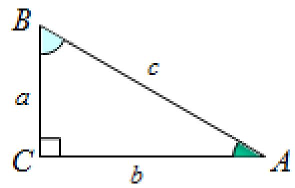
# TEMA 7. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

## 1. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo rectángulo consiste en hallar las medidas de sus elementos (lados y ángulos) desconocidos.
Para ello se utilizan las siguientes relaciones:

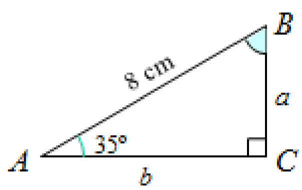



- Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$
- Los ángulos agudos son complementarios: $A + B = 90^{\circ}$
- Las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, que valen:

$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B; \quad \cos A = \frac{b}{c} = \sin B; \quad \tan A = \frac{a}{b}; \ \tan B = \frac{b}{a}.$$

Observaciones:
1. Resulta evidente que el seno de un ángulo es igual al coseno de su ángulo complementario.
2. Los vértices (y los ángulos correspondientes) de cualquier triángulo suelen denotarse con las letras mayúsculas *A*, *B* y *C*; los lados opuestos a esos vértices con las letras minúsculas *a*, *b* y *c*, respectivamente.
3. En un triángulo rectángulo se conoce siempre el valor del ángulo recto.
4. El triángulo queda determinado cuando se conoce, además, al menos, dos de sus elementos, uno de los cuales ha de ser un lado.

**Ejemplos**:
a) De un triángulo rectángulo se conoce su hipotenusa $c$ = 8 cm y el ángulo $A = 35^{\circ}$. Entonces, los demás elementos valdrán:

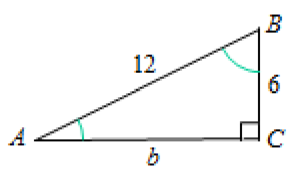



$$\sin 35^{\circ} = \frac{a}{8} \Rightarrow a = 8 \cdot \sin 35^{\circ} = 8 \cdot 0,5736 = 4,5888 \text{ cm}.$$

$$\cos 35^{\circ} = \frac{b}{8} \Rightarrow b = 8 \cdot \cos 35^{\circ} = 8 \cdot 0,8192 = 6,5536 \text{ cm}.$$

$B = 90^{\circ} - 35^{\circ} = 55^{\circ}$.

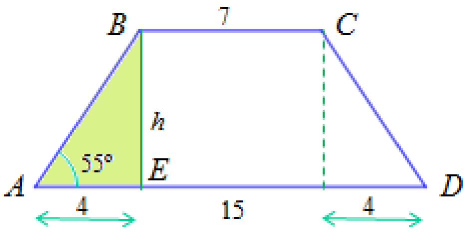
b) De un triángulo rectángulo se conoce su hipotenusa $c$ = 12 cm y el cateto $a$ = 6 cm. Entonces, los demás elementos valdrán:




$$b = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$$

$$\sin A = \frac{6}{12} = 0,5 \Rightarrow A = \arcsin 0,5 = 30^{\circ} \Rightarrow B = 60^{\circ}.$$

**Ejercicio 1**
Las bases de un trapecio isósceles miden 15 y 7 cm. Si el ángulo agudo vale 55º, halla el área de ese trapecio.




Solución:
La proyección del vértice *B* sobre la base *AD* determina un triángulo rectángulo, *ABE*, con cateto *AE* = 4 cm.

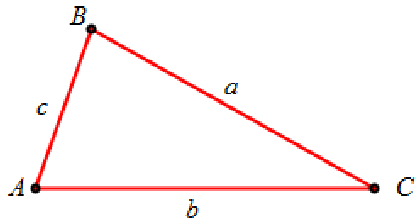
Como $\tan 55^{\circ} = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 4\tan 55^{\circ} = 4 \cdot 1,4281... \approx 5,7126$.

Luego, el área del trapecio será: $S = \frac{(15+7) \cdot 5,7126}{2} = 56,8986 \text{ cm}^2$.

## 2. RESOLUCIÓN DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA

Resolver un triángulo es determinar sus seis elementos (la longitud de sus tres lados y la amplitud de sus tres ángulos) a partir de solo tres de ellos, uno de los cuales ha de ser un lado.

Para resolver un triángulo cualquiera se utilizan las siguientes relaciones:
1. Los tres ángulos de un triángulo suman 180º.
2. El teorema del seno.
3. El teorema del coseno.

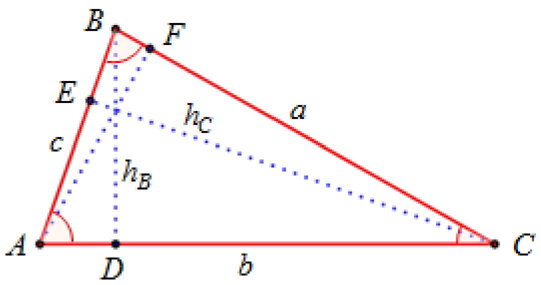



**Teorema del seno**

El teorema del seno dice lo siguiente:

"En todo triángulo *ABC* se cumple: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$" .

La demostración más sencilla de este teorema es la siguiente.




Si se trazan las alturas desde *B* y *C*, $h_B$ y $h_C$, respectivamente, se obtiene triángulos rectángulos con hipotenusas los lados del triángulo inicial y ángulos rectos en *D* y *E*.

→ En el triángulo *ABD*: $\sin A=\dfrac{h_B}{c}\Rightarrow h_B=c\cdot\sin A$.

→ En el triángulo *CBD*: $\sin C=\dfrac{h_B}{a}\Rightarrow h_B=a\cdot\sin C$.

Igualando: $h_B=c\cdot\sin A=a\cdot\sin C\Rightarrow\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$.

Aplicando el mismo razonamiento a los triángulos que determina $h_C$, *AEC* y *BEC*, se tiene:

$$\sin A=\frac{h_C}{b}\Rightarrow h_C=b\cdot\sin A;\quad \sin B=\frac{h_C}{a}\Rightarrow h_C=a\cdot\sin B\quad\Rightarrow\quad\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

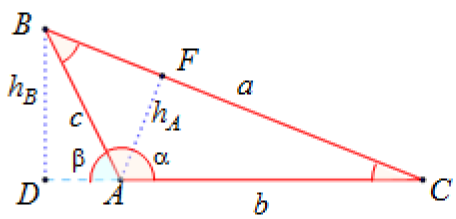
En consecuencia, se cumple que: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

Observación: si el triángulo fuese obtusángulo habría que tener en cuenta que el seno de un ángulo es igual al de su suplementario (α + β = 180º).

En los triángulos *DBC* y *ABD*:

$$\sin C=\frac{h_B}{a};\ \sin A=\sin\alpha=\sin\beta=\frac{h_B}{c}\ \Rightarrow\ \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

Utilizando $h_A$ se obtiene la otra igualdad.




**Ejemplo**:

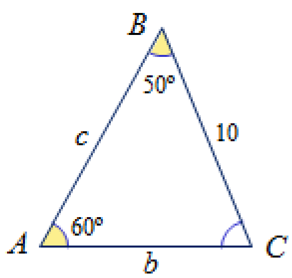
Si en el triángulo *ABC* se sabe que *a* =10 cm, *A* = 60º y *B* = 50º, los demás elementos pueden hallarse como sigue:

→ Como $A+B+C=180º$ ⇒ *C* = 180º – 60º – 50º = 70º.

→ Aplicando el teorema:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{10}{\sin 60º}=\frac{b}{\sin 50º}=\frac{c}{\sin 70º}\Rightarrow$$

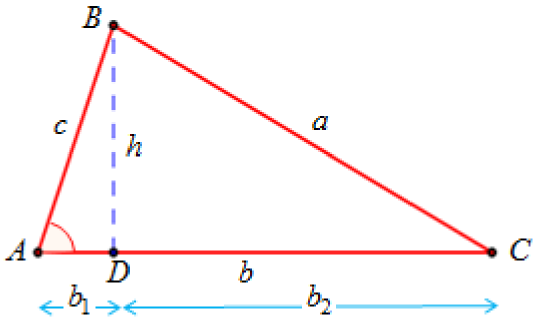
$$\Rightarrow b=\frac{10\cdot\sin 50º}{\sin 60º}=8{,}85\text{ cm};\ c=\frac{10\cdot\sin 70º}{\sin 60º}=10{,}85\text{ cm}.$$



## Teorema del coseno

Este teorema, a veces, se llama "teorema de Pitágoras generalizado": Dice lo siguiente:
"En un triángulo cualquiera, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que forman".
Esto es, se cumplen las relaciones:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A; \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos B; \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C \quad .$$




Vamos a demostrar la primera de esas relaciones:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$$

→ Se traza la altura desde *B*, que genera dos triángulos rectángulos, *ABD* y *BDC*, y divide a la base *b* en dos partes de longitudes $b_1$ y $b_2$.

Por Pitágoras,

→ en *BDC* se cumple: $a^2 = h^2 + b_2^{\,2}$ [1]

→ en *ABD* se cumple: $h^2 = c^2 - b_1^{\,2}$ [2]

Sustituyendo [2] en [1] se tiene: $a^2 = c^2 - b_1^{\,2} + b_2^{\,2}$ [3]

Como $b_2 = b - b_1 \Rightarrow b_2^{\,2} = (b - b_1)^2 = b^2 + b_1^{\,2} - 2bb_1$, que al sustituir en [3] se obtiene:

$$a^2 = c^2 - b_1^{\,2} + \left(b^2 + b_1^{\,2} - 2bb_1\right) \Rightarrow a^2 = c^2 + b^2 - 2bb_1 \quad [4]$$

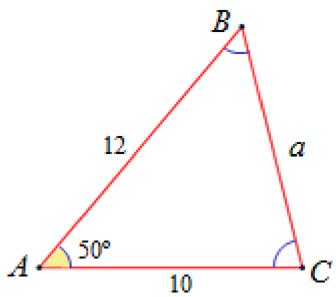
Por último, como en el triángulo *ABD*, $\cos A = \dfrac{b_1}{c} \Rightarrow b_1 = c\cdot\cos A$, sustituyendo en [4], se tiene la igualdad buscada: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$

**Ejemplos**:

a) Si en el triángulo *ABC* se sabe que *b* =10 cm, *c* = 12 cm y *A* = 50º, los demás elementos pueden hallarse como sigue:

→ Por el teorema del coseno:

$$a^2 = 10^2 + 12^2 - 2\cdot 10\cdot 12\cdot\cos 50^\circ \Rightarrow a^2 = 89,731 \Rightarrow a = 9,47 \text{ cm.}$$




→ Por el teorema del seno:

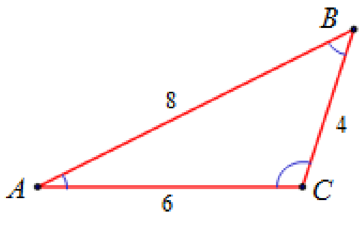
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{9,47}{\sin 50^\circ} = \frac{10}{\sin B} = \frac{12}{\sin C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin B = \frac{10\cdot\sin 50^\circ}{9,47} = 0,8089 \Rightarrow B = \arcsin 0,8089 = 53,99^\circ .$$

El ángulo *C* se puede obtener de manera análoga, pero es más rápido aplicar que $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow C$ = 76,01º.

b) Si del triángulo *ABC* se sabe que sus lados miden 4, 6 y 8 cm, entonces, sus ángulos pueden hallarse como sigue:

→ Si se supone que *a* = 4, *b* = 6 y *c* = 8 cm, entones, por el teorema del coseno:




$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C \rightarrow 8^2 = 4^2 + 6^2 - 2\cdot 4\cdot 6\cdot\cos C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64 = 16 + 36 - 48\cdot\cos C \Rightarrow 12 = -48\cos C \Rightarrow \cos C = -0,25$$

$$\Rightarrow C = \arccos(-0,25) = 104,48^\circ .$$

→ Ahora puede aplicarse el teorema del seno:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{4}{\sin A} = \frac{8}{\sin 104,48^\circ} \Rightarrow \sin A = \frac{4\cdot\sin 104,48^\circ}{8} = 0,4841 \Rightarrow A = 28,95^\circ .$$

Por tanto, $B = 180^\circ - 28,95^\circ - 104,48^\circ = 46,57^\circ$ .

## 3. ALGUNOS CASOS QUE PUEDEN PRESENTARSE

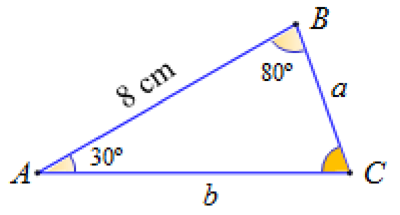
Dependiendo de los datos que se conozcan del triángulo se pueden presentar distintos casos. Aquí los concretaremos en los siguientes.

**Caso I: Se conocen dos ángulos y un lado**

- Por ejemplo, se conocen los ángulos *A*, *B* y el lado *c*.

El ángulo *C* se encuentra aplicando *A* + *B* + *C* = 180º.

Los lados *b* y *c*, despejando en: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$




**Ejemplo**:

Si se conocen: *A* = 30º, *B* = 80º y *c* = 8 cm.

→ Aplicando que *A* + *B* + *C* = 180º ⇒ *C* = 180º – 30º – 80º = 70º.

→ Sustituyendo los valores conocidos en $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin 30^o}=\frac{b}{\sin 80^o}=\frac{8}{\sin 70^o} \Rightarrow$

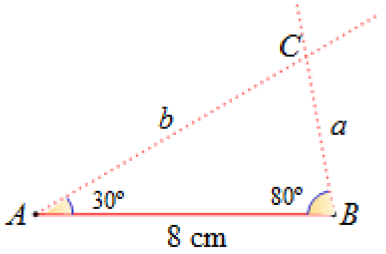
$$\Rightarrow a=\frac{8\cdot\sin 30^o}{\sin 70^o}=4,26 \text{ cm}; \quad b=\frac{8\cdot\sin 80^o}{\sin 70^o}=8,38 \text{ cm}.$$

<u>Observación</u>: Es conveniente construir (con cierta precisión) el triángulo que hay que resolver. Puede conseguirse con una regla y un compás; o a mano alzada, de manera menos precisa. Así lo iremos haciendo en los ejemplos que propongamos. Al dibujar, debe tenerse en cuenta que los lados *a*, *b* y *c* están enfrentados a los ángulos *A*, *B* y *C*, respectivamente.

En el caso anterior se procede como sigue:

1. Se traza un segmento de longitud 8.
2. En sus extremos se miden ángulos de amplitud 30º y 80º.

(Se obtiene un triángulo, "volteado" del de arriba).



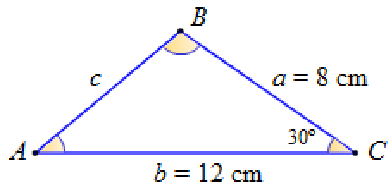

**Caso II: Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos**

- Por ejemplo, se conocen los lados *a*, *b* y el ángulo *C*.

El lado *c* se encuentra aplicando $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$.

El ángulo *A*, despejando en: $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$.

El ángulo *B* se encuentra aplicando *A* + *B* + *C* = 180º.




**Ejemplo**:

Si se conocen: *a* = 8 cm, *b* = 12 cm y *C* = 35º.

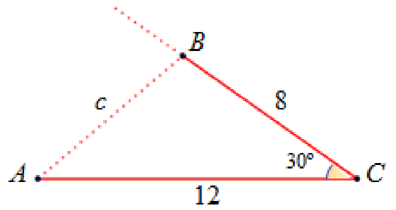
→ Aplicando que $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C \Rightarrow$

$$c^2=8^2+12^2-2\cdot 8\cdot 12\cdot\cos 35^o \Rightarrow c^2=50,72 \Rightarrow c=7,12 \text{ cm}.$$

→ Como $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{8}{\sin A}=\frac{7,12}{\sin 35^o} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin A=\frac{8\cdot\sin 35^o}{7,12}=0,6445 \Rightarrow A=\arcsin 0,6445=40,13^o.$$

→ El ángulo *C* = 180º – 35º – 40,13º = 104,87º.




<u>Para dibujar el triángulo</u>: 1. Se traza un segmento *AC* = *b*, de longitud 12.
2. En el extremo *C* se abre un lado con ángulo de amplitud 30º; y sobre ese lado se mide un segmento de longitud 8. Así se obtiene el tercer vértice, *B*, del triángulo.

## Caso III: Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

- Por ejemplo, se conocen los lados *a*, *b* y el ángulo *A*.

Para resolverlo se comienza aplicando el teorema del seno: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$

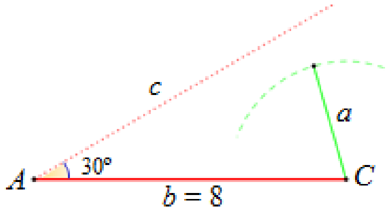
El problema puede tener dos soluciones, una o ninguna, pues hay que tener en cuenta que *B* puede tomar dos valores. Por tanto, el ángulo *C* también puede tomar dos valores; y lo mismo pasará con el lado *c*.

→ A continuación, para *b* = 8 cm, *A* = 30º y *a* variable, se hace un estudio gráfico del problema. Para ello, en este caso, se procede como sigue:
1. Se traza un segmento *AC* = *b* de longitud 8.
2. En el extremo *A* se abre un ángulo de amplitud 30º, sobre el que reposará el lado *c*.
3. Por último, con centro en *C* y radio *a* se traza un arco buscando al lado *c*, pudiendo suceder…

<u>Caso sin solución</u>:
Se da cuando *a* es demasiado corto: no alcanza a tocar el lado *c*.
Por ejemplo, si *a* = 3 cm se tendría:

$$\frac{3}{\sin 30^{\circ}}=\frac{8}{\sin B} \Rightarrow \sin B=\frac{8\cdot\sin 30^{\circ}}{3}=1,33$$, que es imposible

(Recuerda que el seno no puede ser mayor que 1).



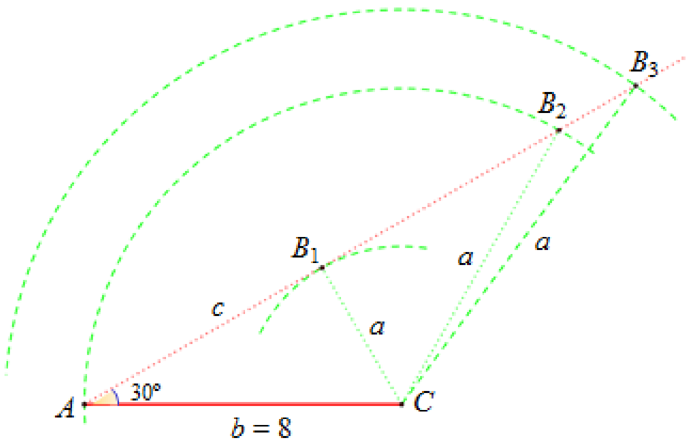

<u>Caso con solución única</u>: hay dos opciones.
1. El lado *a* mide lo justo para llegar "tangentemente" al lado *c*. Se obtendría el triángulo $AB_1C$, rectángulo en $B_1$. En este ejemplo se consigue si *a* = 4.
En efecto:

$$\frac{4}{\sin 30^{\circ}}=\frac{8}{\sin B} \Rightarrow \sin B=\frac{8\cdot\sin 30^{\circ}}{4}=1$$

$\Rightarrow B_1 = 90^{\circ}$.

2. El lado *a* es mayor o igual que *b*.
→ En el caso de que *a* = *b* se obtendría el triángulo isósceles $AB_2C$.
En efecto, si *a* = *b* = 8 cm:

$$\frac{8}{\sin 30^{\circ}}=\frac{8}{\sin B} \Rightarrow B_2 = 30^{\circ}.$$




→ Si *a* > *b* se obtendría el triángulo $AB_3C$.

Así, para *a* = 10 cm: $\frac{10}{\sin 30^{\circ}}=\frac{8}{\sin B} \Rightarrow \sin B=\frac{8\cdot\sin 30^{\circ}}{10}=0,4 \Rightarrow B_3 = 23,58^{\circ}$.

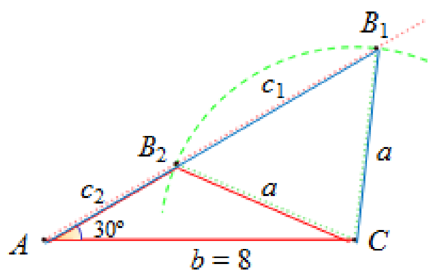
(La solución $B_3 = 156,42^{\circ}$ no es viable).

<u>Caso con solución doble</u>:
Se da cuando la longitud de *a* está entre los dos supuestos anteriores (llega a tocar al lado *c*, pero mide menos que *b*). En el ejemplo estudiado, cuando 4 < *a* < 8. Así, para *a* = 5 cm:

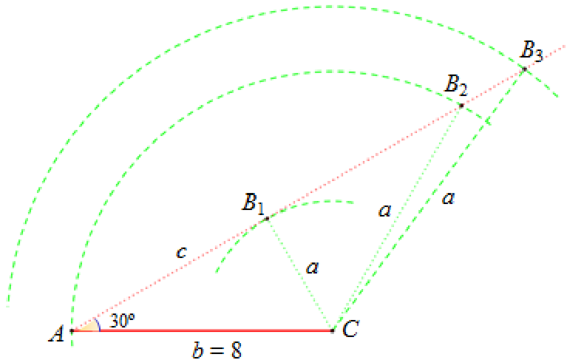
$$\frac{5}{\sin 30^{\circ}}=\frac{8}{\sin B} \Rightarrow \sin B=\frac{8\cdot\sin 30^{\circ}}{5}=0,8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=\arcsin 0,8 \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 53,13^{\circ} \\ B_2 = 126,87^{\circ} \end{cases}.$$

Se obtendrían los triángulos $AB_1C$ y $AB_2C$.



**Ejemplos**:
Las soluciones completas del ejemplo anterior son las que siguen:
Con solución única:
a) Para $b$ = 8 cm, $A$ = 30º y $a$ = 4 cm.
Se obtendría el triángulo $AB_1C$, con $B_1$ = 90º.
En consecuencia:
$C$ = 60º; $c=\sqrt{8^2-4^2}=\sqrt{48}=6,93$ cm.

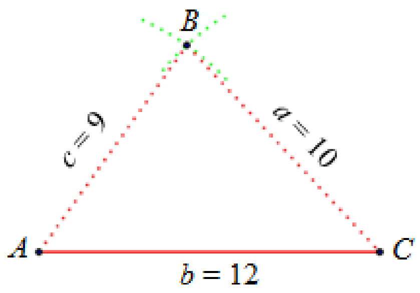



b) Para $b$ = 8 cm, $A$ = 30º y $a$ = 8 cm.
Se obtiene el triángulo isósceles $AB_2C$, con
$B_2$ = 30º (o $B_2$ = 150º, que no es posible).
En consecuencia: $C$ = 120º.
Aplicando $\frac{8}{\sin 30^\circ}=\frac{c}{\sin 120^\circ} \Rightarrow c=\frac{8\cdot\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}=13,86$ cm.

c) Para $b$ = 8 cm, $A$ = 30º y $a$ = 10 cm.
Se obtiene el triángulo $AB_3C$, con $B_3$ = 23,58º.
En consecuencia: $C$ = 126,42º.
Aplicando $\frac{10}{\sin 30^\circ}=\frac{c}{\sin 126,42^\circ} \Rightarrow c=\frac{10\cdot\sin 126,42^\circ}{\sin 30^\circ}=16,09$ cm.

Con solución doble:
d) Para $b$ = 8 cm, $A$ = 30º y $a$ = 5 cm.
Se obtendrían los triángulos $AB_1C$ y $AB_2C$, con $B_1$ = 53,13º o $B_2$ = 126,87º.
Si $B_1$ = 53,13º ⇒ $C_1$ = 96,87º. Aplicando $\frac{5}{\sin 30^\circ}=\frac{c_1}{\sin 96,87^\circ} \Rightarrow c_1=11,91$ cm.
Si $B_2$ = 126,87º ⇒ $C_2$ = 23,13º. Aplicando $\frac{5}{\sin 30^\circ}=\frac{c_2}{\sin 23,13^\circ} \Rightarrow c_2=3,93$ cm.

**Caso IV: Se conocen los tres lados**
El problema, en este caso, tiene solución única siempre que cada uno de los lados sea menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
La solución se consigue aplicando el teorema del coseno para despejar cualquier ángulo; después puede aplicarse el teorema del seno.
La construcción geométrica se hace como sigue:
1. Se traza cualquier lado; por ejemplo, $b$.
2. Con centro en $A$ y en $C$ se trazan arcos de radios $c$ y $a$, respectivamente. El corte de esos arcos determina el vértice $B$.

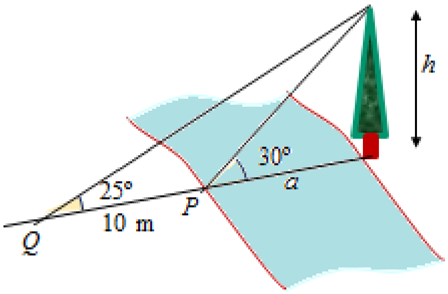



**Ejemplo**:
Si se conocen: $a$ = 10 cm, $b$ = 12 cm y $c$ = 9 cm.
→ Aplicando que $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A \Rightarrow$
$\Rightarrow 10^2=12^2+9^2-2\cdot 12\cdot 9\cdot\cos A \Rightarrow -125=-216\cdot\cos A$
$\Rightarrow \cos A=\frac{-125}{-216}=0,5787 \Rightarrow A=\arccos 0,7587=54,64^\circ$.
→ Análogamente: $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B \Rightarrow 12^2=10^2+9^2-2\cdot 10\cdot 9\cdot\cos B \Rightarrow -37=-180\cdot\cos B$
$\Rightarrow \cos B=0,2056 \Rightarrow B=\arccos 0,2056=78,14^\circ$.
→ Como $C=180^\circ-A-B \Rightarrow C$ = 47,22º.

## 4. PROBLEMAS CON ENUNCIADO

Para resolver estos problemas conviene dibujar siempre el triángulo en cuestión.
Practicamos con algunos ejercicios.

**Ejercicio 2**
Desde la orilla de un río se ve un árbol situado enfrente (en la otra orilla) bajo un ángulo de 30º. Si se retrocede, en línea recta 10 m, se ve bajo un ángulo de 25º. ¿Cuál es la altura del árbol y la anchura del río?
Solución:
Puede hacerse el dibujo adjunto. Con esto:




$$\tan 25^\circ = \frac{h}{10+a} \Rightarrow h = (10+a)\cdot\tan 25^\circ;$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a\cdot\tan 30^\circ.$$

Igualando:

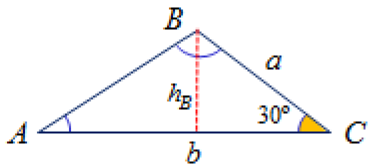
$$(10+a)\cdot\tan 25^\circ = a\tan 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\cdot\tan 25^\circ + a\tan 25^\circ = a\tan 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\cdot\tan 25^\circ = a\cdot(\tan 30^\circ - \tan 25^\circ) \Rightarrow a = \frac{10\cdot\tan 25^\circ}{\tan 30^\circ - \tan 25^\circ} = 41{,}99 \text{ m.}$$

Luego, la altura del árbol será $h = 41{,}99\cdot\tan 30^\circ = 24{,}24$ m.

**Ejercicio 3**
De un triángulo se sabe que la suma de las longitudes de los lados *a* y *b* es de 11 m, que el ángulo *C* opuesto al tercer lado vale 30º y que su área es de 7 m$^2$. Halla los valores de sus lados y ángulos.
Solución:




La superficie del triángulo es: $S = \frac{b\cdot h_B}{2}$.

Como $\sin C = \frac{h_B}{a} \Rightarrow h_B = a\cdot\sin C$. Luego $S = \frac{a\cdot b\cdot\sin C}{2}$.

Por tanto, $S = \frac{a\cdot b\cdot\sin 30^\circ}{2} = 7 \Rightarrow a\cdot b = 28$.

Como se sabe que $a+b=11$, despejando $a = 11-b$ y sustituyendo en $a\cdot b = 28 \Rightarrow$

$$(11-b)\cdot b = 28 \Rightarrow b^2 - 11b + 28 = 0 \Rightarrow b = \frac{11\pm\sqrt{121-4\cdot 28}}{2} = \frac{11\pm 3}{2} = \begin{cases} 7 \\ 4 \end{cases}.$$

Si *a* = 4 y *b* = 7, aplicando el teorema del coseno:

$$c^2 = 4^2 + 7^2 - 2\cdot 4\cdot 7\cos 30^\circ = 16{,}50 \Rightarrow c = 4{,}04.$$

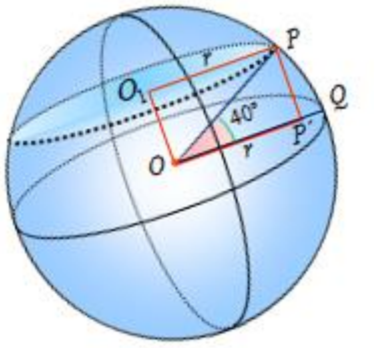
→ Por tanto, las medidas de los lados son: *a* = 4 m; *b* = 7 m; *c* = 4,04 m.
(La otra solución es idéntica, solo cambia *a* por *b*: *a* = 7 m; *b* = 4 m; *c* = 4,04 m).

→ Los ángulos se obtienen aplicando el teorema del seno.
Para *a* = 4 m, *b* = 7 m, *c* = 4,04 m y *C* = 30º:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{4}{\sin A} = \frac{4{,}04}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \sin A = \frac{4\cdot\sin 30^\circ}{4{,}04} = 0{,}4950 \Rightarrow A = \arcsin 0{,}4950 = 29{,}67^\circ.$$

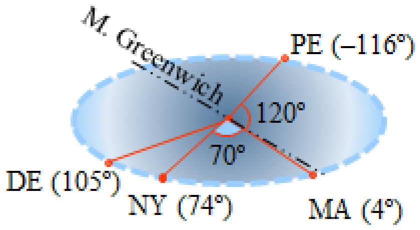
Luego *B* = 180º – 29,67º – 30º = 120,33º.

**Ejercicio 4**
La latitud de un paralelo terráqueo viene determinada por la amplitud del ángulo *POQ*, siendo *P* un punto del paralelo en cuestión, *Q* un punto del ecuador, ambos en el mismo meridiano, y *O* de centro de la Tierra. Con esa información:
a) Calcula el radio, *r*, del paralelo 40; ¿cuánto mide ese paralelo? (Dato: el radio de la superficie terrestre es de 6370 km, aprox.).
b) Sabiendo que las ciudades de Madrid y Nueva York están en el paralelo 40º N (aprox.) y que sus longitudes, también aproximadas, son 4º Oeste y 74º Oeste, respectivamente, ¿qué distancia hay entre ambas ciudades?



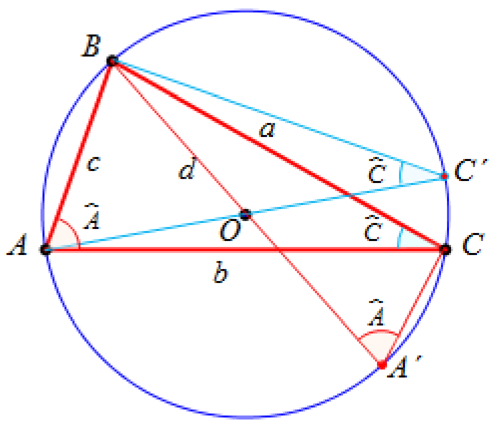

Solución:
a) Aplicando la razón coseno en el triángulo *OPP´*:
$$\cos 40^\circ = \frac{OP'}{OP} \Rightarrow 0,766 = \frac{r}{6370} \Rightarrow r = 0,766 \cdot 6370 = 4879,42 \text{ km.}$$
Luego, la longitud de paralelo (la de la circunferencia imaginaria correspondiente) será:
$$L_{40^\circ} = 2\pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 4879,42 = 30642,76 \text{ km.}$$

b) Si "cortamos" por el paralelo 40º la situación queda, aproximadamente, como en la figura adjunta: la amplitud del arco que une Madrid con Nueva York es de 70º.
Por tanto, la distancia entre ambas ciudades será:
$$d(MA, NY) = \frac{70^\circ}{360^\circ} \cdot 30642,76 = 5958,31 \text{ km.}$$




Nota: Próximas al paralelo 40º N se encuentran ciudades como Madrid, Nueva York, Denver o Pekín. Sus coordenadas exactas (latitud; longitud), son: Madrid (40º 24' 59,4'' Norte; 3º, 42' 9,22'' Oeste. Aprox. 40º N; 4º O); Nueva York (40° 39′ 51″ N; 73° 56′ 19″ O. Aprox. 40º N; 74º O); Denver (39° 44′ 21″ N, 104° 59′ 5″ O); Pekín (39° 54′ 18″ N 116° 23′ 29″ Este).

**Ejercicio 5**
Demuestra el teorema del seno utilizando la propiedad del ángulo inscrito en una circunferencia: "todo ángulo inscrito mide la mitad que el ángulo central correspondiente" (Ver).
Solución:
Trazando la circunferencia circunscrita al triángulo *ABC* (de centro *O* y diámetro *d*), como los ángulos inscritos que abarcan el mismo arco son iguales, se deduce:




→ Los ángulos con vértice en *A* y *A´* son iguales.
→ El ángulo *C* del triángulo *A´BC* es rectángulo, pues *A´B* es un diámetro, *d*. (Como el arco *A´B* mide 180º se deduce que *C* = 90º).

Por tanto: $\sin A = \sin A' = \frac{a}{d} \Rightarrow d = \frac{a}{\sin A}$.

→ Lo mismo puede afirmarse en el triángulo *AC´B*:
$$\sin C = \sin C' = \frac{c}{d} \Rightarrow d = \frac{c}{\sin C}$$
→ Igualmente, para el ángulo *B*: $d = \frac{b}{\sin B}$.

Luego se cumple que: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

# PROBLEMAS PROPUESTOS

**1**. En el triángulo rectángulo de vértices *A*, *B* y *C*, con ángulo recto en *C*, se conocen el cateto $a$ = 10 cm y el ángulo $A$ = 28º. Halla sus demás elementos.
Nota: En todos los enunciados de los problemas las letras *A*, *B* y *C* designan los vértices (ángulos) del triángulo; sus respectivos lados opuestos se designan por *a*, *b* y *c*.

**2**. En el triángulo rectángulo de vértices *A*, *B* y *C* se conocen el cateto $a$ = 10 cm y la hipotenusa $c$ = 20 cm. Halla sus demás elementos.

**3**. Halla la altura de una torre sabiendo que desde una distancia de 40 m del pie de la torre se observa el punto más alto con un ángulo de 50º.

**4**. Desde un punto *P* se ve el punto más alto de un edificio con un ángulo de elevación de 25º. Si se avanza 50 m hacia el edificio, el ángulo de elevación es ahora de 40º. ¿A qué distancia del edificio está el punto *P*, y cuál es su altura?

**5**. Demuestra que el área de un triángulo es igual al semiproducto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos. (Una de sus formas sería: $S = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}$).

**6**. Los lados *b* y *c* de un triángulo miden 20 y 25 cm, respectivamente. Halla su área sabiendo que determinan un ángulo de 30º.

**7**. De un triángulo *ABC* se conocen: $c$ = 18 cm, $A$ = 20º y $B$ = 60º. Resuélvelo.

**8**. De un triángulo *ABC* se conocen: $c$ = 18 cm, $b$ = 15 cm y $A$ = 40º. Resuélvelo.

**9**. De un triángulo *ABC* se conocen: $c$ = 18 cm, $b$ = 20 cm y $B$ = 80º. Resuélvelo.

**10**. De un triángulo *ABC* se conocen: $b$ = 18 cm, $c$ = 20 cm y $B$ = 80º. Resuélvelo.

**11**. De un triángulo *ABC* se conocen: $a$ = 15 cm, $b$ = 12 cm y $A$ = 80º. Resuélvelo.

**12**. De un triángulo *ABC* se conocen: $a$ = 12 cm, $c$ = 20 cm y $A$ = 25º. Resuélvelo.

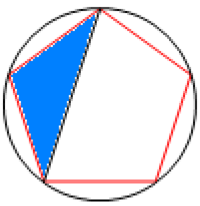
**13**. De un triángulo *ABC* se conocen: $a$ = 15 cm, $b$ = 20 cm y $c$ = 27 cm. Resuélvelo.

**14**. Halla la superficie de un triángulo de lados 10, 16 y 20 cm

**15**. Halla la superficie de un triángulo isósceles sabiendo que el ángulo desigual mide 40º y el lado más pequeño 25 cm.

**16**. Halla la superficie de un hexágono regular en función de la longitud de su lado.
Aplica el resultado para hallar la superficie de un hexágono regular de lado 5 cm.

**17**. Halla la longitud de una de las diagonales de un pentágono regular de 10 cm de lado. Halla también la superficie del triángulo sombreado. Por último, calcula la altura del pentágono.



**18**. Halla la superficie de un decágono regular de 7 cm de lado.

**19**. Las agujas del reloj de una torre miden 30 y 24 cm, respectivamente.
a) ¿Cuál es la distancia que hay entre sus extremos cuando el reloj marca las cinco?
b) ¿Cuál es la superficie del triángulo que determinan a esa hora?

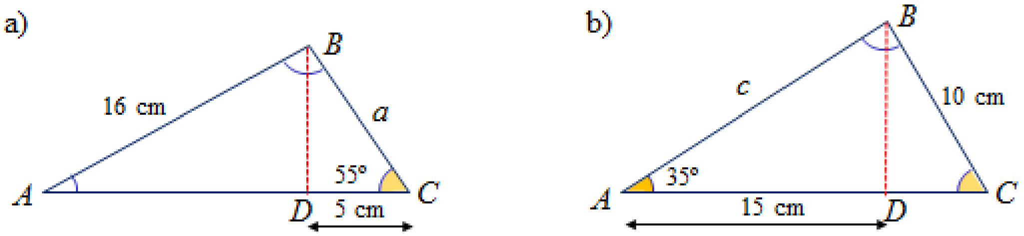
**20**. En el paralelogramo *ABCD* se sabe que el ángulo *ABC* = 120º, que el lado *BC* es doble que el lado *AB*, y que su diagonal mayor mide $|AC| = 4\sqrt{7}$ cm. Halla la longitud de sus lados y la superficie del paralelogramo.

**21**. Uno de los lados de un triángulo es doble de otro y el ángulo que forman vale 60º. Halla los otros dos ángulos.

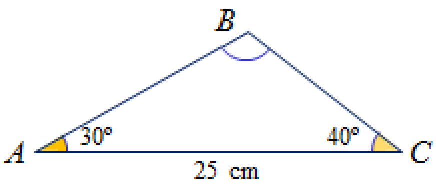
**22**. De un paralelogramo sabemos que el lado más largo mide 20 cm, que su área es de 120 cm$^2$ y que el ángulo más pequeño vale 30º
Determina:
a) El valor del otro ángulo del paralelogramo (el más grande).
b) La longitud del lado más corto.
c) La medida de la diagonal más larga.

**23**. Las diagonales de un paralelogramo de 19,15 cm$^2$ de área forman un ángulo de 50º al cortarse. Calcula la longitud de las diagonales si una mide doble que la otra.

**24**. Con los datos que se indican en las figuras, calcula los lados y los ángulos de cada triángulo.




**25**. Calcula el área del triángulo *ABC* representado en la siguiente adjunta.




**26**. En el rectángulo de la figura, su lado *BC* mide 13 cm. Si *BE* es perpendicular a la diagonal *AC*, ¿cuánto vale las áreas del triángulo *ABE* y del rectángulo *ABCD*?