rightarrow P(1,\ 2)$.



b) $\begin{cases}x-2y+1=0\\ -2x+4y+3=0\end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases}x-2y=-1\\ -2x+4y=-3\end{cases} \Rightarrow_{E2+E1} \begin{cases}x-2y=-1\\ 0=-5\end{cases} \to$ incompatible.

Las rectas son paralelas.

c) $\begin{cases}y=2x-3\\ x+y-6=0\end{cases} \Rightarrow$ por sustitución:

$x+(2x-3)-6=0 \Rightarrow 3x-9=0 \Rightarrow x=3 \to y=3$.

Las rectas se cortan en el punto $Q(3, 3)$.

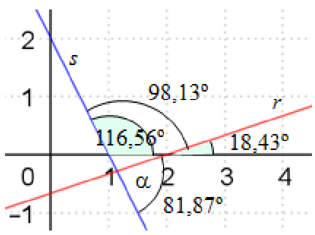
d) $\begin{cases}x=4\\ 2x-3y=6\end{cases} \Rightarrow$ por sustitución: $8-3y=6 \Rightarrow y=\frac{2}{3} \to$ Se cortan en $R\left(4,\ \frac{2}{3}\right)$.

9. Halla el ángulo que determinan cada una de las rectas $r: \frac{x-2}{3}=\frac{y}{1}$ y $s: y=-2x+2$ con el eje de abscisas. Utiliza ese resultado para hallar el ángulo que forman entre ellas.

Solución:

La pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma la recta con ele eje OX. Mediante la arcotangente puede determinarse ese ángulo.

De $r: \frac{x-2}{3}=\frac{y}{1} \Rightarrow y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$



$\to$ su pendiente es $m_r=\frac{1}{3} \to$ su ángulo $\alpha_r=\arctan\frac{1}{3}=18,43^{\circ}$.

De $s: y=-2x+2 \to$ su pendiente es $m_s=-2$

$\to$ su ángulo $\alpha_s=\arctan(-2)=116,56^{\circ}$.

Por tanto, el ángulo que determinan es $\alpha_s-\alpha_r=116,56^{\circ}-18,43^{\circ}=98,13^{\circ}$.

10. Para las rectas anteriores, halla sus vectores de dirección y, utilizando el producto escalar, calcula el ángulo determinado por las dos rectas. Compara el resultado con el obtenido en el problema 9.

Solución:

Hay que determinar sus vectores de dirección: $\vec{v}_r = (3, 1)$; $\vec{v}_s = (1, -2)$.

(Recuerda que si $\vec{v}_s = (v_1,\ v_2)$, la tangente del ángulo que forma con el eje *OX* (la pendiente) es: $m_s = -2 = \frac{-2}{1} = \frac{v_2}{v_1}$).

Aplicando el producto escalar: $\cos(r,\ s) = \cos(\vec{v}_r,\ \vec{v}_s) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r||\vec{v}_s|}$.

Luego: $\cos(r,\ s) = \frac{(3,\ 1)\cdot(1,\ -2)}{\sqrt{3^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{3-2}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0{,}1414 \to \alpha = 81{,}87^\circ$.

Se ha obtenido el ángulo complementario de 98,13º → el ángulo (*s*, *r*).

11. Halla la recta paralela a:

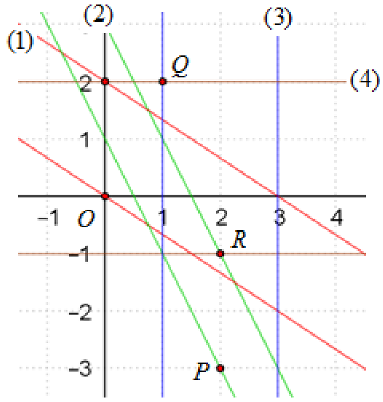
a) $2x+3y-6=0$ por el punto *O*(0, 0). b) $y=-2x+3$ por el punto *P*(2, –3).

c) $-x+3=0$ por el punto *Q*(1, 2). d) $y=2$ por el punto *R*(2, –1).

Solución:

a) La ecuación general de la paralela a $(1): 2x+3y-6=0$ es $2x+3y+c=0$.

Como debe contener al punto *O*(0, 0) ⇒ *c* = 0.
Se obtiene $2x+3y=0$.



b) Para $(2): y=-2x+3$.

La ecuación explícita de la paralela es $y=-2x+n$.

Por pasar por el punto *P*(2, –3) ⇒ $-3=-2\cdot 2+n \Rightarrow n=1$.
Se obtiene $y=-2x+1$.

c) $(3): -x+3=0$ es una recta vertical. La paralela a ella por el punto *Q*(1, 2) será $x=1$.

d) $(4): y=2$ es una recta horizontal. La paralela a ella por el punto *R*(2, –1) será $y=-1$.

12. Halla la recta perpendicular a:

a) $2x+3y-6=0$ por el punto *O*(0, 0).

b) $y=-2x+3$ por el punto *P*(2, –3).

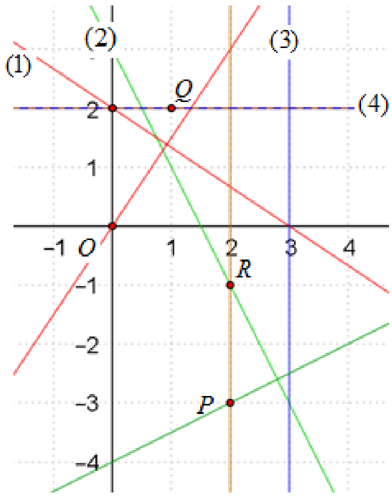
c) $-x+3=0$ por el punto *Q*(1, 2).

d) $y=2$ por el punto *R*(2, –1).

Solución:

a) La ecuación general de la perpendicular a $(1): 2x+3y-6=0$ es $-3x+2y+c=0$.

Como debe contener al punto *O*(0, 0) ⇒ *c* = 0.
Se obtiene $-3x+2y=0$.



b) Para $(2): y=-2x+3$.

La ecuación explícita de la perpendicular es $y=\frac{1}{2}x+n$.

Por pasar por el punto $P(2, -3) \Rightarrow -3=\frac{1}{2}\cdot 2+n \Rightarrow n=-4$.

Se obtiene $y=\frac{1}{2}x-4$.

c) $(3): -x+3=0$ es una recta vertical. La perpendicular a ella por el punto $Q(1, 2)$ será $y=2$.

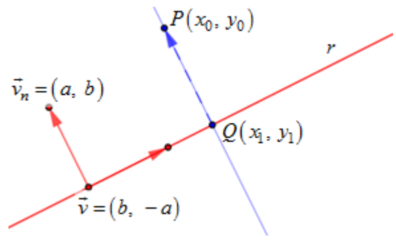
d) $(4): y=2$ es una recta horizontal. La perpendicular a ella por el punto $R(2, -1)$ será $x=2$.

13. Demuestra que la distancia del punto $P(x_0, y_0)$ a la recta $r: ax+by+c=0$ viene dada por la expresión: $d(P, r)=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$.

Solución:

Sea $Q(x_1, y_1)$ la proyección de $P(x_0, y_0)$ sobre la recta $r: ax+by+c=0$, cuyo vector de dirección es $\vec{v}=(v_1, v_2)=(b, -a)$.

Por tanto, $\vec{v}_n=(a, b)$ es perpendicular (normal) a $\vec{v}$.



Con esto:

1) Se cumple que los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\vec{v}_n$ son paralelos. Por consiguiente:

$$\overrightarrow{QP}\cdot\vec{v}_n=\left|\overrightarrow{QP}\right|\cdot\left|\vec{v}_n\right|\cdot\cos 0^\circ \Rightarrow \overrightarrow{QP}\cdot\vec{v}_n=\left|\overrightarrow{QP}\right|\left|\vec{v}_n\right| \Rightarrow d(P, r)=\left|\overrightarrow{QP}\right|=\frac{\overrightarrow{QP}\cdot\vec{v}_n}{\left|\vec{v}_n\right|} \quad (*)$$

2) Como $\overrightarrow{QP}$ = $(x_0, y_0) - (x_1, y_1)$ = (x_0-x_1, y_0-y_1), el producto escalar

$$\overrightarrow{QP}\cdot\vec{v}_n=a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)=ax_0+by_0-(ax_1+by_1) \Rightarrow \overrightarrow{QP}\cdot\vec{v}_n=ax_0+by_0+c,$$

pues como $Q(x_1, y_1)\in r$, cumple que $ax_1+by_1+c=0 \Rightarrow -(ax_1+by_1)=c$.

Por otra parte, $\left|\vec{v}_n\right|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Luego, sustituyendo en (*), queda: $d(P, r)=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$.

El valor absoluto debe ponerse para evitar resultados negativos.

14. Halla la distancia del punto $P(2, -3)$ a cada una de las siguientes rectas:

a) $x+2y-3=0$; b) $y=\frac{2}{3}x-4$; c) $y=3$; d) $x=2$.

Solución:

Aplicando la fórmula de la distancia a una recta, $d(P, r)=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$, se tendrá:

a) $d(P,r)=\frac{|1\cdot 2+2\cdot(-3)-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|-7|}{\sqrt{5}}=\frac{7}{\sqrt{5}}$.

b) Hay que expresar la ecuación en su forma cartesiana: $y=\frac{2}{3}x-4 \Rightarrow 2x-3y-12=0$.

Con esto:

$$d(P,r)=\frac{|2\cdot 2-3\cdot(-3)-12|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$$

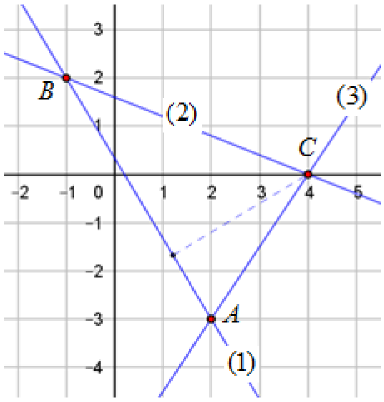
c) $y=3 \to y-3=0 \Rightarrow d(P,r)=\frac{|1\cdot(-3)-3|}{\sqrt{1^2}}=6$.

d) $x=2 \to x-2=0 \Rightarrow d(P,r)=\frac{|1\cdot 2-2|}{\sqrt{1^2}}=0 \Rightarrow$ el punto es de la recta.

15. Halla el área del triángulo determinado por las rectas:
$(1): 5x+3y-1=0$; $(2): 2x+5y-8=0$; $(3): 3x-2y-12=0$.

Solución:

Si se toma como base el lado *AB*, para hallar su longitud hay que calcular los puntos de corte de las rectas que los determinan.



$$A:\begin{cases}5x+3y-1=0\\3x-2y-12=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}2E1+3E2\\5E2-3E1\end{matrix}\begin{cases}19x-38=0\\-19y-57=0\end{cases} \Rightarrow A(2,\ -3).$$

$$B:\begin{cases}5x+3y-1=0\\2x+5y-8=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}5E1-3E2\\5E2-2E1\end{matrix}\begin{cases}19x+19=0\\19y-38=0\end{cases} \Rightarrow B(-1,\ 2).$$

La base mide: $d(A,\ B)=\sqrt{(-1-2)^2+(2+3)^2}=\sqrt{34}$.

La altura es la distancia de *C* a la recta *AB*.

El punto *C* es: $C:\begin{cases}2x+5y-8=0\\3x-2y-12=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}2E1+5E2\\2E2-3E1\end{matrix}\begin{cases}19x-76=0\\-19y=0\end{cases} \Rightarrow C(4,\ 0)$.

Por tanto: $d(C,\ r: 5x+3y-1=0)=\frac{|5\cdot 4+3\cdot 0-1|}{\sqrt{5^2+3^2}}=\frac{19}{\sqrt{34}}$.

Luego, el área del triángulo es: $S=\frac{\sqrt{34}\cdot\frac{19}{\sqrt{34}}}{2}=\frac{19}{2}$ u^2.

16. Halla el punto *Q*, proyección de *P*(1, –3) sobre la recta $r: 2x+5y+3=0$. Halla la distancia entre ambos puntos y comprueba, $d(P,\ r)=d(P,\ Q)$.

Solución:

Aplicando la fórmula $d(P,r)=\frac{|2\cdot 1+5\cdot(-3)+3|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{29}}=\frac{10}{\sqrt{29}}$.

→ Si se calcula el punto *Q* y después la $d(P,\ Q)$ se tiene:

1) La perpendicular a *r* desde *P* es: $r': -5x+2y+c=0$.

Por pasar por *P*(1, –3): –5 – 6 + *c* = 0 ⇒ *c* = 11.

Corte de r con $r´$: $\begin{cases} r: 2x+5y+3=0 \\ r´: -5x+2y+11=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+5y=-3 \\ -5x+2y=-11 \end{cases} \underset{2E2+5E1}{\Rightarrow} \begin{cases} 2x+5y=-3 \\ 29y=-37 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow y=-\dfrac{37}{29} \to x=\dfrac{49}{29} \Rightarrow Q\left(\dfrac{49}{29}, -\dfrac{37}{29}\right)$.

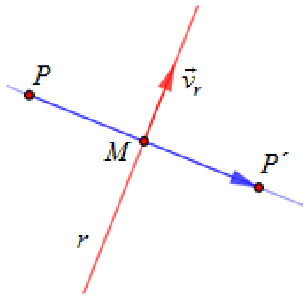
2) $d(P,\ Q)=\sqrt{\left(\dfrac{49}{29}-1\right)^2+\left(-\dfrac{37}{29}+3\right)^2} = \sqrt{\dfrac{2900}{29^2}}=\sqrt{\dfrac{100}{29}}=\dfrac{10}{\sqrt{29}}$.

Efectivamente $d(P,\ r)=d(P,\ Q)$

17. Halla el punto $P´$, simétrico de $P(1, -3)$ respecto de la recta $r: 2x+5y+3=0$.

Solución:

Dado un punto P, su simétrico respecto de una recta r es otro punto $P´$ tal que el punto medio entre P y $P´$ es el punto $M \in r$, y, además, el vector $\overrightarrow{PP´}$ es perpendicular al de dirección de la recta.



Para hallar el punto simétrico de $P(1, -3)$, respecto de la recta $r: 2x+5y+3=0$, se puede hacer lo siguiente:

1) Se calcula el punto M: es el de corte de la recta r, con la perpendicular a ella que pasa por P.

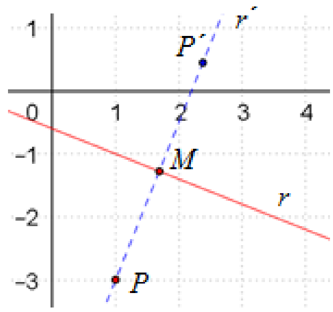
Esa recta es $r´: 5x-2y+c=0$ → como P es de esa recta: $r´: 5+6+c=0 \Rightarrow c=-11$.

Luego $r´: 5x-2y-11=0$.

El punto M es la solución de: $\begin{cases} 2x+5y+3=0 \\ 5x-2y-11=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2E1+5E2 \\ 2E2-5E1 \end{matrix} \begin{cases} 29x-49=0 \\ -29y-37=0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{49}{29}, -\dfrac{37}{29}\right)$.

2) Suponiendo que el simétrico es $P´(x_0, y_0)$, el punto medio de P y $P´$ será:

$M\left(\dfrac{1+x_0}{2}, \dfrac{-3+y_0}{2}\right)$.



Ambos M deben ser iguales: $\left(\dfrac{49}{29}, -\dfrac{37}{29}\right)=\left(\dfrac{1+x_0}{2}, \dfrac{-3+y_0}{2}\right) \Rightarrow$

$\dfrac{49}{29}=\dfrac{1+x_0}{2} \Rightarrow x_0=\dfrac{69}{29}$; $-\dfrac{37}{29}=\dfrac{-3+y_0}{2} \Rightarrow y_0=\dfrac{13}{29}$.

Por tanto, el punto simétrico de P respecto de π es $P´\left(\dfrac{69}{29}, \dfrac{13}{29}\right)$.

18. Halla la recta simétrica de $r: y=\dfrac{1}{2}x$, respecto del eje $e \equiv x-y+2=0$.

Solución:

La recta simétrica puede determinarse de dos formas.

1) Hallando dos puntos simétricos de r respecto de e: la recta simétrica es la que pasa por ellos.

2) Hallando el punto de corte de r con el eje e y un punto simétrico de r respecto de e. La recta simétrica es la que pasa por el punto de corte y por el simétrico. (Esto puede hacerse cuando la recta dada no es paralela al eje de simetría).

Usando la primera forma:

Se eligen dos puntos de r, por ejemplo, $O(0, 0)$ y $P(2, 1)$.

→ Simétrico de $O(0, 0)$ respecto de $e \equiv x-y+2=0$.

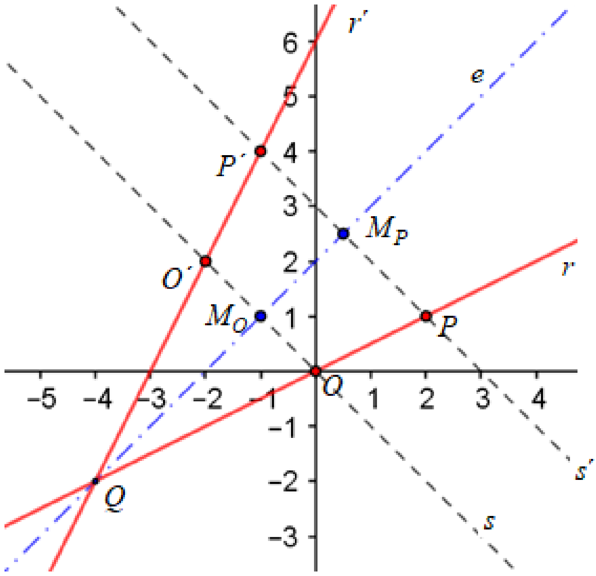
La perpendicular a e por O es: $s: x+y=0$.

El punto M_O, de corte de la recta s con el eje de simetría es: $M_O:\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow M_O(-1,\ 1)$.

Si el simétrico de O es $O´(x_0, y_0)$, su punto medio será $M\left(\dfrac{x_0}{2},\ \dfrac{y_0}{2}\right)$.

Como M y M_O deben ser iguales: $(-1,\ 1)=\left(\dfrac{x_0}{2},\ \dfrac{y_0}{2}\right) \Rightarrow x_0=-2;\ y_0=2$.

Por tanto, $O´(-2, 2)$.



→ Simétrico de $P(2, 1)$ respecto de $e\equiv x-y+2=0$.
La perpendicular a e por P es: $s´: x+y-3=0$.
El punto M_P, de corte de la recta $s´$ con e, es:

$$M_P:\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow M_P\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right).$$

Si el simétrico de P es $P´(x´_0, y´_0)$, su punto medio será $M´\left(\dfrac{x´_0+2}{2},\ \dfrac{y´_0+1}{2}\right)$.

Como $M´$ y M_P deben ser iguales:

$$\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)=\left(\frac{x´_0+2}{2},\ \frac{y´_0+1}{2}\right) \Rightarrow x´_0=-1;\ y´_0=4.$$

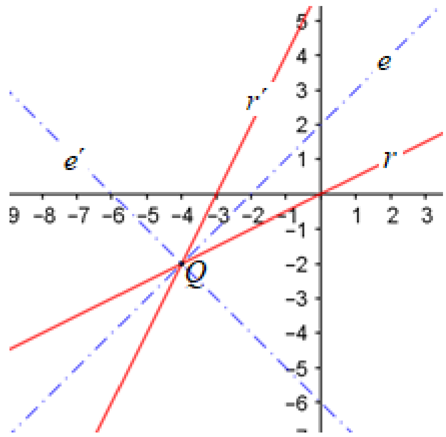
Por tanto, $P´(-1, 4)$.

→ La recta simétrica es la que pasa por $O´$ y $P´$. Su ecuación es: $r´: \dfrac{x+2}{-1+2}=\dfrac{y-2}{4-2} \Rightarrow r´: y=2x+6$

Observación: Puede comprobarse que el punto Q, de corte de e con r, también pertenece a $r´$.

19. Halla la bisectriz de las rectas $r: y=\dfrac{1}{2}x$ y $r´: y=2x+6$. Comprueba que esas rectas son simétricas respecto de esa bisectriz.

Solución:



La bisectriz del ángulo determinado por las rectas $r: ax+by+c=0$ y $r´: a´x+b´y+c´=0$, viene dada por la expresión: $\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{a´x+b´y+c´}{\pm\sqrt{(a´)^2+(b´)^2}}$.

En este caso, $r: y=\dfrac{1}{2}x \Leftrightarrow r: x-2y=0$ y $r´: y=2x+6 \Leftrightarrow r´: 2x-y+6=0$, se tiene:

$$\frac{x-2y}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{2x-y+6}{\pm\sqrt{2^2+(-1)^2}} \Rightarrow x-2y=\pm(2x-y+6) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x-2y=-(2x-y+6) \\ x-2y=+(2x-y+6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-2x+y-6 \\ x-2y=2x-y+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-3y+6=0 \\ x+y+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2=0 \\ x+y+6=0 \end{cases}.$$

Efectivamente, $e\equiv x-y+2=0$, coincide con la bisectriz interior de ambas rectas. (Este resultado se ha visto en el problema anterior). La otra bisectriz, $e´\equiv x+y+6=0$, es otro eje de simetría de las mismas rectas.

20. Utilizando la perpendicular por el punto medio, halla la mediatriz del segmento de extremos $A(2, -3)$ y $B(-1, 2)$.

Solución:

Recta que contiene al segmento AB: $r_{AB}: \dfrac{x-2}{-1-2} = \dfrac{y+3}{2+3} \to 5x+3y-1=0$.

Punto medio: $M\left(\dfrac{2-1}{2}, \dfrac{-3+2}{2}\right) \to M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$.

Perpendicular a r_{AB} por M: $3x-5y+c=0 \to$ por pasar por $M \Rightarrow 3\cdot\dfrac{1}{2}-5\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+c=0 \Rightarrow c=-4$;

luego, la mediatriz es $3x-5y-4=0$.

21. Halla el ortocentro, el circuncentro y el baricentro del triángulo de vértices $A(0, 5)$, $B(6, 1)$ y $C(2, -1)$

Solución:

Ecuaciones de las rectas en las que se apoyan los lados.

$\to$ Recta que contiene al lado AB:

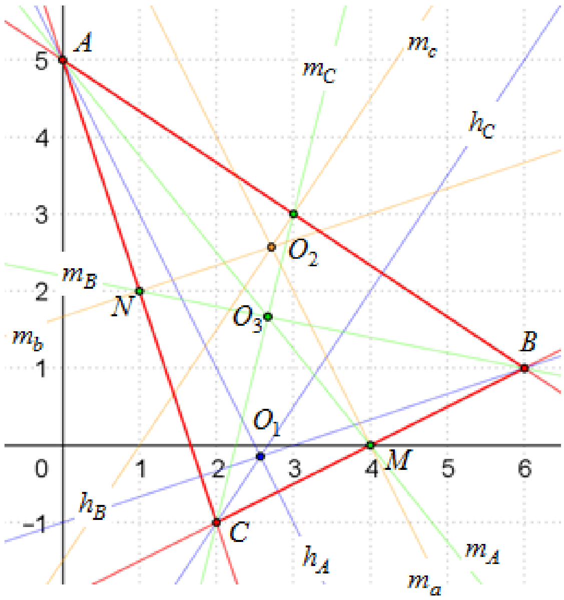
$r_{AB}: \dfrac{x}{6} = \dfrac{y-5}{1-5} \to 2x+3y-15=0$.

$\to$ Recta que contiene al lado AC:

$r_{AC}: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-5}{-1-5} \to 3x+y-5=0$.

$\to$ Recta que contiene al lado BC:

$r_{BC}: \dfrac{x-6}{2-6} = \dfrac{y-1}{-1-1} \to x-2y-4=0$.



Ortocentro: corte de dos de sus alturas.

Altura h_C: perpendicular a r_{AB} desde C.

$h_C: 3x-2y+c_1=0 \to$ pasa por $C(2, -1) \to$

$3\cdot2-2\cdot(-1)+c_1=0 \Rightarrow c_1=-8 \Rightarrow$

$h_C: 3x-2y-8=0$.

Altura h_B: perpendicular a r_{AC} que pasa por el punto B.

$h_B: x-3y+c_2=0 \to$ pasa por $B(6, 1) \to c_2=-3$; luego $h_B: x-3y-3=0$.

El ortocentro es el punto de corte de las alturas; y viene dado por la solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x-2y-8=0 \\ x-3y-3=0 \end{cases} \underset{3E2-E1}{\overset{3E1-2E2}{\Rightarrow}} \begin{cases} 7x-18=0 \\ -7y-1=0 \end{cases} \Rightarrow O_1\left(\frac{18}{7}, -\frac{1}{7}\right).$$

Circuncentro: corte de las mediatrices.

Obtendré las mediatrices aplicando su definición como lugar geométrico.

Mediatriz de AC, m_b: $d(P, A) = d(P, C) \Rightarrow \sqrt{x^2+(y-5)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$

Haciendo el cuadrado de las raíces y desarrollando los cuadrados:

$x^2+y^2-10y+25 = x^2-4x+4+y^2+2y+1 \Rightarrow x-3y+5=0$.

Mediatriz de AB, m_c: $d(P, A) = d(P, B) \Rightarrow \sqrt{x^2+(y-5)^2} = \sqrt{(x-6)^2+(y-1)^2}$

Haciendo el cuadrado de las raíces y desarrollando los cuadrados:

$x^2+y^2-10y+25 = x^2-12x+36+y^2-2y+1 \Rightarrow 3x-2y-3=0$.

El circuncentro es el punto de corte de las mediatrices; y viene dado por la solución del sistema
$$\begin{cases} x-3y+5=0 \\ 3x-2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2E1-3E2 \\ E2-3E1 \end{matrix} \begin{cases} -7x+19=0 \\ 7y-18=0 \end{cases} \Rightarrow O_2\left(\frac{19}{7},\ \frac{18}{7}\right).$$

<u>Baricentro</u>: corte de las medianas.
Obtendré las medianas a partir de la ecuación $y=mx+n$, imponiendo que pase por los dos puntos que definen cada mediana.
Mediana AM, m_A:

$A(0,\ 5)$ es de la recta: $5=n$; $M(4,\ 0)$ es de la recta: $0=4m+n \to m=-\frac{5}{4} \Rightarrow y=-\frac{5}{4}x+5$

Mediana BN, m_B:

$B(6,\ 1)$ es de la recta: $1=6m+n$; $N(1,\ 2)$ es de la recta: $2=m+n \Rightarrow$
$$\begin{cases} 6m+n=1 \\ m+n=2 \end{cases} \to m=-\frac{1}{5};\ n=\frac{11}{5} \Rightarrow y=-\frac{1}{5}x+\frac{11}{5}.$$

Igualando ambas expresiones:
$$\left(y=-\frac{5}{4}x+5\right)\equiv\left(y=-\frac{1}{5}x+\frac{11}{5}\right)\Rightarrow -\frac{5}{4}x+5=-\frac{1}{5}x+\frac{11}{5} \Rightarrow x=\frac{8}{3};\ y=\frac{5}{3} \Rightarrow O_3\left(\frac{8}{3},\ \frac{5}{3}\right).$$

22. Halla la ecuación de las bisectrices del ángulo que determinan los siguientes pares de rectas:
a) $r: 2x+5y-2=0$ y $s: y=-4x+8$; b) $r: \sqrt{3}x-y=0$ y $s: x-\sqrt{3}y=0$.
<u>Solución</u>:
a) Un punto genérico, $P(x,\ y)$, es de la bisectriz si cumple que: $d(P,\ r)=d(P,\ s)$.
$$d(P,\ r)=\frac{2x+5y-2}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{4x+y-8}{\pm\sqrt{4^2+1^2}}=d(P,\ s) \Rightarrow \frac{2x+5y-2}{\sqrt{29}}=\frac{4x+y-8}{\pm\sqrt{17}} \quad [1]$$
La recta $s: y=-4x+8$ hay que expresarla en su forma implícita: $s: 4x+y-8=0$.
Operando en [1] se obtienen:
$\to$ Con $+\sqrt{17}$: $\sqrt{17}(2x+5y-2)=\sqrt{29}(4x+y-8) \Rightarrow \ldots$
$\to$ Con $-\sqrt{17}$: $-\sqrt{17}(2x+5y-2)=\sqrt{29}(4x+y-8) \Rightarrow \ldots$
Ambas expresiones son demasiado incómodas para seguir con ellas…

b) Si $P(x,\ y)$ es de la bisectriz:
$$d(P,\ r)=\frac{\sqrt{3}x-y}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{x-\sqrt{3}y}{\pm\sqrt{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2}}=d(P,\ s) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}x-y}{2}=\frac{x-\sqrt{3}y}{\pm 2} \quad [2]$$
Operando en [2] se obtienen:
$\to$ Con +2: $\sqrt{3}x-y=x-\sqrt{3}y \Rightarrow$
$\left(\sqrt{3}-1\right)x+\left(\sqrt{3}-1\right)y=0 \Rightarrow x+y=0 \to$ bisectriz b'.
$\to$ Con −2: $-\sqrt{3}x+y=x-\sqrt{3}y+2 \Rightarrow$
$-\left(\sqrt{3}+1\right)x+\left(\sqrt{3}+1\right)y=0 \Rightarrow -x+y=0 \to$ bisectriz b.