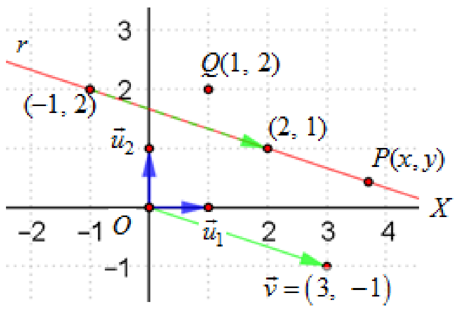
TEMA 10. RECTAS EN EL PLANO

1. ECUACIONES DE UNA RECTA EN EL PLANO

Sistema de referencia cartesiano

La geometría analítica estudia las relaciones entre puntos, rectas, ángulos, distancias… de un modo algebraico, mediante fórmulas y ecuaciones, tal y como se viene haciendo en los últimos temas.



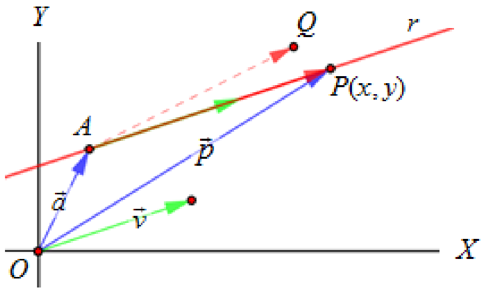
Para ello es imprescindible utilizar un sistema de referencia, determinado por un punto fijo, $O(0,\ 0)$, y por dos vectores perpendiculares y unitarios, $\vec{u}_1=(1,\ 0)$ y $\vec{u}_2=(0,\ 1)$. Estos vectores se apoyan en los ejes cartesianos, que son perpendiculares y se cortan en el punto *O*, origen de coordenadas.

- El eje horizontal se llama eje de abscisas, eje *OX*, eje *x*. A la derecha del origen las abscisas son positivas; a la izquierda, negativas.
- El eje vertical se llama eje de ordenadas, eje *OY*, eje *y*. Por encima del origen las ordenadas son positivas; por debajo, negativas.
- Cualquier punto del plano se designa por dos números reales, que son sus coordenadas: *P*(*x*, *y*).

El plano cartesiano puede designarse por $\mathbf{R}^2$.

Recta determinada por un punto y un vector

Una recta *r* viene determinada por un punto *A* y un vector de dirección $\vec{v}$.



Si un punto *P* pertenece a esa recta, entonces el vector $\overrightarrow{AP}$ tendrá la misma dirección que $\vec{v}$: serán paralelos; lo que significa que existe un número real $k \neq 0$, tal que $\overrightarrow{AP}=k\cdot\vec{v}$.

El punto *Q* no pertenece a la recta *r*, pues $\overrightarrow{AQ}\neq k\cdot\vec{v}$.

Ecuación vectorial de la recta

Sea *r* la recta que pasa por el punto *A* y sigue la dirección del vector $\vec{v}$.

Cualquier otro punto *P* de la recta *r* cumple que:

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+k\cdot\vec{v} \Leftrightarrow \vec{p}=\vec{a}+k\cdot\vec{v}\ .$$

El vector $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ se llama de posición; $\vec{v}=(v_1,\ v_2)$ es el vector de dirección; *k* es un número.

Si las coordenadas de un punto genérico de la recta son $P(x,\ y)$, entonces, la ecuación anterior puede escribirse: $r\equiv(x,\ y)=(a_1,\ a_2)+k(v_1,\ v_2)$.

Ejemplo:

La ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto *A*(−1, 2) y sigue la dirección del vector $\vec{v}=(3,\ -1)$ es: $r\equiv(x,\ y)=(-1,\ 2)+k(3,\ -1)$ → es la representada en figura inicial.

El punto (2, 1) pertenece a la recta: se obtiene para *k* = 1 → $(x,\ y)=(-1,\ 2)+1\cdot(3,\ -1)=(2,\ 1)$.

El punto *Q*(1, 2) no es de *r* → la igualdad $(1,\ 2)=(-1,\ 2)+k(3,\ -1)\Rightarrow\begin{cases}1=-1+3k\to k=2/3\\ 2=2-k\to k=0\end{cases}$, que es absurdo.

Ecuaciones paramétricas de la recta

Si $r \equiv (x,\ y) = (a_1,\ a_2) + k(v_1,\ v_2) \Rightarrow r \equiv (x,\ y) = (a_1 + kv_1,\ a_2 + kv_2)$.

Igualando las respectivas componentes resulta: $r \equiv \begin{cases} x = a_1 + k \cdot v_1 \\ y = a_2 + k \cdot v_2 \end{cases}$.

El parámetro es k, que designa un número real cualquiera. Dando valores a k se obtienen los distintos puntos de la recta.

Ecuación continua de la recta

Despejando k en cada una de las ecuaciones paramétricas e igualando las dos expresiones obtenidas, resulta:

$$r \equiv \begin{cases} x = a_1 + k \cdot v_1 \\ y = a_2 + k \cdot v_2 \end{cases} \to k = \frac{x - a_1}{v_1};\ k = \frac{y - a_2}{v_2} \Rightarrow r \equiv \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}.$$

Ejemplo:

Las ecuaciones paramétricas de la recta $r \equiv (x,\ y) = (-1,\ 2) + k(3,\ -1)$ son: $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 2 - k \end{cases}$.

Para $k = 0$ se obtiene $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \to A(-1,\ 2)$; para $k = -1$ se obtiene $\begin{cases} x = -1 - 3 \\ y = 2 + 1 \end{cases} \to B(-4,\ 3)$; …

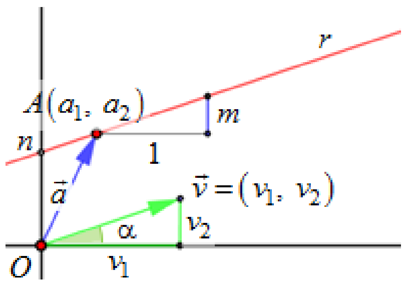
Despejando k en ambas ecuaciones se obtiene la ecuación continua:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 2 - k \end{cases} \to k = \frac{x - (-1)}{3} = \frac{y - 2}{-1} \Rightarrow r \equiv \frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{-1}.$$

Ecuación punto-pendiente de la recta

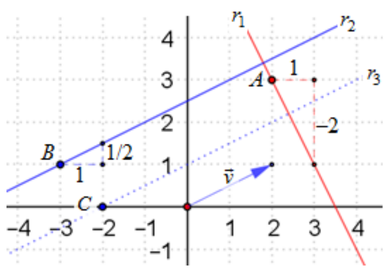
A partir de la ecuación continua $r \equiv \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} \Rightarrow y - a_2 = \frac{v_2}{v_1}(x - a_1)$.

Si se hace $m = \frac{v_2}{v_1}$, la ecuación queda $y - a_2 = m(x - a_1)$.



El cociente $m = \frac{v_2}{v_1}$ es la pendiente de la recta: es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje OX: $m = \tan\alpha$. La pendiente m indica lo que aumenta (o disminuye) la variable y por cada aumento unitario de la variable x.

Ejemplos:



a) La ecuación de la recta (r_1) que pasa por el punto $A(2, 3)$ y tiene pendiente -2 es $y - 3 = -2(x - 2)$.

b) La recta (r_2) que pasa por el punto $B(-3, 1)$ y tiene pendiente 1/2 es $y - 1 = \frac{1}{2}(x - (-3)) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x + 3)$.

c) La recta (r_3) que pasa por el punto $C(-2, 0)$ y tiene la dirección de $\vec{v} = (2,\ 1)$ es:

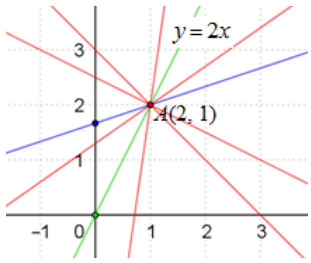
$$\begin{cases} x = -2 + 2k \\ y = \quad\ k \end{cases} \text{(en paramétricas)} \to \frac{x + 2}{2} = \frac{y}{1} \text{ (continua)} \to y = \frac{1}{2}(x + 2) \text{ (punto-pendiente).}$$

→ Observa que las rectas r_2 y r_3 tienen la misma dirección: son paralelas.

Haz de rectas que pasa por un punto

Es el conjunto de todas las rectas que pasan por un punto.

La ecuación del haz de rectas determinado por el punto $A(a_1,\ a_2)$ es $y-a_2=m(x-a_1)$, siendo m un parámetro. Para cada valor de m se obtiene una recta que pasa por A.



→ La ecuación del haz de determinado $A(1, 2)$ es $y-2=m(x-1)$.

La dibujada en azul tiene pendiente $m=\frac{1}{3}$ → $y-2=\frac{1}{3}(x-1)$.

Para m = 2 se obtiene $y-2=2(x-1)\Rightarrow y=2x$.

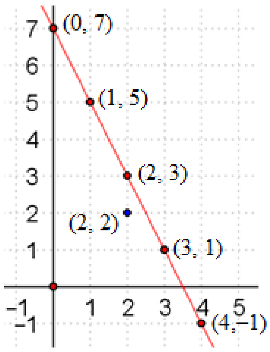
Ecuación explícita de la recta

Despejando y en la ecuación punto-pendiente se obtiene la ecuación explícita $y=mx+n$.

$$y-a_2=m(x-a_1)\ \Rightarrow\ y=mx+\underline{(-ma_1+a_2)}\ \to\ y=mx+\underline{n}.$$

Al número n se le llama ordenada en el origen: indica la ordenada del punto de corte de la recta con el eje OY. Si n = 0 la recta pasa por el origen de coordenadas. Es el caso de $y=2x$.

Esta ecuación permite representar con facilidad una recta. Bastaría con dar dos valores distintos a x, [x_1 y x_2], hallar los correspondientes valores de y, [y_1 e y_2], marcar los puntos $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ y trazar la línea recta que los contiene.



Ejemplo:

La recta que pasa por el punto $A(2, 3)$ y tiene pendiente −2 es

$y-3=-2(x-2)$ → despejando: $y=-2x+7$.

Para dibujarla se hallan dos de sus puntos:

para x = 1, $y=5$ → $(1,\ 5)$; para x = 3, $y=1$ → $(3,\ 1)$.

Otros puntos de la recta son: (0, 7); (2, 3); (4, −1)…

El punto $(\underline{2}, \underline{2})$ no es de la recta, pues no cumple la ecuación: $\underline{2}\neq-2\cdot\underline{2}+7$.

Ecuación general de una recta

Se deduce de la continua, pasando todos los términos a un solo miembro e igualando a 0.

De $r\equiv\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}\Rightarrow v_2(x-a_1)=v_1(y-a_2)\Rightarrow v_2x-v_1y-a_1v_2+v_1a_2=0$.

Llamando: $a=v_2$, $b=-v_1$ y $c=-a_1v_2+v_1a_2$, se obtiene la expresión $ax+by+c=0$.

Esta expresión también se llama ecuación implícita o cartesiana.

Las letras a, b y c designan números que pueden ser 0; x e y son variables, que indican las coordenadas de los puntos de esa recta, siendo x la abscisa e y la ordenada.

- Si a = 0, queda $by+c=0\ \Rightarrow\ y=-\frac{c}{b}$ → es una recta horizontal, paralela al eje OX.
- Si b = 0, queda $ax+c=0\ \Rightarrow\ x=-\frac{c}{a}$ → es una recta vertical, paralela al eje OY.
- Si c = 0, queda $ax+by=0\ \Rightarrow\ y=-\frac{a}{b}x$ → es una recta que pasa por el origen O.

Ejemplo:

La recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-3}\Leftrightarrow-3(x-1)=2(y-4)\Leftrightarrow 3x+2y-11=0\Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$.

Resumen y observaciones sobre las distintas formas de la ecuación de una recta

Recta que pasa por el punto $A(a_1,\ a_2)$ y sigue la dirección del vector $\vec{v}=(v_1,\ v_2)$.

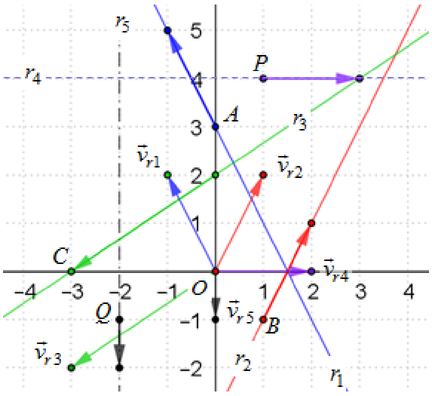
- Ecuación vectorial: $r\equiv(x,\ y)=\boxed{(a_1,\ a_2)}+k(v_1,\ v_2)\Rightarrow r\equiv(x,\ y)=(a_1+kv_1,\ a_2+kv_2)$.
- Ecuaciones paramétricas: $r\equiv\begin{cases}x=\boxed{a_1}+k\cdot v_1\\ y=\boxed{a_2}+k\cdot v_2\end{cases}$.
- Ecuación continua: $r\equiv\dfrac{x-\boxed{a_1}}{v_1}=\dfrac{y-\boxed{a_2}}{v_2}$.
- Ecuación punto-pendiente: $y-a_2=m(x-a_1)$.
- Ecuación explícita: $y=mx+n\to m=\dfrac{v_2}{v_1}$.
- Ecuación general (implícita o cartesiana): $ax+by+c=0\to\vec{v}=(v_1,\ v_2)=(b,\ -a)$.

Observaciones:

1. En las ecuaciones vectorial, paramétrica y continua de una recta aparecen con nitidez tanto la posición, el punto $A\boxed{(a_1,\ a_2)}$, como su dirección, el vector $\vec{v}=(v_1,\ v_2)$.

Por tanto, ambas ecuaciones pueden escribirse directamente. Así, por ejemplo:

- La ecuación vectorial de la recta que pasa por $A(0, 3)$ y tiene por vector director $\vec{v}_{r1}=(-1,\ 2)$ es $r_1\equiv(x,\ y)=(0,\ 3)+k(-1,\ 2)$.
- Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $B(1, -1)$ y tiene por vector director $\vec{v}_{r2}=(1,\ 2)$ son: $r_2\equiv\begin{cases}x=1+k\\ y=-1+2k\end{cases}$.
- La ecuación continua de la recta que pasa por $C(-3, 0)$ y sigue la dirección de $\vec{v}_{r3}=(-3,\ -2)$ es: $r_3\equiv\dfrac{x+3}{-3}=\dfrac{y}{-2}$.



2. Si alguna de las coordenadas del vector de dirección es 0, en la ecuación continua aparece una fracción con denominador 0, que resulta chocante. Así, por ejemplo:

- La ecuación de la recta que pasa por $P(1, 4)$ y sigue la dirección de $\vec{v}_{r4}=(2,\ 0)$ sería:

$r_4\equiv\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{0}$. Es mejor escribirla en forma paramétrica: $r_4\equiv\begin{cases}x=1+2k\\ y=4\end{cases}\Leftrightarrow y=4$.

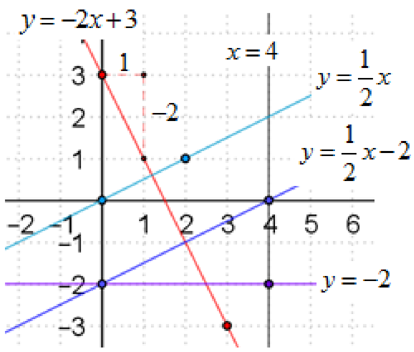
- La ecuación de la que pasa por $Q(-2, -1)$ y sigue la dirección de $\vec{v}_{r5}=(0,\ -1)$ sería:

$r_5\equiv\dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y+1}{-1}$. Es mejor escribirla en forma paramétrica: $r_5\equiv\begin{cases}x=-2\\ y=-1-k\end{cases}\Leftrightarrow x=-2$.

La recta $y = 4$ es horizontal; la de ecuación $x = -2$ es vertical.

3. La ecuación explícita da una información muy clara sobre la recta: indica de manera expresa (explícita) su pendiente, m, y el punto de corte con el eje OY, n. Esto permite representarla sin hacer cálculos.

- La recta $y=-2x+3$ corta al eje OY en el punto (0, 3), mientras que la pendiente –2 indica que si x crece 1, y decrece 2.

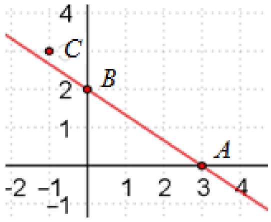


4. De la ecuación general $ax+by+c=0$ se pasa a la explicita despejando. Así,

- $x-2y-4=0\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}x-2$.
- $x-2y=0\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}x$.
- $x-4=0\Rightarrow x=4$.
- $-2y-4=0\Rightarrow y=-2$.

Condición de pertenencia de un punto a una recta

Aunque ya se ha indicado, conviene recalcar que un punto pertenece a una recta cuando cumple su ecuación: cuando al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación se verifica la igualdad.



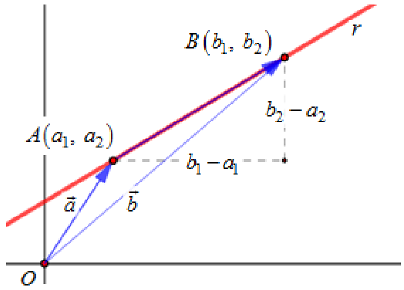
Ejemplo:
Los puntos A = (3, 0) y B = (0, 2) pertenecen a la recta $2x+3y-6=0$, pues:

$2\cdot 3+3\cdot 0-6=0$; $2\cdot 0+3\cdot 2-6=0$.

El punto C(–1, 3) no pertenece a ella, pues $2\cdot(-1)+3\cdot 3-6\neq 0$.

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Una recta queda determinada dando dos de sus puntos.



La ecuación de la recta que contiene a los puntos $A(a_1,\ a_2)$ y $B(b_1,\ b_2)$ es la que pasa por cualquiera de esos puntos, por ejemplo, por $A(a_1,\ a_2)$, y tiene la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$,

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=(b_1,\ b_2)-(a_1,\ a_2)=(b_1-a_1,\ b_2-a_2).$$

Por tanto, su ecuación será cualquiera de las siguientes:

$$r\equiv\begin{cases}x=a_1+k\cdot(b_1-a_1)\\ y=a_2+k\cdot(b_2-a_2)\end{cases}\Leftrightarrow r\equiv\frac{x-a_1}{b_1-a_1}=\frac{y-a_2}{b_2-a_2}\Leftrightarrow y-a_2=\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}(x-a_1).$$

$\to$ El punto A puede cambiarse por B; y el vector $\overrightarrow{AB}$ por $\overrightarrow{BA}$.

- La misma expresión se obtiene partiendo de la ecuación $y=mx+n$ e imponiendo que los puntos A y B la cumplan.

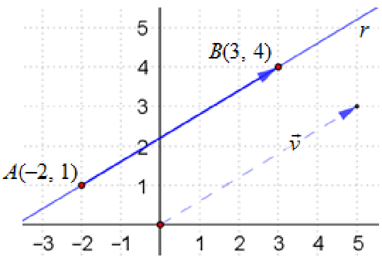
$\to$ Si $A(a_1,\ a_2)\in r\Rightarrow a_2=m\cdot a_1+n$. $\to$ Si $B(b_1,\ b_2)\in r\Rightarrow b_2=m\cdot b_1+n$.

Se obtiene el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}a_2=m\cdot a_1+n\\ b_2=m\cdot b_1+n\end{cases}$, del que puede despejarse m y n.

Ejemplo:
La ecuación de la recta que pasa por A = (–2, 1) y B = (3, 4) será:

1) Posición A = (–2, 1); dirección: $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ = (3, 4) – (–2, 1) = (5, 3).

Se obtiene:



$$r\equiv\begin{cases}x=-2+5k\\ y=1+3k\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x-(-2)}{3-(-2)}=\frac{y-1}{4-1}\Leftrightarrow\frac{x+2}{5}=\frac{y-1}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x-5y+11=0\Leftrightarrow y=\frac{3}{5}x+\frac{11}{5}.$$

2) Posición B = (3, 4); dirección: $\vec{v}=\overrightarrow{BA}$ = (–5, –3). Se obtiene:

$$r\equiv\begin{cases}x=3-5k\\ y=4-3k\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x-3}{-5}=\frac{y-4}{-3}\Leftrightarrow y=\frac{3}{5}x+\frac{11}{5}.$$

Obviamente, en cualquiera de los casos la recta es la misma.

- Partiendo de la ecuación $y=mx+n$, e imponiendo que los puntos A y B la cumplan.

$\to$ Si A = (–2, 1) $\in r\Rightarrow 1=-2m+n$. $\to$ Si B = (3, 4) $\in r\Rightarrow 4=3m+n$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases}1=-2m+n\\ 4=3m+n\end{cases}\xrightarrow[2E2+3E1]{E1-E2}\begin{cases}-3=-5m\\ 11=5n\end{cases}\Rightarrow m=\frac{3}{5};\ n=\frac{11}{5}$.

2. POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

En el plano, dos rectas pueden ser secantes, paralelas o coincidentes. Su posición se determina estudiando el sistema asociado a ellas. Así, la posición de las rectas $r: ax+by+c=0$ y $s: a´x+b´y+c´=0$, viene determinada por la solución del sistema $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a´x+b´y+c´=0 \end{cases}$.

Las rectas pueden venir dadas en cualquiera de sus formas.

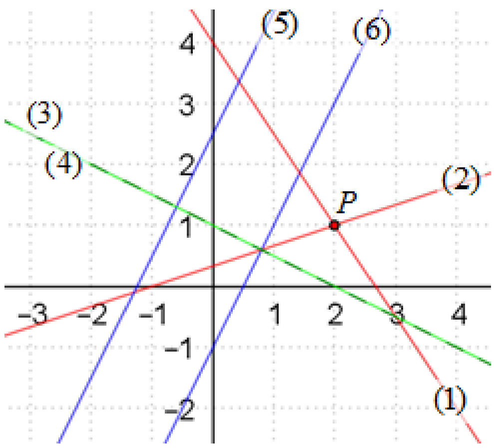
- Si el sistema es compatible determinado, las rectas son secantes (se cortan). Las coordenadas del punto de corte vienen dadas por la solución del sistema.
- Si el sistema es compatible indeterminado, las rectas son coincidentes: las dos ecuaciones son idénticas, equivalentes. En este caso: $a=ka´$; $b=kb´$; $c=kc´$; $k\neq 0$.
- Si el sistema es incompatible, las rectas son paralelas (no se cortan).

En este caso: $a=ka´$; $b=kb´$; $c\neq kc´$.

Ejemplos:

a) Las rectas $(1): 3x+2y-8=0$ y $(2): -x+3y-1=0$ se cortan en el punto (2, 1), que es la solución del sistema: $\begin{cases} 3x+2y-8=0 \\ -x+3y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=8 \\ -x+3y=1 \end{cases} \overset{E1+3E2}{\Rightarrow} \begin{cases} 11y=11 \\ -x+3y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$.

El punto de corte es $P(2,1)$.



b) Las rectas $(3): 2x+4y-4=0$ y $(4): -x-2y+2=0$ son coincidentes.

Observa que: $2x+4y-4=-2\cdot(-x-2y+2)=0$.

El sistema $\begin{cases} 2x+4y-4=0 \\ -x-2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+4y=4 \\ -x-2y=-2 \end{cases} \overset{E1+2E2}{\Rightarrow} \begin{cases} 0=0 \\ -x-2y=-2 \end{cases} \to$

$\to$ es compatible indeterminado.

c) Las rectas $(5): 4x-2y+3=0$ y $(6): y=2x-1$ son paralelas.

El sistema $\begin{cases} 4x-2y+3=0 \\ y=2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-2(2x-1)+3=0 \\ y=2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5=0 \\ y=2x-1 \end{cases} \to$ es incompatible.

Ejercicio 1

Sean $r\equiv 4x+by=0$ y $s\equiv y=2x+4$ dos rectas del plano.

a) ¿Existe algún valor de b para el que las rectas no se corten?

b) Halla, si existe, su punto de corte para b = 2.

Solución:

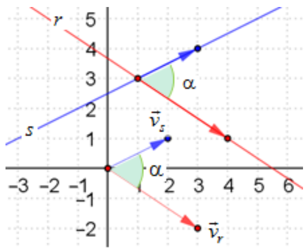
a) Con sus ecuaciones se obtiene el sistema:

$\begin{cases} 4x+by=0 \\ -2x+y=4 \end{cases} \overset{E1+2E2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (b+2)y=8 \\ -2x+y=4 \end{cases} \to y=\dfrac{8}{b+2}$, que tiene sentido siempre que $b\neq -2$.

Por tanto, las rectas no se cortan (el sistema no tiene solución) si $b = -2$.

b) Para b = 2, $y=\dfrac{8}{b+2}=\dfrac{8}{4}=2 \Rightarrow -2x+2=4 \Rightarrow x=-1$. Se cortan en el punto (–1, 2).

3. ÁNGULO ENTRE RECTAS. PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD



El ángulo que forman dos rectas *r* y *s* es el que forman sus respectivos vectores de dirección, y .

Por tanto: $\cos(r,\ s) = \cos(\vec{v}_r,\ \vec{v}_s) = \dfrac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|}$.

Ejemplos:

a) El ángulo que forman las rectas $r \equiv x - 2y + 5 = 0$ y $s \equiv 2x + 3y - 10 = 0$ es el que determinan sus vectores de dirección = (2, 1) y = (3, –2).

$$\cos(r,\ s) = \frac{(2,\ 1)\cdot(3,\ -2)}{\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \frac{6-2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \approx 0,496 \Rightarrow \alpha = \text{arcos } 0,496 = 60,26º.$$

Recuerda: El vector de dirección de la recta $ax + by + c = 0$ es $\vec{v} = (v_1,\ v_2) = (-b,\ a) = (b,\ -a)$, como se vio en el apartado **Ecuación general de una recta**.

b) Para determinar el ángulo que forman las rectas dadas en forma explícita, $r: y = 2x - 1$ y $s: y = -\dfrac{1}{2}x + 2$, se puede proceder como sigue:

1) Se expresan sus ecuaciones en forma implícita. Resultan: $r: 2x - y - 1 = 0$; $s: x + 2y - 4 = 0$.

2) Se determinan sus vectores de dirección: = (1, 2); = (–2, 1).

3) Se halla el ángulo: $\cos(r,\ s) = \dfrac{(1,\ 2)\cdot(-2,\ 1)}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2}} = \dfrac{-2+2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{0}{5} = 0 \Rightarrow \alpha = \text{arcos } 0 = 90º.$

En este caso, las rectas son perpendiculares.

Rectas paralelas

- Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente.

Así, $y = mx + n$ e $y = mx + n´$ son paralelas.

También son paralelas las rectas $r \equiv ax + by + c = 0$ y $s \equiv ax + by + c´ = 0$.

(Los coeficientes *a* y *b* de ambas rectas son iguales o proporcionales).

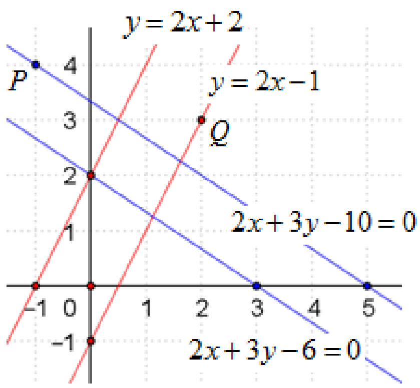
Paralela a una recta desde un punto *P*

La recta paralela a $r \equiv ax + by + c = 0$ y que pasa por el punto $P(x_0,\ y_0)$ es $r´ \equiv ax + by + c´ = 0$. El valor de *c´* se determina sustituyendo las coordenadas de *P* en la ecuación: $ax_0 + by_0 + c´ = 0 \Rightarrow c´$.

→ Si la ecuación viene dada en forma explícita, $r: y = mx + n$, su paralela será $r´: y = mx + n´$.

El valor de *n´* se obtiene sustituyendo las coordenadas de *P* en $r´: y_0 = mx_0 + n´ \Rightarrow n´$.

Ejemplos:



a) La ecuación de la recta paralela a $r \equiv 2x + 3y - 6 = 0$ y que pasa por el punto *P*(–1, 4) será: $r´ \equiv 2x + 3y + c´ = 0$.

Como *P*(–1, 4) es de *r´* $\Rightarrow$ $2\cdot(-1) + 3\cdot4 + c´ = 0 \Rightarrow c´ = -10$.

Por tanto, la recta buscada es $r´ \equiv 2x + 3y - 10 = 0$.

b) La ecuación de la recta paralela a $y = 2x + 2$ que pasa por el punto *Q*(2, 3) será $y = 2x + n$.

Como *Q*(2, 3) es de la paralela $\Rightarrow$ $3 = 2\cdot2 + n \Rightarrow n = -1$.

Por tanto, la recta buscada es $y = 2x - 1$.

Rectas perpendiculares

- Dos rectas son <u>perpendiculares</u> cuando el producto de sus pendientes vale $-1^{(*)}$.

Por tanto, las rectas $y = mx + n$ e $y = -\frac{1}{m}x + n'$ serán perpendiculares.

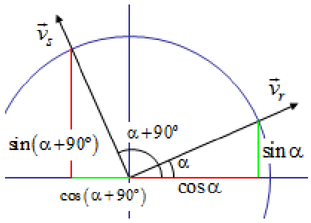
También son perpendiculares las rectas $r \equiv ax + by + c = 0$ y $s \equiv bx - ay + c' = 0$.

(*) Las rectas perpendiculares forman un ángulo de 90º $\Rightarrow \cos(\vec{v}_r,\ \vec{v}_s) = 0 \to \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$.

Por tanto, si $\vec{v}_r = (v_1,\ v_2) \Rightarrow \vec{v}_s = (-v_2,\ v_1)$.

Como la pendiente de una recta con vector de dirección $\vec{v}_r = (v_1,\ v_2)$ viene dada por $m = \frac{v_2}{v_1}$, la de vector de dirección $\vec{v}_s = (-v_2,\ v_1)$ será $m' = \frac{v_1}{-v_2} = -\frac{1}{m} \Rightarrow m \cdot m' = -1$.

→ También podría deducirse aplicando trigonometría.
Si una recta *r* forma un ángulo α con el eje *OX*, su perpendicular, *s*, formará un ángulo α + 90º.
Si la pendiente de la recta *r* es *m*, entonces $\tan\alpha = m$; la pendiente de su perpendicular *s* será $m' = \tan(\alpha + 90^\circ) = \frac{\sin(\alpha + 90^\circ)}{\cos(\alpha + 90^\circ)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\frac{1}{m}$.



<u>Perpendicular a una recta desde un punto *P*</u>
La recta perpendicular a $r \equiv ax + by + c = 0$ y que pasa por el punto *P* es $r' \equiv bx - ay + c' = 0$. El valor de *c´* se halla sustituyendo las coordenadas de $P(x_0,\ y_0)$ en la ecuación: $bx_0 - ay_0 + c' = 0 \Rightarrow c'$.

→ Si la ecuación viene dada en forma explícita, $r: y = mx + n$, la perpendicular $r': y = -\frac{1}{m}x + n'$.

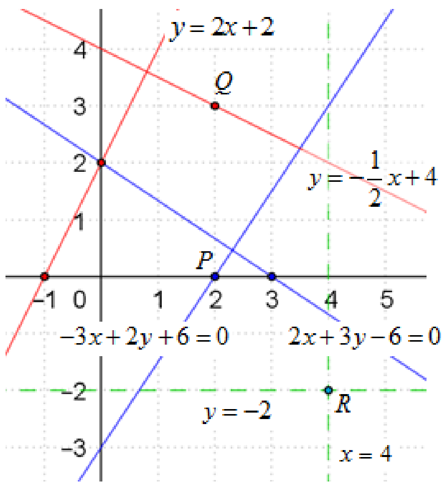
El valor de *n´* se obtiene sustituyendo las coordenadas de *P* en $r': y_0 = -\frac{1}{m}x_0 + n' \Rightarrow n'$.

Ejemplos:
a) La ecuación de la recta perpendicular a $r \equiv 2x + 3y + 3 = 0$ y que pasa por el punto *P*(2, 0) será: $r' \equiv -3x + 2y + c' = 0$.
Como *P*(2, 0) debe ser de *r´* $\Rightarrow -3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + c' = 0 \Rightarrow c' = 6$.
Por tanto, la recta buscada es $r' \equiv -3x + 2y + 6 = 0$.

b) La ecuación de la recta perpendicular a $y = 2x + 2$ que pasa por el punto *Q*(2, 3) será $y = -\frac{1}{2}x + n$.

Como *Q*(2, 3) es de la perpendicular $\Rightarrow 3 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + n \Rightarrow n = 4$.

Por tanto, la recta buscada es $y = -\frac{1}{2}x + 4$.



<u>Observaciones</u>:
1. Todas las ecuaciones de la forma $y = k$ determinan rectas paralelas al eje *OX*.
2. Las de la forma $x = k'$ se corresponden con rectas paralelas al eje *OY*.
3. Las primeras, $y = k$, son perpendiculares a las segundas, $x = k'$; y viceversa.
4. La paralela a *OX* por el punto *R*(4, –2) es $y = -2$; la perpendicular por el mismo punto, $x = 4$.

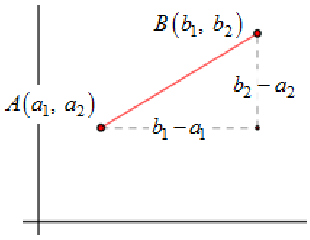
4. DISTANCIAS EN EL PLANO

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos es igual al módulo del vector que determinan.

Si $A(a_1,\ a_2)$ y $B(b_1,\ b_2)$, como $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)\Rightarrow$

$$d(A,\ B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}.$$



Ejemplo:

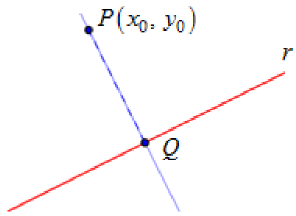
Si $A(1, 2)$ y $B(6, 5)$, la distancia entre A y B es:

$$d(A,\ B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(6-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}.$$

Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto P a una recta r es la menor de las distancias entre P y los puntos de r.

En la figura es la distancia entre P y Q: $d(P,\ r)=d(P,\ Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|$.



El punto Q es el corte de r con su perpendicular desde P. Ese punto Q es la <u>proyección</u> de P sobre r.

La distancia del punto $P(x_0,\ y_0)$ a la recta $r: ax+by+c=0$ viene dada por la expresión: $d(P,\ r)=\left|\dfrac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$.

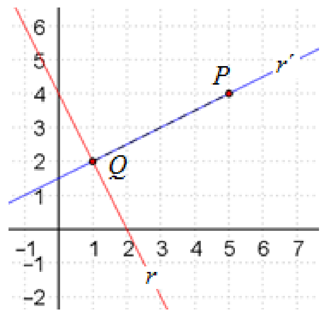
(Esta fórmula se demuestra en el Problema 13).

→ La distancia también puede determinarse si se hace lo que sigue:

1) Se halla Q: corte de r con su perpendicular desde P. 2) Se calcula la distancia entre P y Q.

Ejemplo:

Para $P(5, 4)$ y $r: 2x+y-4=0$, $d(P,\ r)=\dfrac{|2\cdot5+4-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$.



→ Si se calcula el punto Q y después la $d(P,\ Q)$ se tiene:

1) La perpendicular a r desde P es: $r': -x+2y+c=0$.

Por pasar por $P(5, 4)$: $-5 + 8 + c = 0 \Rightarrow c = -3 \Rightarrow r': -x+2y-3=0$.

Corte de r con r': $\begin{cases} r: 2x+y-4=0 \\ r': -x+2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=4 \\ -x+2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2E1-E2 \\ 2E2+E1 \end{matrix}\begin{cases} 5x=5 \\ 5y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow Q(1, 2)$.

2) $d(P,\ r)=d(P,\ Q)=\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

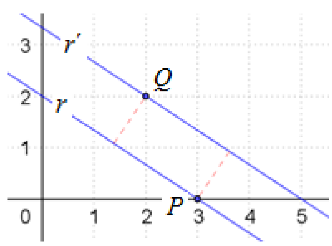
Distancia entre dos rectas paralelas

Es la distancia desde cualquier punto de una de ellas a la otra recta.

Ejemplo:

La distancia entre las rectas paralelas $r\equiv 2x+3y-6=0$ y $r'\equiv 2x+3y-10=0$ es igual a la distancia del punto $P(3, 0)\in r$ a la recta r' → $d(r,\ r')=d(P,\ r')=\dfrac{|2\cdot3+3\cdot0-10|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{13}}$.

También $d(r,\ r')=d(Q,\ r)$.



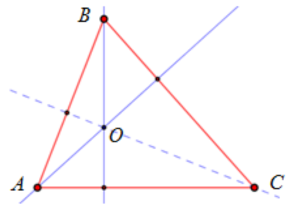
5. RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO (Optativo)

En un triángulo, además de sus lados y vértices, pueden considerarse sus rectas y puntos notables: alturas (ortocentro), mediatrices (circuncentro), medianas (baricentro) y bisectrices (incentro).

Ortocentro: alturas

- Las alturas de un triángulo son las rectas perpendiculares trazadas desde cada vértice al lado opuesto. Las tres alturas de un triángulo se cortan en el mismo punto, llamado ortocentro. (Demostración clásica)

Para determinar el ortocentro basta con hallar el punto de corte de dos de las alturas.

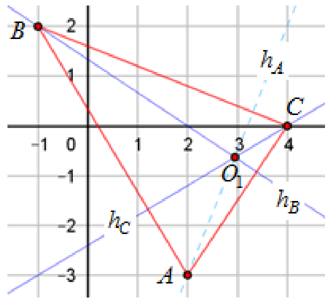


Ejercicio 2

Halla el ortocentro del triángulo de vértices $A(2, -3)$, $B(-1, 2)$ y $C(4, 0)$.

Solución:

Hay que calcular el punto de corte de dos de sus alturas; pero antes hay que hallar las ecuaciones de sus lados.



→ Recta que contiene al lado AB:

$$r_{AB}: \frac{x-2}{-1-2} = \frac{y+3}{2+3} \to 5x+3y-1=0.$$

La altura h_C es la perpendicular a r_{AB} que pasa por el punto C.

Su ecuación es: $h_C: 3x-5y+c_1=0$ → por pasar por $C(4, 0)$ →

$3\cdot 4+c_1=0 \Rightarrow c_1=-12$; luego $h_C: 3x-5y-12=0$.

→ Recta que contiene al lado AC: $r_{AC}: \dfrac{x-2}{4-2} = \dfrac{y+3}{0+3} \to 3x-2y-12=0$.

La altura h_B es la perpendicular a r_{AC} que pasa por el punto B. Su ecuación es:

$h_B: 2x+3y+c_2=0$ → pasa por $B(-1, 2)$ → $c_2=-4$; luego $h_B: 2x+3y-4=0$.

El ortocentro es el punto de corte de las alturas; y viene dado por la solución del sistema

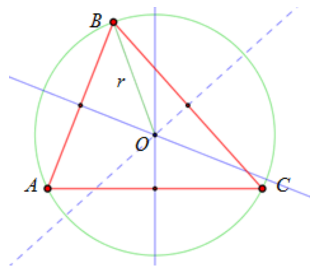
$$\begin{cases} h_C: 3x-5y-12=0 \\ h_B: 2x+3y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-5y=12 \\ 2x+3y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 3E1+5E2 \\ 3E2-2E1 \end{matrix} \begin{cases} 19x=56 \\ 19y=-12 \end{cases} \Rightarrow O_1\left(\frac{56}{19}, -\frac{12}{19}\right).$$

Sugerencia: Halla la otra altura y comprueba que también pasa por el punto O_1.

Circuncentro: mediatrices

- Las mediatrices de un triángulo son rectas perpendiculares a cada lado por su punto medio. Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en el mismo punto, llamado circuncentro. (Demostración clásica).

El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, la que pasa por sus tres vértices. Para determinar el circuncentro basta con hallar el punto de corte de dos de las mediatrices.



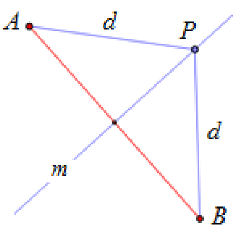
→ La mediatriz de un segmento (de un lado) también puede considerarse como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento (de dos de sus vértices).

Por tanto, si el segmento tiene extremos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, un punto $P(x, y)$ será de la mediatriz si cumple que: $d(P, A) = d(P, B)$.

O lo que es lo mismo:

$$\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2} = \sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2}.$$

Desarrollando esta igualdad se obtiene la ecuación de una recta.



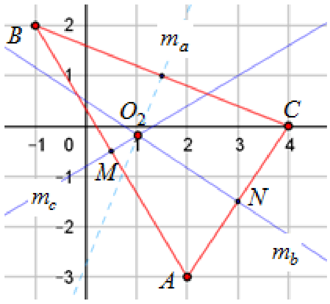
Ejemplo:
Cualquier punto $P(x,\ y)$ de la mediatriz del segmento de extremos $A(2, -3)$ y $B(-1, 2)$ cumple :

$$d(P,\ A)=d(P,\ B) \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$$

Haciendo el cuadrado de las raíces y desarrollando los cuadrados:

$$x^2-4x+4+y^2+6y+9=x^2+2x+1+y^2-4y+4 \Rightarrow 6x-10y-8=0 \to 3x-5y-4=0.$$

Ejercicio 3
Halla el circuncentro del triángulo de vértices $A(2, -3)$, $B(-1, 2)$ y $C(4, 0)$.
Solución:
(Este triángulo es el mismo del Ejercicio 2. Ya se conocen las ecuaciones de dos de sus lados).
$\to$ La mediatriz del lado AB es la obtenida en el ejemplo anterior: $m_c: 3x-5y-4=0$.



$\to$ Mediatriz m_b: es la perpendicular a r_{AC} que pasa por el punto medio del lado, que es $N\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{-3+0}{2}\right) \to N\left(3,\ \frac{-3}{2}\right)$.

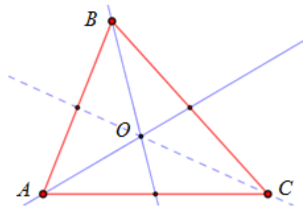
Su ecuación es: $m_b: 2x+3y+c_3=0 \to$ pasa por $N \to c_3=-3/2$;
luego $m_b: 4x+6y-3=0$.

El circuncentro es el punto de corte de las mediatrices halladas. Viene dado por la solución del sistema

$$\begin{cases} m_c: 3x-5y-4=0 \\ m_b: 4x+6y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-5y=4 \\ 4x+6y=3 \end{cases} \underset{3E2-4E1}{\overset{6E1+5E2}{\Rightarrow}} \begin{cases} 38x=39 \\ 38y=-7 \end{cases} \Rightarrow O_2\left(\frac{39}{38},\ -\frac{7}{38}\right).$$

Sugerencia: Halla la otra mediatriz y comprueba que también pasa por el punto O_2.

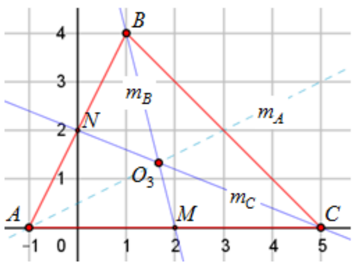
Baricentro: medianas



- Las medianas de un triángulo son las rectas que unen cada vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas de un triángulo se cortan en el mismo punto, llamado baricentro.

(Demostración clásica)
Para determinar el baricentro basta con hallar el punto de corte de dos de las medianas.

Ejercicio 4
Halla el baricentro del triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(1, 4)$ y $C(5, 0)$.
Solución:
Hay que calcular el punto de corte de dos de sus medianas.
$\to$ Mediana m_B: es la recta que pasa $M(2, 0)$ y $B(1, 4)$.



Su ecuación es: $y-4=-4(x-1) \to y=-4x+8$.
(Es la recta del haz que pasa por el punto (1, 4) y tiene pendiente –4).
$\to$ Mediana m_C: es la recta que pasa $N(0, 2)$ y $C(5, 0)$.

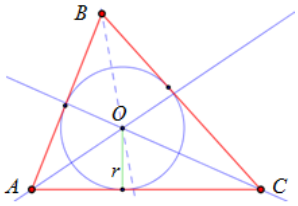
Su ecuación es: $y=mx+2 \to$ pasa por $C \to 0=5m+2;\ m=-\frac{2}{5}$.

Luego, la mediana es $y=-\frac{2}{5}x+2$.

El baricentro se obtiene igualando ambas ecuaciones: $-4x+8=-\frac{2}{5}x+2 \Rightarrow O_3\left(\frac{5}{3},\ \frac{4}{3}\right)$.

Sugerencia: Halla la otra mediana y comprueba que también pasa por el punto O_3.

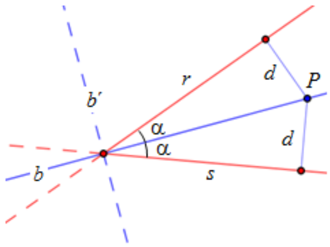
Incentro: bisectrices



- Las bisectrices de un triángulo son las bisectrices de cada uno de sus ángulos. Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en el mismo punto, llamado incentro, el centro de la circunferencia inscrita al triángulo, que es tangente interior común a sus lados. (Demostración clásica)

Para determinar el incentro basta con hallar el punto de corte de dos de las bisectrices.

→ La bisectriz de un ángulo también puede considerarse como es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados del ángulo.
Por tanto, si los lados de un ángulo se apoyan en las rectas $r: ax+by+c=0$ y $s: a´x+b´y+c´=0$, un punto $P(x,\ y)$ será de la bisectriz si cumple que: $d(P,\ r)=d(P,\ s)$.



O lo que es lo mismo:

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a´x+b´y+c´}{\pm\sqrt{(a´)^2+(b´)^2}}.$$

Operando esta igualdad se obtienen las ecuaciones de dos rectas (una para el signo + de la raíz; otra, para el signo –). Esas rectas se corresponden con las bisectrices interior (*b*) y exterior del ángulo (*b´*).

Observaciones:
1) Para hallar la distancia, las ecuaciones de las rectas deben escribirse en forma implícita.
2) La determinación de las bisectrices puede resultar engorrosa, pues aparecen raíces cuadradas.
3) Las bisectrices de un ángulo son perpendiculares. (Intenta hacer una demostración geométrica).

Ejercicio 5

Halla la ecuación de las bisectrices del ángulo que determinan las rectas $r: 3x+4y-12=0$ y $s: y=3x$.

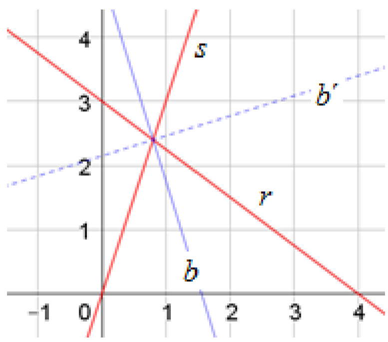
Solución:

Un punto genérico, $P(x,\ y)$, es de la bisectriz si cumple que: $d(P,\ r)=d(P,\ s)$.

$$d(P,\ r)=\frac{3x+4y-12}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3x+4y-12}{5}.$$

La recta $s: y=3x \Leftrightarrow s: 3x-y=0$. Por tanto, $d(P,\ s)=\dfrac{3x-5}{\pm\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{3x-y}{\pm\sqrt{10}}$.

Igualando ambas distancias: $\dfrac{3x+4y-12}{5}=\dfrac{3x-y}{\pm\sqrt{10}}$.



Transformando la igualdad se obtiene:

→ Con $+\sqrt{10}$: $\sqrt{10}\cdot(3x+4y-12)=5\cdot(3x-y) \Rightarrow$

$b´$: $\left(3\sqrt{10}-15\right)x+\left(4\sqrt{10}+5\right)y-12\sqrt{10}=0$.

→ Con $-\sqrt{10}$: $-\sqrt{10}\cdot(3x+4y-12)=5\cdot(3x-y) \Rightarrow$

b: $\left(3\sqrt{10}+15\right)x+\left(4\sqrt{10}-5\right)y-12\sqrt{10}=0$.

→ Puede verse que las bisectrices son perpendiculares.
Sus vectores de dirección son:

$$\vec{v}_{b´}=\left(\left(4\sqrt{10}+5\right),-\left(3\sqrt{10}-15\right)\right) \text{ y } \vec{v}_b=\left(\left(4\sqrt{10}-5\right),-\left(3\sqrt{10}+15\right)\right).$$

Su producto escalar, $\vec{v}_{b´}\cdot\vec{v}_b=16\cdot 10-25+9\cdot 10-225=0$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Representa gráficamente la recta que pasa por el punto *A*(1, 2) y tiene por vector director $\vec{v}=(3,\ -1)$. Da otros dos puntos de ella.

2. Halla la ecuación vectorial de la recta del ejercicio anterior. A partir de esa ecuación obtén las demás expresiones de la recta.

3. Expresa la recta de ecuación $y=2x-3$ en las demás formas: explícita, continua, paramétrica y vectorial.

4. Dadas las rectas $r:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{1}$ y $s: y=-2x+4$, halla:
a) La pendiente y ordenada en el origen de cada una de ellas.
b) El punto donde se cortan.

5. Halla la ecuación del haz de rectas que pasa por el punto *A*(–2, 3). De ese haz halla la ecuación explícita de la recta que:
a) tiene pendiente 0,5; b) pasa por el punto *B*(4, 1).
Represéntalas gráficamente.

6. Representa gráficamente las siguientes rectas:
a) $2x+3y-6=0$; b) $x+2y-3=0$; c) $x-2=0$; d) $2y+2=0$.

7. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos:
a) *A*(2, 5) y *B*(3, 4); b) *A*(–1, 3) y *B*(2, 4); c) *A*(–1, 2) y *B*(2, 2); d) *A*(3, –1) y *B*(3, 2).

8. Determina la posición relativa de los siguientes pares de rectas:
a) $2x+3y-8=0$; $x+2y-5=0$. b) $x-2y+1=0$; $-2x+4y+3=0$.
c) $y=2x-3$; $x+y-6=0$. d) $x=4$; $2x-3y=6$.
Haz la representación gráfica.

9. Halla el ángulo que determinan cada una de las rectas $r:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{1}$ y $s: y=-2x+2$ con el eje de abscisas. Utiliza ese resultado para hallar el ángulo que forman entre ellas.

10. Para las rectas anteriores, halla sus vectores de dirección y, utilizando el producto escalar, calcula el ángulo determinado por las dos rectas. Compara el resultado con el obtenido en el problema 9.

11. Halla la recta paralela a:
a) $2x+3y-6=0$ por el punto *O*(0, 0). b) $y=-2x+3$ por el punto *P*(2, –3).
c) $-x+3=0$ por el punto *Q*(1, 2). d) $y=2$ por el punto *R*(2, –1).

12. Halla la recta perpendicular a:
a) $2x+3y-6=0$ por el punto *O*(0, 0). b) $y=-2x+3$ por el punto *P*(2, –3).
c) $-x+3=0$ por el punto *Q*(1, 2). d) $y=2$ por el punto *R*(2, –1).

13. Demuestra que la distancia del punto $P\left(x_0,\ y_0\right)$ a la recta $r: ax+by+c=0$ viene dada por la expresión: $d\left(P,\ r\right)=\left|\dfrac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$.

14. Halla la distancia del punto *P*(2, –3) a cada una de las siguientes rectas:
a) $x+2y-3=0$; b) $y=\dfrac{2}{3}x-4$; c) $y=3$; d) $x=2$.

15. Halla el área del triángulo determinado por las rectas:
$(1): 5x+3y-1=0$; $(2): 2x+5y-8=0$; $(3): 3x-2y-12=0$.

16. Halla el punto *Q*, proyección de *P*(1, –3) sobre la recta $r: 2x+5y+3=0$. Halla la distancia entre ambos puntos y comprueba, $d\left(P,\ r\right)=d\left(P,\ Q\right)$.

17. Halla el punto *P´*, simétrico de *P*(1, –3) respecto de la recta $r: 2x+5y+3=0$.

18. Halla la recta simétrica de $r: y=\dfrac{1}{2}x$, respecto del eje $e\equiv x-y+2=0$.

19. Halla la bisectriz de las rectas $r: y=\dfrac{1}{2}x$ y $r´: y=2x+6$. Comprueba que esas rectas son simétricas respecto de esa bisectriz.

20. Utilizando la perpendicular por el punto medio, halla la mediatriz del segmento de extremos *A*(2, –3) y *B*(–1, 2).

21. Halla el ortocentro, el circuncentro y el baricentro del triángulo de vértices *A*(0, 5), *B*(6, 1) y *C*(2, –1)

22. Halla la ecuación de las bisectrices del ángulo que determinan los siguientes pares de rectas:
a) $r: 2x+5y-2=0$ y $s: y=-4x+8$; b) $r: \sqrt{3}x-y=0$ y $s: x-\sqrt{3}y=0$.

Observación sobre recursos informáticos
Todos los dibujos de este tema han sido elaborados utilizando **GeoGebra**.
Como habrás comprobado si te has decidio a utilizarlo, se trata de un programa muy versátil y fácil de manejar. Gran parte de los problemas propuestos aquí pueden resolverse de manera automática con su ayuda. Por ejemplo: determinación de la recta que pasa por dos puntos; recta paralela o perpendicular a otra dada desde cualquier punto; mediatrices, bisectrices…

RECURSOS INFORMÁTICOS