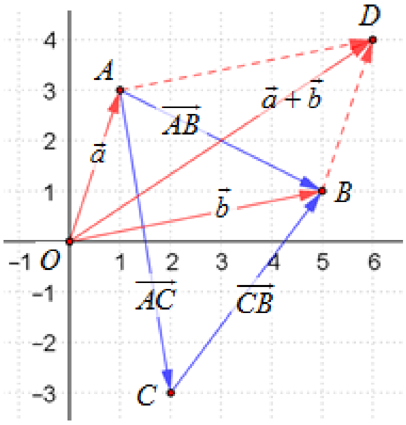
Solución de los Problemas Propuestos

1. Dados los puntos $A(1, 3)$, $B(5, 1)$ y $C(2, –3)$, represéntalos y determina las coordenadas de los vectores:

a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CB}$.

b) Halla y representa gráficamente el vector $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

c) Comprueba que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.



Solución:

a) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ = (5, 1) – (1, 3) = (4, –2);

$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$ = (2, –3) – (1, 3) = (1, –6);

$\overrightarrow{CB}=\vec{b}-\vec{c}$ = (5, 1) – (2, –3) = (3, 4).

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$ = (1, 3) + (5, 1) = (6, 4) → D.

c) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ = $\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=-\vec{a}+\vec{c}=\vec{c}-\vec{a}$.

2. Dados los vectores $\vec{a}$ = (–1, 3), $\vec{b}$ = (2, –1) y $\vec{c}$ = (4, 5) calcula:

a) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; b) $2\vec{a}-\vec{b}$; c) $\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$: d) $-3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$

Solución:

a) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ = (–1, 3) + (2, –1) + (4, 5) = (–1 + 2 + 4, 3 – 1 + 5) = (5, 7).

b) $2\vec{a}-\vec{b}$ = 2 · (–1, 3) – (2, –1) = (–2, 6) – (2, –1) = (–2 – 2, 6 + 1) = (–4, 7).

c) $\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$ = (–1, 3) + 3 · (2, –1) – (4, 5) = (–1, 3) + (6, –3) – (4, 5) =
= (–1 + 6 – 4, 3 – 3 – 5) = (1, –5).

d) $-3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$ = –3 · (–1, 3) + (2, –1) – 2 · (4, 5) = (3, –9) + (2, –1) – (8, 10) = (–3, –20).

3. Dados los vectores del plano $\vec{a}$ = (2, 1) y $\vec{b}$ = (–1, 3), representa gráficamente:

$\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{a}-\vec{b}$; $\vec{a}+2\vec{b}$; $\vec{a}+3\vec{b}$

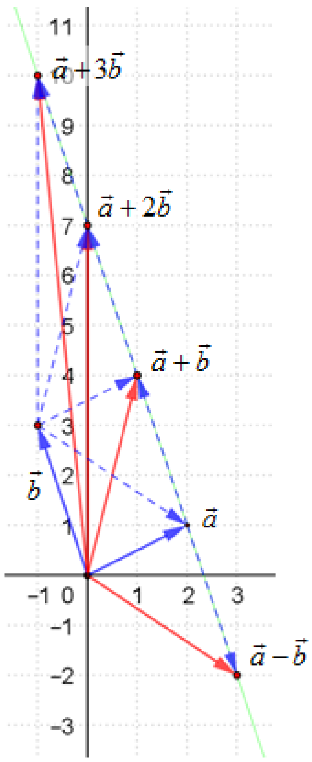
Solución:

$\vec{a}+\vec{b}=(2,\ 1)+(-1,\ 3)=(1,\ 4)$;

$\vec{a}-\vec{b}=(2,\ 1)-(-1,\ 3)=(3,-2)$;

$\vec{a}+2\vec{b}=(2,\ 1)+2(-1,\ 3)=(0,\ 7)$;

$\vec{a}+3\vec{b}=(2,\ 1)+3\cdot(-1,\ 3)=(-1,\ 10)$.



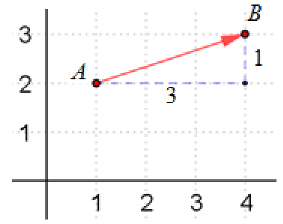
4. Para los vectores del ejercicio anterior, ¿observas alguna relación entre los extremos de $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}+2\vec{b}$ …? ¿Podrías decir dónde se encontrarán los extremos de todos los vectores de la forma $\vec{a}+\lambda\vec{b}$, siendo λ un número real?

Solución:

Los extremos están en línea recta. Es una recta que pasa por el punto (2, 1) y sigue la dirección del vector $\vec{b}$ = (–1, 3).

La ecuación de esta recta, como se verá con detalle en el tema siguiente, es $r\equiv(2,\ 1)+\lambda\cdot(-1,\ 3)$.

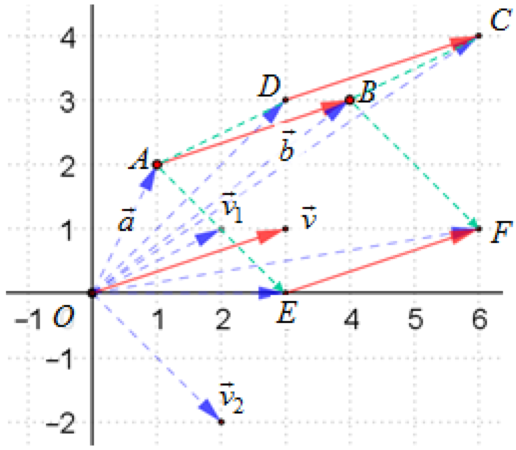
5. Considera el vector fijo de extremos *A*(1, 2) y *B*(4, 3).
a) Halla su módulo.
b) Da los extremos de dos vectores que sean equipolentes al vector $\overrightarrow{AB}$ del ejercicio anterior. Da también su vector libre asociado.
Solución:



a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(4-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$.

b) Los vectores correspondientes a los puntos *A*(1, 2) y *B*(4, 3) son $\vec{a} = (1,\ 2)$ y $\vec{b} = (4,\ 3)$.

Sumando el mismo vector a $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se obtendrán los extremos de los puntos de otro vector fijo equipolente a $\overrightarrow{AB}$.



- Si se les suma $\vec{v}_1 = (2,\ 1)$, se obtienen:

  $\vec{a} + \vec{v}_1 = (1,\ 2) + (2,\ 1) = (3,\ 3) \to D$;

  $\vec{b} + \vec{v}_1 = (4,\ 3) + (2,\ 1) = (6,\ 4) \to C$.

El vector $\overrightarrow{DC}$ es equipolente a $\overrightarrow{AB}$.

- Si se les suma $\vec{v}_2 = (2,\ -2)$, se obtienen:

  $\vec{a} + \vec{v}_2 = (3,\ 0) \to E$; $\vec{b} + \vec{v}_2 = (6,\ 1) \to F$.

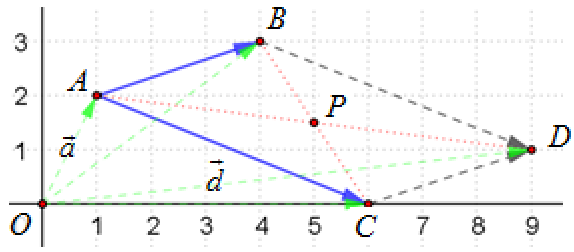
El vector $\overrightarrow{EF}$ es equipolente a $\overrightarrow{AB}$.

- El vector libre asociado es

  $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a} = (4,\ 3) - (1,\ 2) = (3,\ 1)$.

El vector $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$ es equipolente a $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ y $\overrightarrow{EF}$.

6. Representa los puntos *A*(1, 2), *B*(4, 3) y *C*(6, 0). Halla otro punto *D* de manera que *ABDC* (en ese orden) sea un paralelogramo.
Solución:
La situación debe ser la que se muestra en la figura.



Al punto *D* se llega sumando los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ al vector libre $\vec{a}$.
Esto es:

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Como

$\overrightarrow{AB}$ = (4, 3) – (1, 2) = (3, 1);

$\overrightarrow{AC}$ = (6, 0) – (1, 2) = (5, –2) ⇒

$\vec{d}$ = (1, 2) + (3, 1) + (5, –2) = (9, 1) → *D*(9, 1).

Nota: Partiendo de los mismos puntos *A*, *B*, *C* se pueden construir otros dos paralelogramos. El de vértices *ABCD*, con *D*(3, –1); y el de vértices *ADBC*, con *D*(–1,5). (Anímate a comprobarlo; no es una pérdida de tiempo).

7. Para el paralelogramo *ABDC* del ejercicio anterior, comprueba que las diagonales se cortan en su punto medio. Esto es, que el punto medio del segmento *AD* es el mismo que el punto medio del segmento *BC*.
Solución:
El punto medio del segmento de extremos *A* y *D* es: $P=\left(\frac{1+9}{2},\ \frac{2+1}{2}\right)=\left(5,\ \frac{3}{2}\right)$.

El punto medio del segmento de extremos *B* y *C* es: $Q=\left(\frac{4+6}{2},\ \frac{3+0}{2}\right)=\left(5,\ \frac{3}{2}\right)$.

Efectivamente coinciden.

8. Para el mismo paralelogramo *ABDC*, calcula lo que miden sus lados y sus diagonales.
Solución:
En todos los casos hay que calcular la distancia entre dos puntos (o, lo que es lo mismo, el módulo del vector que determinan esos puntos).
Lado *AB*: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$. Evidentemente coincide con el lado *CD*.

Lado *AC* y *BD*: $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{5^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$. Evidentemente coincide con el lado *CD*.

Diagonal *AD*: $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{(9-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{65}$.

Diagonal *BD*: $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(4-6)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$.

9. Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento de extremos *A*(–1, 4) y *B*(3, –2) en tres partes iguales.
Solución:
Si esos puntos son P_1 y P_2, entonces

$$\left|\overrightarrow{AP_1}\right|=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\left|\overrightarrow{P_2B}\right|=\frac{1}{3}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$$

Como $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ = (3, –2) – (–1, 4) = (4, – 6) ⇒

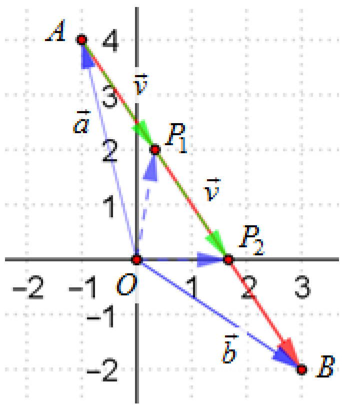
$$\vec{v}=\frac{1}{3}\left(\vec{b}-\vec{a}\right) = (4/3, -2).$$

Con esto:

$$\overrightarrow{OP_1}=\vec{a}+\vec{v} = (-1, 4) + (4/3, -2) = (1/3, 2).$$

$$\overrightarrow{OP_2}=\vec{a}+2\vec{v} = (-1, 4) + 2 \cdot (4/3, -2) = (5/3, 0).$$

Luego, los puntos buscados son: $P_1\left(\frac{1}{3},\ 2\right)$ y $P_2\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$.



10. Dados $\vec{a}$ = (–1, 2) y $\vec{b}$ = (3, 5) encuentra *p* y *q* para que $p\vec{a}$ + $q\vec{b}$ = (2, –3).
Solución:
Hay que resolver la ecuación vectorial:

$$p\cdot(-1,\ 2)+q\cdot(3,\ 5)=(2,\ -3)\Rightarrow(-p+3q,\ 2p+5q)=(2,\ -3)\Rightarrow\begin{cases}-p+3q=2\\2p+5q=-3\end{cases}.$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$\begin{cases}-p+3q=2\\2p+5q=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}5E1-3E2\\E2+2E1\end{matrix}\begin{cases}-11p=19\\11q=1\end{cases}\Rightarrow p=-\frac{19}{11};\ q=\frac{1}{11}.$$

11. Dada la parábola $y = x^2 + 4x$, halla la ecuación de su trasladada según el vector $\vec{v}$ = (5, 3). Dibuja ambas parábolas indicando las coordenadas del vértice de cada una de ellas. Además, se pide:

a) Escribe cada una de esas ecuaciones en la forma $y - y_0 = (x - x_0)^2$.

b) Comprueba que las coordenadas (x_0, y_0) coinciden con las del vértice de cada una de ellas.

c) Indica el vector de traslación que permite obtenerlas a partir de la de ecuación $y = x^2$.

Solución:

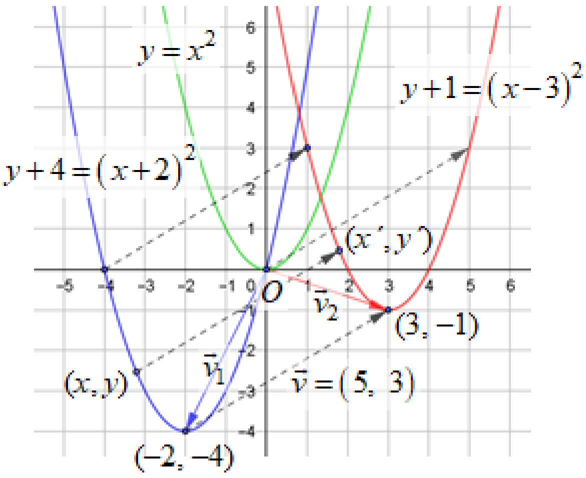
Cualquier punto (*x*´, *y*´) trasladado de (*x*, *y*) mediante el vector $\vec{v}$ = (5, 3) cumple que

$$\begin{cases} x' = x + 5 \\ y' = y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 5 \\ y = y' - 3 \end{cases};$$

luego, sustituyendo en $y = x^2 + 4x$ se obtiene

$$y' - 3 = (x - 5)^2 + 4(x - 5) \Rightarrow$$

$$y' - 3 = x'^2 - 10x' + 25 + 4x' - 20 \Rightarrow y' = x'^2 - 6x' + 8.$$



El vértice de $y = x^2 + 4x$ está en el punto (–2, –4); otros puntos son: (–4, 0) y (0, 0).

El vértice de $y' = x'^2 - 6x' + 8$ es el punto (3, –1), trasladado de (–2, –4); otros puntos son: (1, 3), trasladado de (–4, 0); y (5, 3) trasladado de (0, 0).

a) Completando cuadrados:

$$y = x^2 + 4x \Leftrightarrow y = (x + 2)^2 - 4 \Rightarrow y + 4 = (x + 2)^2.$$

$$y' = x'^2 - 6x' + 8 \Leftrightarrow y' = (x' - 3)^2 - 9 + 8 \Rightarrow y' + 1 = (x' - 3)^2.$$

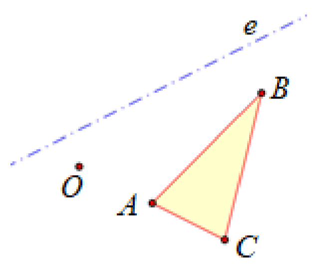
b) Efectivamente, el vértice de $y = x^2 + 4x$ es el punto (x_0, y_0) = (–2, –4); mientras que el de la parábola $y' = x'^2 - 6x' + 8$ es (x'_0, y'_0) = (3, –1).

c) La parábola $y = x^2 + 4x$ es la trasladada de $y = x^2$ mediante el vector $\vec{v}_1$ = (–2, –4); mientras que $y' = x'^2 - 6x' + 8$ es la trasladada de $y = x^2$ mediante el vector $\vec{v}_2$ = (3, –1).

12. En la figura adjunta se da el triángulo *ABC*, el punto *O* y la recta *e*. Utilizando regla y compás, dibuja:

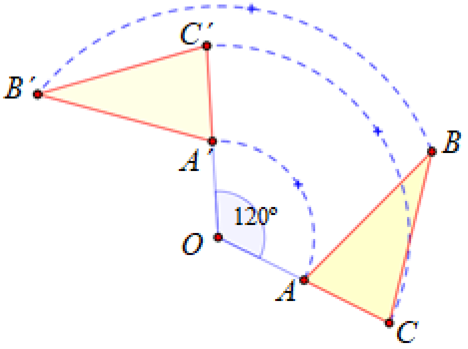
a) El triángulo girado 120º de *ABC*, siendo *O* el centro de giro.

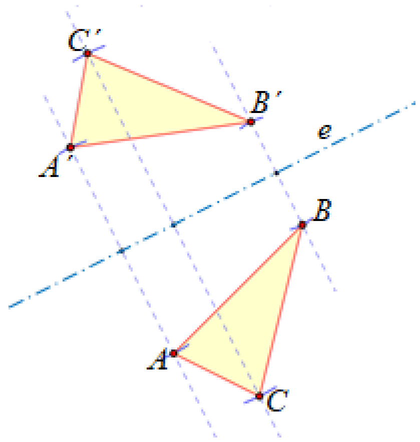
b) El triángulo simétrico de *ABC*, siendo *e* el eje de simetría.



Solución:

a) Con centro en *O* y radios *OA*, *OB* y *OC* se trazan arcos de amplitud 120º. Para ello, con un compás, se miden consecutivamente dos arcos de radios *OA*, *OB* y *OC*, respectivamente, a partir de los vértices *A*, *B* y *C*. Así se obtiene los vértices *A*´, *B*´ y *C*´.



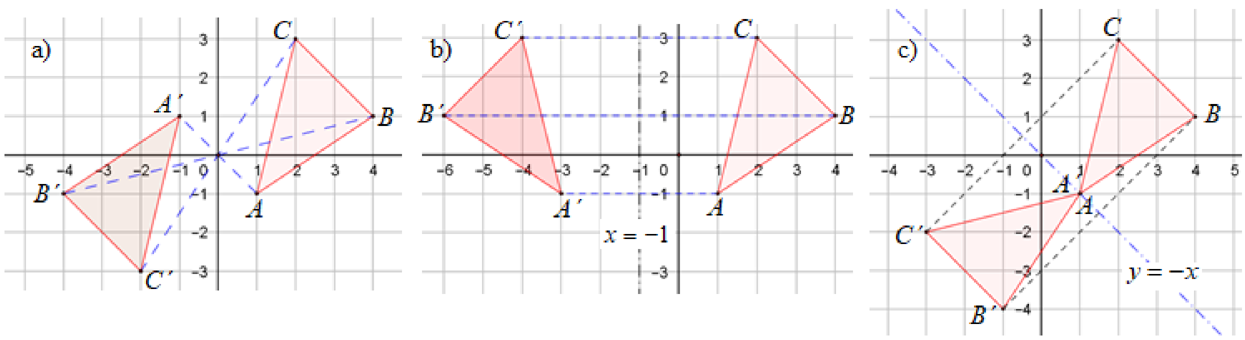


b) Desde los puntos *A*, *B* y *C* se trazan perpendiculares al eje de simetría (*e*) y se marcan los puntos de corte con él. Después, con un compás y centro en esos puntos, se miden hacia el lado opuesto las distancias *OA*, *OB* y *OC*.

13. Dado el triángulo de vértices *A*(1, –1), *B*(4, 1) y *C*(2, 3), dibuja, indicando los nuevos vértices de su triángulo:
a) Simétrico respecto el origen de coordenadas (simetría central).
b) Simétrico respecto del eje la recta vertical $x = -1$ (simetría axial).
c) Simétrico respecto de la bisectriz del segundo cuadrante, recta $y = -x$.
Solución:
En las figuras que siguen puede observarse:
a) En la simetría respecto del origen de coordenadas *O*(0, 0), cada *P*(*x*, *y*) se transforma en *P´*(–*x*, –*y*). Así, el punto *A*(1, –1), se transforma *A´*(–1, 1); *B*(4, 1), en *B´*(–4, –1); y *C*(2, 3), en *C´*(–2, –3).

b) En la simetría respecto del eje $x = -1$ (que actúa como un espejo) cada punto se transforma en otro con la misma ordenada y con abscisa a la misma distancia del eje de simetría que su homólogo. Así: *A*(1, –1) → *A´*(–3, 1); *B*(4, 1) → *B´*(–6, –1); *C*(2, 3) → *C´*(–4, 3).

c) En la simetría respecto de la bisectriz del segundo cuadrante, recta $y = -x$, cada punto se transforma en otro con las coordenadas cambiadas y signo opuesto: *P*(*x*, *y*) → *P´*(–*y*, –*x*).
Así: *A*(1, –1) → *A´*(1, –1); *B*(4, 1) → *B´*(–1, –4); *C*(2, 3) → *C´*(–3, –2).



14. Demuestra que los vectores del plano $\vec{a} = (2, 1)$ y $\vec{b} = (-1, 3)$ forma una base. Expresa el vector $\vec{v} = (-3, 4)$ en función de dicha base.
Solución:
Hay que comprobar que:
1) Son linealmente independientes, que tienen distinta dirección. Para ello hay que ver que la relación $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ es imposible.
En efecto, si $\vec{b} = k \cdot \vec{a} \Rightarrow (-1,\ 3) = k(2,\ 1) \Rightarrow (-1,\ 3) = (2k,\ k) \Rightarrow k = -1/2$ y $k = 3 \to$ absurdo.

2) Cualquier vector $\vec{v}=(x,\ y)$ se puede escribir en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
En efecto, si:

$$(x,\ y)=k_1\cdot(2,\ 1)+k_2\cdot(-1,\ 3) \Rightarrow (x,\ y)=(2k_1-k_2,\ k_1+3k_2) \Rightarrow \begin{cases} x=2k_1-k_2 \\ y=k_1+3k_2 \end{cases}.$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$\begin{cases} x=2k_1-k_2 \\ y=k_1+3k_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1-2E2 \\ E2+3E1 \end{matrix} \begin{cases} x-2y=-7k_2 \\ y+3x=7k_1 \end{cases} \Rightarrow k_1=\frac{3x+y}{7};\ k_2=\frac{-x+2y}{7}.$$

Por tanto, para cualquier vector $\vec{v}=(x,\ y)$ se cumple: $(x,\ y)=\frac{3x+y}{7}\cdot(2,\ 1)+\frac{-x+2y}{7}\cdot(-1,\ 3)$.

En particular:

$$\vec{v}=(-3,\ 4)=\frac{-9+4}{7}\cdot(2,\ 1)+\frac{3+8}{7}\cdot(-1,\ 3) \Rightarrow \vec{v}=(-3,\ 4)=\frac{-5}{7}\cdot(2,\ 1)+\frac{11}{7}\cdot(-1,\ 3).$$

15. En la base $\{\vec{a}=(2,\ 1),\ \vec{b}=(-1,\ 3)\}$ se sabe que $\vec{u}=2\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{v}=-3\vec{a}+5\vec{b}$. Halla $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Solución:

Si $\vec{u}=2\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{v}=-3\vec{a}+5\vec{b}$, sustituyendo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se tiene:

$$\vec{u}=2\cdot(2,\ 1)+(-1,\ 3)=(3,\ 5);\ \vec{v}=-3\cdot(2,\ 1)+5\cdot(-1,\ 3)=(-11,\ 12).$$

Por tanto,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(3,\ 5)\cdot(-11,\ 12)=3\cdot(-11)+5\cdot 12=-33+60=27.$$

16. Para los vectores $\vec{a}$ = (–1, 2) y $\vec{b}$ = (3, 5), halla su producto escalar y el ángulo que forman.

Solución:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1,2)\cdot(3,5)=-1\cdot 3+2\cdot 5=-3+10=7.$$

$$\cos\alpha=\cos\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{-3+10}{\sqrt{(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{34}}\approx 0{,}5369 \Rightarrow \alpha\approx 57{,}5^\circ.$$

17. Halla un vector perpendicular a cada uno de los vectores del ejercicio anterior. Comprueba que tu resultado es correcto.

Solución:

Los vectores perpendiculares a $\vec{a}$ = (–1, 2) son de la forma $\vec{a}_p=(2k,\ k)$, con $k\neq 0$; por ejemplo $\vec{a}_p=(2,\ 1)$, que se obtiene si k = 1.

Como $\vec{a}\cdot\vec{a}_p$ = (–1, 2) · (2, 1) = –2 + 2 = 0, se confirma que son perpendiculares.

Los vectores perpendiculares a $\vec{b}$ = (3, 5) son de la forma $\vec{b}_p=(-5k,\ 3k)$; por ejemplo $\vec{b}_p=(10,\ -6)$, que se obtiene si k = –2.

Como $\vec{b}\cdot\vec{b}_p$ = (3, 5) · (10, –6) = 30 – 30 = 0, se confirma que son perpendiculares.

18. Si $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=5$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=10$, calcula:

a) $\vec{u}\cdot(3\vec{u}-2\vec{v})$; b) El ángulo que forman ambos vectores.

Solución:

a) Con los datos del problema $\Rightarrow$ $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos 0^\circ=4\cdot 4\cdot 1=16$.

Aplicando la propiedad distributiva del producto escalar:

$$\vec{u}\cdot(3\vec{u}-2\vec{v})=3\vec{u}\cdot\vec{u}-2\vec{u}\cdot\vec{v}=3\cdot 16-2\cdot 10=34.$$

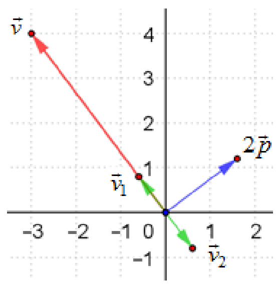
b) Como $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v}) \Rightarrow 10 = 4\cdot 5\cos(\vec{u},\vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{u},\vec{v}) = 60^\circ$.

19. Dados los vectores $\vec{a}$ = (3, y), $\vec{b}$ = (2, –1) determina el valor de y para que:
a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares. b) El módulo de $\vec{a}$ sea doble que el de $\vec{b}$.
c) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tengan la misma dirección.
Solución:
a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares si su producto escalar vale 0:
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \to (3, y)\cdot(2, -1) = 6 - y = 0 \Rightarrow y = 6$.

b) $|\vec{a}| = \sqrt{9+y^2}$; $|\vec{b}| = \sqrt{4+(-1)^2} = \sqrt{5}$.
Si $|\vec{a}| = 2|\vec{b}| \Rightarrow \sqrt{9+y^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow 9+y^2 = 20 \Rightarrow y = \pm\sqrt{11}$.

c) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tiene la misma dirección si sus coordenadas son proporcionales:
$$\vec{a} = k\vec{b} \Rightarrow (3, y) = k\cdot(2, -1) \Rightarrow (3, y) = (2k, -k) \Rightarrow \begin{cases} 3 = 2k \\ y = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 3/2 \\ y = -3/2 \end{cases}.$$
También se podría haber escrito:
$\vec{a}$ = (3, y) y $\vec{b}$ = (2, –1) tienen la misma dirección si $\frac{3}{2} = \frac{y}{-1} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$.

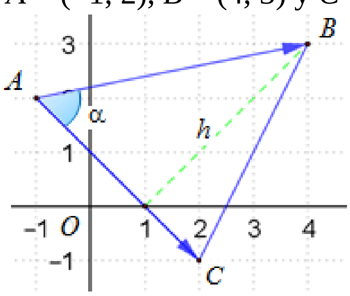
20. Dado el vector $\vec{v}$ = (–3, 4), halla:
a) Los vectores unitarios en la dirección de $\vec{v}$. b) Un vector perpendicular a $\vec{v}$ de módulo 2.
Representa gráficamente los vectores hallados.
Solución:
a) Los vectores unitarios en la dirección de $\vec{v}$ son $\pm\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$.



Como $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$, los vectores unitarios serán:
$$\vec{v}_1 = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \frac{1}{5}\cdot(-3,\ 4) = \left(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right);$$
$$\vec{v}_2 = -\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = -\frac{1}{5}\cdot(-3,\ 4) = \left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right).$$

b) Cualquier vector perpendicular a $\vec{v}$ también lo será a $\vec{v}_1 = \left(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$. Puede valer $\vec{p} = \left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$, aunque éste tiene módulo 1. Por tanto, el vector pedido puede ser $2\vec{p} = \left(\frac{8}{5},\ \frac{6}{5}\right)$.

21. Aplicando el producto escalar halla el área del triángulo de vértices A = (–1, 2), B = (4, 3) y C = (2, –1).
Solución:



El área del triángulo viene dada por $S = \frac{|\overrightarrow{AC}|\cdot h}{2}$.

La altura puede obtenerse de $\sin\alpha = \dfrac{h}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} \Rightarrow h = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \sin\alpha$;

a su vez, el seno de α se deduce conociendo cos α.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son:

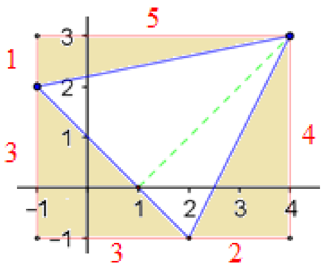
$\overrightarrow{AB}$ = (4, 3) – (–1, 2) = (5, 1); $\overrightarrow{AC}$ = (2, –1) – (–1, 2) = (3, –3).

Como

$$\cos\alpha = \cos\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{15-3}{\sqrt{5^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-3)^2}} = \frac{12}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{18}} = \frac{6}{\sqrt{117}} \Rightarrow$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{6}{\sqrt{117}}\right)^2} = \frac{9}{\sqrt{117}} \to h = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\sin\alpha = \sqrt{26}\cdot\frac{9}{\sqrt{117}} = \sqrt{18} \leftarrow \text{(justifica esto).}$$

Por tanto, el área pedida es: $S = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot h}{2} = \dfrac{\sqrt{18}\cdot\sqrt{18}}{2} = 9\ \text{u}^2$.



Observación: La superficie pedida se puede calcular de manera muy sencilla, si te das cuenta de que puede determinarse restando a un rectángulo tres triángulos. (Haz los cálculos).

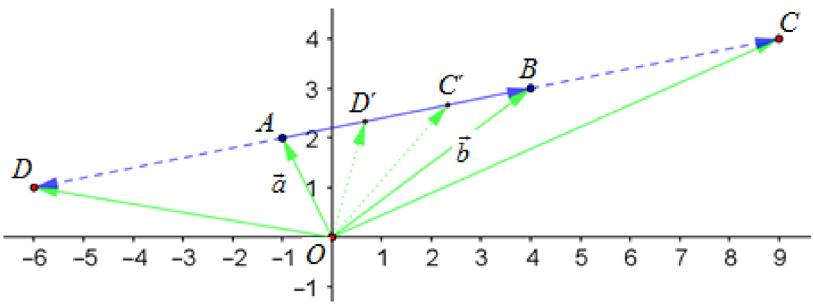
22. Halla, en la dirección del vector de extremos *A* = (–1, 2) y *B* = (4, 3):

a) Un punto *C*, tal que la distancia de *A* a *C* sea doble que la distancia de *B* a *C*.

b) Un punto *D*, tal que la distancia de *A* a *D* sea la mitad que la distancia de *B* a *D*.

Solución:

a) El punto *C* debe cumplir que $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 2\left|\overrightarrow{BC}\right|$.



Al punto *C* puede llegarse así:

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$, donde $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$ = (4, 3) – (–1, 2) = (5, 1).

Por tanto, $\overrightarrow{OC}$ = (4, 3) + (5, 1) = (9, 4).

b) El punto *D* debe cumplir que $2\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$.

Al punto *D* puede llegarse así: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OD}$ = (–1, 2) – (5, 1) = (–6, 1).

Nota: En ambos casos hay otra solución. En el dibujo se indican con las letras *C*´ y *D*´. Búscalas.