

Solución de los Problemas Propuestos

1. Dados los números complejos $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -3 + i$, $z_3 = 2$ y $z_4 = 3i$.

a) Para cada uno de ellos halla su conjugado y su opuesto.

b) Represéntalos (complejos, conjugados y opuestos) en el plano polar.

Solución:

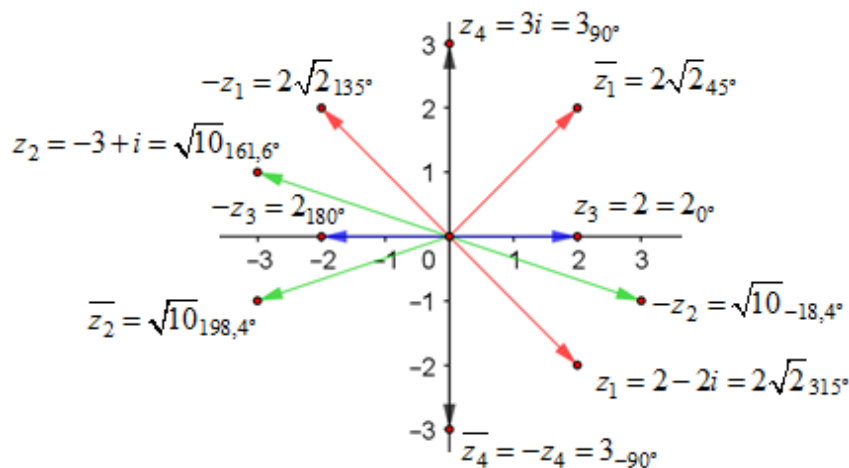
a) $z_1 = 2 - 2i \rightarrow$ conjugado: $\bar{z}_1 = 2 + 2i$; opuesto: $-z_1 = -2 + 2i$.

$z_2 = -3 + i \rightarrow \bar{z}_2 = -3 - i$; $-z_2 = 3 - i$.

$z_3 = 2 \rightarrow \bar{z}_3 = 2$; $-z_3 = -2$.

$z_4 = 3i \rightarrow \bar{z}_4 = -3i$; $-z_4 = -3i$.

b)



2. Para los mismos números complejos $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -3 + i$, $z_3 = 2$ y $z_4 = 3i$, halla sus módulos y argumentos, para ellos y para sus respectivos conjugados y opuestos.

Solución:

El módulo de un número complejo, el de su conjugado y el de su opuesto es el mismo.

Si el argumento de un número complejo es α , el de su conjugado es $-\alpha$ (o $360^\circ - \alpha$); el argumento de su opuesto es $180 + \alpha$ (o $180^\circ - \alpha$). Con esto:

• $z_1 = 2 - 2i \rightarrow$ módulo: $|z_1| = |\bar{z}_1| = |-z_1| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;

argumento: $\alpha_1 = \arctan\left(\frac{-2}{2}\right) = 315^\circ$ (observa que su afijo está en el cuarto cuadrante).

Por tanto: $z_1 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}_{315^\circ}$.

• $z_2 = -3 + i \rightarrow$ módulo: $|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 1} = \sqrt{10}$;

argumento: $\alpha_2 = \arctan\left(\frac{1}{-3}\right) = 161,6^\circ$ (observa que su afijo está en el segundo cuadrante).

Por tanto: $z_2 = -3 + i = \sqrt{10}_{161,6^\circ}$.

• $z_3 = 2 \rightarrow$ módulo: $|z_3| = 2$; argumento: $\alpha_3 = \arctan 0 = 0^\circ$ (afijo en el primer cuadrante)

Por tanto, $z_3 = 2 = 2_{0^\circ}$.

• $z_4 = 3i \rightarrow$ módulo: $|z_4| = 3$; argumento: $\alpha_4 = \arctan\left(\frac{3}{0}\right) = 90^\circ$ (afijo en la parte positiva del eje imaginario) $\Rightarrow z_4 = 3i = 3_{90^\circ}$.

3. Calcula:

a) $(2+3i)-(3-i)$;

b) $3(4-3i)-5i$;

c) $4-2i-3(2-i)$;

d) $2(4-5i)-5(2-2i)$.

Solución:

a) $(2+3i)-(3-i) = 2+3i-3+i = -1+4i$.

b) $3(4-3i)-5i = 12-9i-5i = 12-14i$.

c) $4-2i-3(2-i) = 4-2i-6+3i = -2+i$.

d) $2(4-5i)-5(2-2i) = 8-10i-10+10i = -2$.

4. Calcula:

a) $(2+3i)(3-2i)$;

b) $(-3+i)(-5+2i)$;

c) $(2-3i)^2$;

d) $(4+5i)^2$.

Solución:

a) $(2+3i)(3-2i) = 6-4i+9i-6i^2 = 6+5i+6 = 12+5i$.

b) $(-3+i)(-5+2i) = 15-6i-5i+2i^2 = 15-11i-2 = 13-11i$.

c) $(2-3i)^2 = 4-2\cdot 2\cdot 3i+(3i)^2 = 4-12i-9 = -5-12i$.

d) $(4+5i)^2 = 16+2\cdot 4\cdot 5i+(5i)^2 = 16+40i-25 = -9+40i$.

5. Calcula:

a) $\frac{1-2i}{2-2i}$;

b) $\frac{3+2i}{5-3i}$;

c) $\frac{4}{12-2i}$;

d) $\frac{4-2i}{2i}$;

e) $\frac{5i}{4+3i}$;

f) $\frac{12+2i}{1+6i}$.

Solución:

a) $\frac{1-2i}{2-2i} = \frac{(1-2i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{2+2i-4i-4i^2}{4-4i^2} = \frac{2-2i+4}{4+4} = \frac{6-2i}{8} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$.

b) $\frac{3+2i}{5-3i} = \frac{(3+2i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)} = \frac{15+9i+10i+6i^2}{25+9} = \frac{9+19i}{34} = \frac{9}{34} - \frac{19}{34}i$.

c) $\frac{4}{12-2i} = \frac{4(12+2i)}{(12-2i)(12+2i)} = \frac{48+8i}{12^2+4} = \frac{48}{148} + \frac{8}{148}i = \frac{12}{37} + \frac{2}{37}i$.

d) $\frac{4-2i}{2i} = \frac{(4-2i)\cdot i}{2i\cdot i} = \frac{4i-2i^2}{2i^2} = \frac{4i+2}{-2} = -2i-1 = -1-2i$.

$$e) \frac{5i}{4+3i} = \frac{5i(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{20i-15i^2}{4^2+3^2} = \frac{15+20i}{25} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i.$$

$$f) \frac{12+2i}{1+6i} = \frac{(12+2i)(1-6i)}{(1+6i)(1-6i)} = \frac{12-72i+2i-12i^2}{1+36} = \frac{24-70i}{37} = \frac{24}{37} - \frac{70}{37}i.$$

6. Calcula simplificando el resultado:

$$a) \frac{2-4i}{1+3i} + \frac{4}{i};$$

$$b) \frac{1-2i}{2-2i} \cdot \frac{2-i}{3i};$$

$$c) \frac{2i}{1-i} \cdot \frac{2-i}{3i};$$

$$d) \frac{(2+6i)^2}{2i}.$$

Solución:

$$a) \frac{2-4i}{1+3i} + \frac{4}{i} = (\text{sumando como fracciones ordinarias}) = \frac{(2-4i)i}{(1+3i)i} + \frac{4(1+3i)}{(1+3i)i} =$$

$$= \frac{(8+14i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{-24-8i-42i-14i^2}{9-i^2} = \frac{-10-50i}{10} = -1-5i.$$

$$b) \frac{1-2i}{2-2i} \cdot \frac{2-i}{3i} = \frac{(1-2i)(2-i)}{(2-2i)3i} = \frac{2-i-4i+2i^2}{6i-6i^2} = \frac{-5i}{6+6i} =$$

$$= \frac{-5i(6-6i)}{(6+6i)(6-6i)} = \frac{-30i+30i^2}{6^2+6^2} = \frac{-30-30i}{72} = -\frac{5}{12} - \frac{5}{12}i.$$

$$c) \frac{2i}{1-i} \cdot \frac{2-i}{3i} = \frac{2i(2-i)}{(1-i)3i} = \frac{2(2-i)}{(1-i)3} = \frac{4-2i}{3-3i} = \frac{(4-2i)(3+3i)}{(3-3i)(3+3i)} = \frac{12+12i-6i-6i^2}{3^2+3^2} = \frac{18+6i}{18} = 1 + \frac{1}{3}i.$$

$$d) \frac{(2+6i)^2}{2i} = \frac{4+24i+36i^2}{2i} = \frac{-32+24i}{2i} = \frac{(-32+24i)i}{2i \cdot i} = \frac{-32i+24i^2}{2i^2} = \frac{-24-32i}{-2} = 12+16i.$$

7. Teniendo en cuenta el valor de las potencias de i simplifica la expresión:

$$a) \frac{-2 \cdot i^{18} + i^{99}}{2 + i^{40}};$$

$$b) \frac{3i^{50} + i^{239}}{1 + i^{193}}.$$

Solución:

Recuerda que: $i^{4n} = i^0 = 1$; $i^{4n+1} = i^1 = i$; $i^{4n+2} = i^2 = -1$; $i^{4n+3} = i^3 = -i$.

Por tanto:

$$a) \frac{-2 \cdot i^{18} + i^{99}}{2 + i^{40}} = \frac{-2 \cdot i^{4 \cdot 4 + 2} + i^{4 \cdot 24 + 3}}{2 + i^{4 \cdot 10}} = \frac{-2 \cdot i^2 + i^3}{2 + 1} = \frac{-2(-1) - i}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i.$$

$$b) \frac{3i^{50} + i^{239}}{1 + i^{193}} = \frac{3i^{4 \cdot 12 + 2} + i^{4 \cdot 59 + 3}}{1 + i^{4 \cdot 48 + 1}} = \frac{3i^2 + i^3}{1 + i} = \frac{-3 - i}{1 + i} =$$

$$= \frac{(-3 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-3 + 3i - i + i^2}{1 + 1} = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i.$$

8. Expresa en sus otras formas los siguientes números complejos:

- a) $3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$; b) $3(\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)$; c) $2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$.

Haz su representación gráfica.-

Solución:

a) $3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \rightarrow$ en forma polar: 3_{60° .

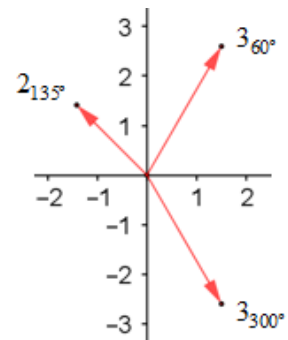
En forma binómica: $3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

b) $3(\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)$ es el conjugado de $3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$.

Sus otras formas son: $3_{-60^\circ} = 3_{300^\circ}$; $\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

c) Forma polar: 2_{135° .

Binómica: $2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.



9. Indica tres números complejos que cumplan la siguiente condición:

- a) Su argumento es 45° ; b) Su módulo es 5; c) Su argumento es 270° .

Representalos gráficamente.

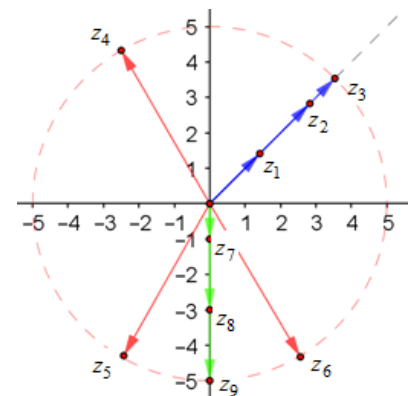
Solución:

Hay infinitas posibilidades. Pueden ser los siguientes:

a) $z_1 = 2_{45^\circ}$; $z_2 = 4_{45^\circ}$; $z_3 = 5_{45^\circ}$. Observa que sus afijos están sobre la semirrecta “positiva” de ecuación $y = x$.

b) $z_4 = 5_{120^\circ}$; $z_5 = 5_{240^\circ}$; $z_6 = 5_{300^\circ}$. Observa que sus afijos están en la circunferencia con centro en $O(0, 0)$ y radio 5.

c) $z_7 = 1_{270^\circ}$; $z_8 = 3_{270^\circ}$; $z_9 = 5_{270^\circ}$. Observa que sus afijos están sobre el eje imaginario negativo.



10. Demuestra la fórmula del producto de números complejos en forma polar: $m_\alpha \cdot n_\beta = (m \cdot n)_{(\alpha + \beta)}$.

Solución:

Como $m_\alpha = m(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ y $n_\beta = n(\cos \beta + i \sin \beta) \Rightarrow$

$$m_\alpha \cdot n_\beta = (m(\cos \alpha + i \sin \alpha))(n(\cos \beta + i \sin \beta)) = (m \cdot n)(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) =$$

$$= (m \cdot n)(\cos \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta + i \sin \alpha \cos \beta + i^2 \sin \alpha \sin \beta) =$$

(por $i^2 = -1$ y agrupando) \rightarrow

$$= (m \cdot n)((\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta)) =$$

(por las fórmulas de seno y coseno de una suma: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$;

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$) \rightarrow

$$= (m \cdot n)(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) = (m \cdot n)_{(\alpha + \beta)}.$$

11. Demuestra la fórmula de la división de números complejos en forma polar: $\frac{m_\alpha}{n_\beta} = \left(\frac{m}{n}\right)_{(\alpha-\beta)}$.

Solución:

Como en el problema anterior:

$$\frac{m_\alpha}{n_\beta} = \frac{m(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{n(\cos \beta + i \sin \beta)} = \left(\frac{m}{n}\right) \cdot \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta - i \sin \beta)}{(\cos \beta + i \sin \beta)(\cos \beta - i \sin \beta)} =$$

(operando y agrupando) \rightarrow

$$= \left(\frac{m}{n}\right) \cdot \frac{(\cos \alpha \cos \beta - i \cos \alpha \sin \beta + i \sin \alpha \cos \beta - i^2 \sin \alpha \sin \beta)}{(\cos \beta)^2 + (\sin \beta)^2} =$$

(por $i^2 = -1$ y aplicando las fórmulas: $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$;

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$; $(\cos \beta)^2 + (\sin \beta)^2 = 1$) \rightarrow

$$= \left(\frac{m}{n}\right) \cdot \frac{(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)}{1} =$$

$$= \left(\frac{m}{n}\right) \cdot (\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)) = \left(\frac{m}{n}\right)_{(\alpha-\beta)}.$$

12. Aplicando la fórmula de Moivre para $n = 2$ obtén las razones trigonométricas del ángulo doble: $\sin(2\alpha)$ y $\cos(2\alpha)$.

Solución:

Para $n = 2$, la fórmula de Moivre dice: $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 = \cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)$.

Si la potencia se hace como un producto:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 = (\cos \alpha)^2 + 2i \cos \alpha \sin \alpha + (i \sin \alpha)^2 = \underbrace{(\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2}_{\cos(2\alpha)} + i \underbrace{(2 \cos \alpha \sin \alpha)}_{\sin(2\alpha)}.$$

Luego,

$$(\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2 + i(2 \cos \alpha \sin \alpha) = \cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha).$$

Igualando las partes real e imaginaria de los dos miembros de la igualdad, se tiene que;

$$\cos(2\alpha) = (\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2 \text{ y } \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

que son las fórmulas buscadas.

13. Calcula y expresa el resultado final en forma binómica:

a) $2_{15^\circ} \cdot 5_{45^\circ}$;

b) $5_{40^\circ} \cdot 4_{50^\circ}$;

c) $8_{90^\circ} : 2_{120^\circ}$;

d) $\frac{10_{300^\circ}}{2_{60^\circ}}$.

Solución:

a) $2_{15^\circ} \cdot 5_{45^\circ} = (2 \cdot 5)_{(15^\circ + 45^\circ)} = 10_{60^\circ} \rightarrow 10_{60^\circ} = 10(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 10\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5 + 5\sqrt{3}i$.

b) $5_{40^\circ} \cdot 4_{50^\circ} = (5 \cdot 4)_{(40^\circ + 50^\circ)} = 20_{90^\circ} = 20i$.

c) $8_{90^\circ} : 2_{120^\circ} = (8 : 2)_{(90^\circ - 120^\circ)} = 4_{(-30^\circ)} = 4_{330^\circ} = 4(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} - 2i$.

d) $\frac{10_{300^\circ}}{2_{60^\circ}} = 5_{240^\circ} \rightarrow 5_{240^\circ} = 5(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = 5\left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$.

14. Teniendo en cuenta que $1_{45^\circ} \cdot 1_{30^\circ} = 1_{75^\circ}$ y que $1_{45^\circ} : 1_{30^\circ} = 1_{15^\circ}$ halla los valores de:

a) $\sin 75^\circ$ y $\cos 75^\circ$;

b) $\sin 15^\circ$ y $\cos 15^\circ$.

Solución:

a) Por una parte se tiene que:

$$\begin{aligned} 1_{45^\circ} \cdot 1_{30^\circ} &= (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i + \frac{\sqrt{6}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}i^2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i. \end{aligned}$$

Por otra parte, $1_{45^\circ} \cdot 1_{30^\circ} = 1_{75^\circ} = \cos 75^\circ + i \sin 75^\circ$.

Igualando las partes reales e imaginarias de ambas expresiones se obtiene:

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}; \quad \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

b) Por una parte se tiene que:

$$\begin{aligned} 1_{45^\circ} : 1_{30^\circ} &= \frac{\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ}{\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i}{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)i}{1} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)i. \end{aligned}$$

Por otra parte, $1_{45^\circ} : 1_{30^\circ} = 1_{15^\circ} = \cos 15^\circ + i \sin 15^\circ$.

Igualando las partes reales e imaginarias de ambas expresiones se obtiene:

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}; \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Nota: Idéntico resultado se obtuvo en el Tema 6 (Ejercicio 2) por otro procedimiento.

15. Cuando se multiplica un número complejo $z = m_\alpha$ por $i = 1_{90^\circ}$, $m_\alpha \cdot 1_{90^\circ} = m_{(\alpha+90^\circ)}$, se produce un giro de 90° , con centro en O , del vector representante de z . Si el triángulo de vértices $A(2, 1)$, $B(1, 3)$ y $C(-2, -2)$ se gira 90° con centro en O , ¿cuáles serían sus vértices?

Solución:

Los puntos $A(2, 1)$, $B(1, 3)$ y $C(-2, -2)$ son los afijos de los números complejos:

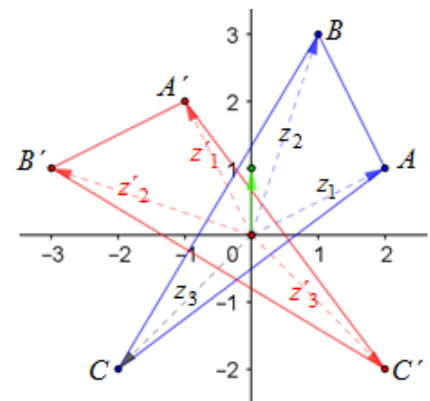
$$z_1 = 2 + i; \quad z_2 = 1 + 3i; \quad z_3 = -2 - 2i.$$

Multiplicando esos números complejos por i se obtienen los vértices A' , B' y C' del triángulo girado 90° .

$$A' \rightarrow z'_1 = z_1 \cdot i = (2 + i) \cdot i = 2i + i^2 = -1 + 2i;$$

$$B' \rightarrow z'_2 = z_2 \cdot i = (1 + 3i) \cdot i = i + 3i^2 = -3 + i;$$

$$C' \rightarrow z'_3 = z_3 \cdot i = (-2 - 2i) \cdot i = -2i - 2i^2 = 2 - 2i.$$



16. Aplicando el desarrollo de un binomio y el valor de las sucesivas potencias de i , calcula:

- a) $(3+2i)^3$; b) $(1+i)^4$;
 c) $(3-2i)^5$; d) $(1+\sqrt{3}i)^6$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } (3+2i)^3 &= \binom{3}{0} \cdot 3^3 + \binom{3}{1} \cdot 3^2 \cdot (2i) + \binom{3}{2} \cdot 3 \cdot (2i)^2 + \binom{3}{3} \cdot (2i)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot (2i) + 3 \cdot 3 \cdot 4i^2 + 8i^3 = \\ &= 27 + 54i + 36i^2 + 8i^3 = 27 + 54i - 36 - 8i = -9 + 46i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (1+i)^4 &= \binom{4}{0} 1^4 + \binom{4}{1} \cdot 1^3 \cdot i + \binom{4}{2} \cdot 1^2 \cdot i^2 + \binom{4}{3} \cdot 1 \cdot i^3 + \binom{4}{4} \cdot i^4 = \\ &= 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (3-2i)^5 &= \binom{5}{0} 3^5 - \binom{5}{1} \cdot 3^4 \cdot (2i) + \binom{5}{2} \cdot 3^3 \cdot (2i)^2 - \binom{5}{3} \cdot 3^2 \cdot (2i)^3 + \binom{5}{4} \cdot 3 \cdot (2i)^4 - \binom{5}{5} \cdot (2i)^5 = \\ &= 243 - 5 \cdot 81 \cdot (2i) + 10 \cdot 27 \cdot 4i^2 - 10 \cdot 9 \cdot 8i^3 + 5 \cdot 3 \cdot 16i^4 - 32i^5 = \\ &= 243 - 810i - 1080 + 720i + 240 - 32i = -597 - 122i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (1+\sqrt{3}i)^6 &= (\text{en el desarrollo se omite el factor } 1) = \\ &= \binom{6}{0} + \binom{6}{1} \cdot (\sqrt{3}i) + \binom{6}{2} \cdot (\sqrt{3}i)^2 + \binom{6}{3} \cdot (\sqrt{3}i)^3 + \binom{6}{4} \cdot (\sqrt{3}i)^4 + \binom{6}{5} \cdot (\sqrt{3}i)^5 + \binom{6}{6} \cdot (\sqrt{3}i)^6 = \\ &= 1 + 6 \cdot \sqrt{3}i + 15 \cdot 3i^2 + 20 \cdot 3\sqrt{3}i^3 + 15 \cdot 9i^4 + 6 \cdot 9\sqrt{3}i^5 + 27i^6 = \\ &= 1 + 6\sqrt{3}i - 45 - 60\sqrt{3}i + 135 + 54\sqrt{3}i - 27 = 64. \end{aligned}$$

17. Expresa en forma polar los números complejos $z_1 = 1+i$ y $z_2 = 1+\sqrt{3}i$. Calcula nuevamente las potencias $(1+i)^4$ y $(1+\sqrt{3}i)^6$ del problema anterior.

Solución:

a) Para $z_1 = 1+i$ se tiene:

$$m_1 = |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}; \quad \alpha_1 = \arctan \frac{1}{1} = 45^\circ.$$

Por tanto, $z_1 = 1+i = \sqrt{2}_{45^\circ}$.

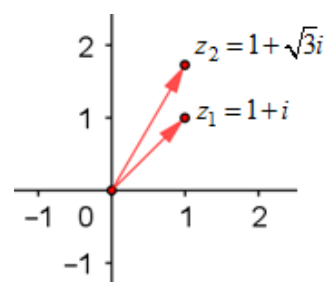
Con esto,

$$(1+i)^4 = (\sqrt{2}_{45^\circ})^4 = (\sqrt{2})^4_{(4 \cdot 45^\circ)} = 4_{180^\circ} = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(-1) = -4.$$

$$\text{b) Si } z_2 = 1+\sqrt{3}i \Rightarrow m_2 = |z_2| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2; \quad \alpha_2 = \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{1} \right) = 60^\circ.$$

Por tanto, $z_2 = 1+\sqrt{3}i = 2_{60^\circ}$.

$$\text{Luego, } (1+\sqrt{3}i)^6 = (2_{60^\circ})^6 = 2^6_{(6 \cdot 60^\circ)} = 64_{360^\circ} = 64(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ) = 64(1) = 64.$$



b) El número $2 - 2i$ tiene: módulo $m = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$; y argumento $\alpha = \arctan\left(\frac{-2}{2}\right) = 315^\circ$.

Por tanto, $2 - 2i = \sqrt{8}_{315^\circ+k \cdot 360^\circ}$.

Luego:

$$\sqrt[3]{2 - 2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{(315^\circ+k \cdot 360^\circ)}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}_{\left(\frac{315^\circ+k \cdot 360^\circ}{3}\right)} = \sqrt{2}_{\left(\frac{315^\circ+k \cdot 360^\circ}{3}\right)}.$$

Dando a k los valores 0, 1 y 2 se obtienen las raíces: $z_1 = \sqrt{2}_{105^\circ}$, $z_2 = \sqrt{2}_{225^\circ}$ y $z_3 = \sqrt{2}_{345^\circ}$.

→ Observa que $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$.

c) La forma polar de i es: $i = 1_{90^\circ+k \cdot 360^\circ}$, luego:

$$\sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{1_{(90^\circ+k \cdot 360^\circ)}} = 1_{\left(\frac{90^\circ+k \cdot 360^\circ}{4}\right)}.$$

Dando a k los valores 0, 1, 2 y 3 se obtienen las raíces:

$$z_1 = 1_{22,5^\circ}, z_2 = 1_{112,5^\circ}, z_3 = 1_{202,5^\circ} \text{ y } z_4 = 1_{292,5^\circ}.$$

d) El número $-8\sqrt{3} + 8i$ tiene:

$$\text{módulo } m = \sqrt{(-8\sqrt{3})^2 + 8^2} = \sqrt{256} = 16; \text{ y argumento } \alpha = \arctan\left(\frac{8}{-8\sqrt{3}}\right) = 150^\circ.$$

Por tanto, $-8\sqrt{3} + 8i = 16_{150^\circ+k \cdot 360^\circ}$.

Luego,

$$\sqrt[4]{-8\sqrt{3} + 8i} = \sqrt[4]{16_{150^\circ+k \cdot 360^\circ}} = \sqrt[4]{16}_{\left(\frac{150^\circ+k \cdot 360^\circ}{4}\right)} = 2_{\left(\frac{150^\circ+k \cdot 360^\circ}{4}\right)}.$$

Dando a k los valores 0, 1, 2 y 3 se obtienen las raíces:

$$z_1 = 2_{37,5^\circ}, z_2 = 2_{127,5^\circ}, z_3 = 2_{217,5^\circ} \text{ y } z_4 = 2_{307,5^\circ}.$$

e) La forma polar de -1 es: $-1 = 1_{180^\circ+k \cdot 360^\circ}$, luego:

$$\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{(180^\circ+k \cdot 360^\circ)}} = 1_{\left(\frac{180^\circ+k \cdot 360^\circ}{6}\right)}.$$

Dando a k los valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5 se obtienen las raíces:

$$z_1 = 1_{30^\circ}, z_2 = 1_{90^\circ}, z_3 = 1_{150^\circ}, z_4 = 1_{210^\circ},$$

$$z_5 = 1_{270^\circ} \text{ y } z_6 = 1_{330^\circ}.$$

f) Como $z = 2\sqrt{3} + 2i = 4_{30^\circ} = 4_{30^\circ+k \cdot 360^\circ}$, se tendrá que

$$\sqrt{2\sqrt{3} + 2i} = \sqrt{4_{(30^\circ+k \cdot 360^\circ)}} = 2_{\left(\frac{30^\circ+k \cdot 360^\circ}{2}\right)}.$$

Dando a k los valores 0 y 1 se obtienen las raíces: $z_1 = 2_{15^\circ}$ y $z_2 = 2_{195^\circ}$.

20. Calcula las soluciones complejas de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 9 = 0;$

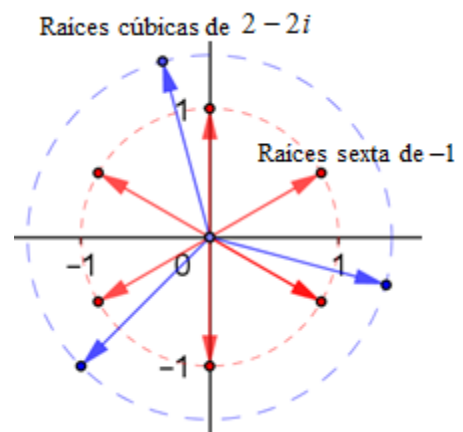
b) $x^2 - 2x + 5 = 0;$

c) $x^2 + 2x + 10 = 0;$

d) $x^2 - 4x + 13 = 0.$

Solución:

a) $x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \sqrt{-9} \Rightarrow x = \pm 3i.$



b) Aplicando la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = \begin{cases} 1 + 2i \\ 1 - 2i \end{cases}$$

$$c) x^2 + 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = \begin{cases} -1 - 3i \\ -1 + 3i \end{cases}$$

$$d) x^2 - 4x + 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = \begin{cases} 2 - 3i \\ 2 + 3i \end{cases}$$

Observaciones:

1. Las raíces complejas de una ecuación de segundo grado son conjugadas.

2. En general, si una ecuación con coeficientes reales tiene a un número complejo por raíz, también es raíz el conjugado de dicho número.

21. Resuelve las ecuaciones:

$$a) \frac{-z + 3iz - 12}{z} = 3z + 3i - 1;$$

$$b) 2z^2 + 3iz + 2 = 0.$$

Solución:

a) Operando se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{-z + 3iz - 12}{z} = 3z + 3i - 1 &\Rightarrow -z + 3iz - 12 = 3z^2 + 3iz - z \Rightarrow -12 = 3z^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow z^2 = -4 \Rightarrow z = \sqrt{-4} \Rightarrow z = \pm 2i. \end{aligned}$$

b) Aplicando la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado:

$$2z^2 + 3iz + 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{-3i \pm \sqrt{(3i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-3i \pm \sqrt{-9 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} = \frac{-3i \pm \sqrt{-25}}{4} = \frac{-3i \pm 5i}{4} \begin{cases} -2i \\ i/2 \end{cases}$$

22. Halla una ecuación de segundo grado que tenga por raíces $z_1 = 2 - i$ y $z_2 = 2 + i$.

Solución:

Vale cualquier expresión del tipo $k \cdot (z - (2 - i))(z - (2 + i)) = 0$, con $k \neq 0$.

Haciendo $k = 1$, multiplicando y simplificando, se obtiene:

$$(z - (2 - i))(z - (2 + i)) = 0 \Rightarrow z^2 - 2z - iz - 2z + 4 + 2i + iz - 2i - i^2 = 0 \Rightarrow z^2 - 4z + 5 = 0.$$

23. Encuentra una ecuación que tenga por raíces $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 - 2i$, $z_3 = -1$ y $z_4 = 2$.

Solución:

Vale cualquier expresión del tipo $k \cdot (z - (1 + 2i))(z - (1 - 2i))(z + 1)(z - 2) = 0$, con $k \neq 0$.

Haciendo $k = 1$, multiplicando y simplificando, se obtiene:

$$\begin{aligned} (z - (1 + 2i))(z - (1 - 2i))(z + 1)(z - 2) &= 0 \Rightarrow \\ (z^2 - z + 2iz - z + 1 - 2i - 2iz + 2i - 4i^2)(z^2 - z - 2) &= 0 \Rightarrow \\ (z^2 - 2z + 5)(z^2 - z - 2) &= 0 \Rightarrow z^4 - 3z^3 + 5z^2 - z - 10 = 0. \end{aligned}$$

24. Halla las soluciones reales y complejas de las ecuaciones:

a) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$; b) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$.

En cada caso, comprueba el resultado para una de las soluciones.

Solución:

Son ecuaciones bicuadradas. Se hace el cambio $x^2 = t$ en a) y $z^2 = t$ en b).

$$\text{a) } x^4 + 10x^2 + 9 = 0 \rightarrow t^2 + 10t + 9 = 0 \Rightarrow t = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{-10 \pm 8}{2} = \begin{cases} -9 \\ -1 \end{cases}.$$

$$\text{Para } t = -9 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \sqrt{-9} = \begin{cases} -3i \\ 3i \end{cases}.$$

$$\text{Para } t = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{-1} = \begin{cases} -i \\ i \end{cases}.$$

Puede comprobarse, por ejemplo, que $x = -3i$ es solución.

En efecto, sustituyendo en $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ se tiene:

$$(-3i)^4 + 10(-3i)^2 + 9 = 81i^4 + 10 \cdot 9i^2 + 9 = 81 - 90 + 9 = 0.$$

$$\text{b) } z^4 + 5z^2 + 4 = 0 \rightarrow t^2 + 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} -4 \\ -1 \end{cases}.$$

$$\text{Para } t = -4 \Rightarrow z^2 = -4 \Rightarrow z = \sqrt{-4} = \begin{cases} -2i \\ 2i \end{cases}. \text{ Para } t = -1 \Rightarrow z^2 = -1 \Rightarrow z = \sqrt{-1} = \begin{cases} -i \\ i \end{cases}.$$

Puede comprobarse, por ejemplo, que $z = 2i$ es solución.

En efecto, sustituyendo en $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$ se tiene:

$$(2i)^4 + 5(2i)^2 + 4 = 16i^4 + 5 \cdot 4i^2 + 4 = 16 - 20 + 4 = 0.$$

25. Halla las soluciones reales y complejas de las ecuaciones:

a) $x^3 + 4x = 0$; b) $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$.

En cada caso, comprueba el resultado para una de las soluciones complejas.

Solución:

$$\text{a) Sacando factor común: } x^3 + 4x = 0 \rightarrow x(x^2 + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2i \end{cases}.$$

b) Se busca una raíz entera; si la hay, será divisor del término independiente, de 8.

Vale $x = 2$, pues: $2^3 - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 8 = 0 \Rightarrow (x - 2)$ es un factor de la ecuación.

Dividendo por Ruffini:

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 4) = 0.$$

→ Las otras soluciones son las de $x^2 + 4 = 0$, que son $x = -2i$ y $x = 2i$.

