## Solución de los Problemas Propuestos

**1**. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3(x-2)-\frac{1}{2}x=\frac{2}{3}(3-2x)$; b) $\frac{2-x}{2}-\frac{4x-3}{5}=2x-5-\frac{1}{4}(2x-3)$.

Solución:

a) Se quitan los denominadores multiplicando por 6, después se resuelven los paréntesis; por último, se trasponen términos y se despeja.

$$3(x-2)-\frac{1}{2}x=\frac{2}{3}(3-2x) \Rightarrow 6\cdot 3(x-2)-6\cdot\frac{1}{2}x=6\cdot\frac{2}{3}(3-2x)\Rightarrow 18x-36-3x=12-8x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18x-3x+8x=12+36\Rightarrow 23x=48\Rightarrow x=\frac{48}{23}.$$

b) Se quitan los denominadores multiplicando por 20:

$$20\cdot\frac{2-x}{2}-20\cdot\frac{4x-3}{5}=20\cdot 2x-20\cdot 5-20\cdot\frac{1}{4}(2x-3)\to \text{(hay que tener cierto cuidado con los signos)}$$

$$\to 10\cdot(2-x)-4\cdot(4x-3)=40x-100-5\cdot(2x-3) \Rightarrow 20-10x-16x+12=40x-100-10x+15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10x-16x-40x+10x=-100+15-20-12 \Rightarrow -56x=-117\Rightarrow x=\frac{117}{56}.$$

**2**. Opera las siguientes expresiones algebraicas y después resuelve la ecuación obtenida.

a) $x^2=\frac{x}{2}+3$; b) $(x-3)\cdot(x+2)=6$; c) $2x-1=\frac{-4}{x-3}$; d) $x+\frac{1}{x}=2$.

Solución:

a) $x^2=\frac{x}{2}+3 \to$ (multiplicando por 2) $\to 2x^2=x+6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x^2-x-6=0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\frac{1\pm 7}{4}=\begin{cases}-3/2\\ 2\end{cases}.$$

b) $(x-3)\cdot(x+2)=6 \Rightarrow x^2-x-6=6\Rightarrow x^2-x-12=0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}=\begin{cases}-3\\ 4\end{cases}.$

c) $2x-1=\frac{-4}{x-3} \to$ (multiplicando por $x-3$) $\to (x-3)\cdot(2x-1)=-4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x^2-7x+3=-4\Rightarrow 2x^2-7x+7=0\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-56}}{2} \to \text{No tiene solución.}$$

d) $x+\frac{1}{x}=2 \to$ (multiplicando por $x$) $\to x^2+1=2x\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=1$, doble.

**3**. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x-5)(-2x+3)=0$; b) $\frac{x^2-x-2}{x+4}=0$; c) $\frac{x}{x-3}=\frac{2x}{x-2}$; d) $\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x}=\frac{8}{x}$.

Solución:

a) Un producto vale 0 cuando uno de sus factores es 0:

$$(x-5)(-2x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \to x=5 \\ -2x+3=0 \to x=3/2 \end{cases}.$$

b) $\dfrac{x^2-x-2}{x+4}=0 \to$ (Una fracción es 0 cuando su numerador vale 0) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}=\begin{cases}-2\\ 1\end{cases}.$$

c) $\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{2x}{x-2} \to$ (multiplicando en cruz) $\Rightarrow x(x-2)=2x(x-3) \Rightarrow x^2-2x=2x^2-6x \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4\end{cases}.$$

d) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{8}{x} \to$ (operando) $\Rightarrow \dfrac{x^2-(x-2)}{(x-2)\cdot x}=\dfrac{8}{x} \Rightarrow \dfrac{x^2-x+2}{(x-2)\cdot x}=\dfrac{8}{x} \to$ (multiplicando y simplificando) $\Rightarrow (x^2-x+2)\cdot\cancel{x}=8(x-2)\cdot\cancel{x} \Rightarrow x^2-x+2=8x-16 \Rightarrow x^2-9x+18=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=6\end{cases}.$

<u>Observaciones:</u>

1. Cuando se simplifica una ecuación hay la posibilidad de que se pierda alguna solución; en este caso, la solución $x$ = 0. Aquí no sucede, pues $x$ no puede tomar el valor 0 al estar como denominador de una fracción.

2. Una manera más rápida de resolver esta ecuación es:

$$\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x}=\frac{8}{x} \Rightarrow \frac{x}{x-2}=\frac{8}{x}+\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{x}{x-2}=\frac{9}{x} \Rightarrow x^2=9x-18,\ \ldots$$

**4**. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{3x+1}{x}-2$; b) $\dfrac{2x^2-3x}{x+3}=0$; c) $\dfrac{4}{x+3}=0$; d) $\dfrac{x^2-3x}{x^2+1}-2=0$ .

<u>Solución</u>:

a) Operando en el segundo miembro: $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{3x+1-2x}{x} \Rightarrow \dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x+1}{x}$.

Multiplicando en cruz: $x^2=x^2+2x+1 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

b) $\dfrac{2x^2-3x}{x+3}=0 \to$ el numerador debe ser 0 $\to 2x^2-3x=0 \Rightarrow x(2x-3)=0 \Rightarrow x=0; x=\dfrac{3}{2}$.

c) $\dfrac{4}{x+3}=0 \to$ No tiene solución: el numerador debe ser 0.

d) $\dfrac{x^2-3x}{x^2+1}-2=0 \Rightarrow \dfrac{x^2-3x-2x^2-2}{x^2+1}=0 \Rightarrow -x^2-3x-2=0 \Rightarrow x=-1$ y $x=-2$.

<u>Nota</u>: Puedes utilizar la App **Photomath** para comprobar los resultados.

**5**. a) Sabiendo que una solución de la ecuación $x^2+bx-5=0$ es $x = 1$, ¿cuánto vale $b$? Halla la otra solución.
b) Sabiendo que una solución de la ecuación $x^2-3x+c=0$ es $x = -2$, ¿cuánto vale $c$? Halla la otra solución.
c) Una solución de la ecuación $ax^2+6x=0$ es $x = 3$, ¿cuánto vale $a$? Halla la otra solución.
Solución:
a) $x^2+bx-5=0 \to$ Si $x = 1$ es solución $\Rightarrow 1 + b - 5 = 0 \Rightarrow b = 4$.
La ecuación es $x^2+4x-5=0$: la otra solución es $x = -5$.

b) $x^2-3x+c=0 \to$ Si $x = -2$ es solución $\Rightarrow 4 + 6 + c = 0 \Rightarrow c = -10$.
La ecuación es $x^2-3x-10=0$: la otra solución es $x = 5$.

c) $ax^2+6x=0 \to$ Si $x = 3$ es solución $\Rightarrow 9a + 18 = 0 \Rightarrow a = -2$.
La ecuación es $-2x^2+6x=0$. La otra solución es $x = 0$.

**6**. Demuestra que la suma y el producto de las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, valen, respectivamente, $-\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$.
Solución:
Las raíces de $ax^2+bx+c=0$ son $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
Si se suman:
$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}.$$
Si se multiplican:
$$x_1 \cdot x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$$ $\to$ (en el numerador, *suma por diferencia*) $\to$ $x_1 \cdot x_2=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$.

**7**. Halla una ecuación de segundo grado que cumpla las siguientes condiciones:
a) Sus soluciones son: $x = 3$ y $x = 7$. b) Sus soluciones son: $x = 3$ y $x = 7$; y el coeficiente $c = 42$.
c) Sus soluciones son: $x = -1$ y $x = 2$. d) Sus soluciones son: $x = -1$ y $x = 2$; y el coeficiente $a = 3$.
Solución:
Las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ son las raíces del polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$.
Si esas raíces son $x=x_1$ y $x=x_2$, entonces (por el teorema del factor), $P(x)=a\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right)$.
Por tanto, la ecuación es $a\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right)=0$
a) Si sus soluciones son $x = 3$ y $x = 7 \to$ la ecuación $a\left(x-3\right)\cdot\left(x-7\right)=0 \Rightarrow a\left(x^2-10x+21\right)=0$.
La más sencilla se obtiene cuando $a = 1 \to x^2-10x+21=0$.

b) La ecuación anterior $a\left(x^2-10x+21\right)=0 \Leftrightarrow ax^2-10ax+21a=0$.
Si nos dicen que $c = 42$, entonces $21a=42 \Rightarrow a=2$. La ecuación será $2x^2-20x+42=0$.

c) Es como el apartado a): si sus soluciones son $x = -1$ y $x = 2$ → la ecuación será $a(x+1)\cdot(x-2)=0 \Rightarrow a(x^2-x-2)=0$. La más sencilla se obtiene cuando $a = 1$ → $x^2-x-2=0$.

d) Es como el apartado c).
Si en la ecuación $a(x^2-x-2)=0$, se hace $a = 3$, resulta: $3x^2-3x-6=0$.

Nota:
Si se aplica el resultado del problema anterior, para a) se tiene:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \Rightarrow 10=-\frac{b}{a} \Rightarrow b=-10a\,;\; x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \Rightarrow 21=\frac{c}{a} \Rightarrow c=21a.$$

La ecuación pedida será: $ax^2-10ax+21a=0$.
Si se conoce conociese $a$, $b$ o $c$, la ecuación se concreta de manera inmediata.

**8**. Discute y resuelve en función de $p$

a) $x^2+px=0$; b) $x^2-4x+p=0$; c) $px^2+4x-4=0$.

Solución:
a) $x^2+px=0 \Rightarrow x(x+p)=0$ → las soluciones son $x = 0$ y $x = -p$. En el caso de que $p = 0$, la solución $x = 0$ sería doble.

b) $x^2-4x+p=0 \Rightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4p}}{2}$.
Si el radicando es positivo hay dos soluciones distintas; esto sucede si $p < 4$.
Si el radicando es 0 hay dos soluciones iguales; esto sucede si $p = 4$. La solución doble es $x = 2$.
Si el radicando es negativo no hay solución; esto sucede si $p > 4$.

c) $px^2+4x-4=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+16p}}{2p}$.
Si el radicando es positivo hay dos soluciones distintas; esto sucede si $p > -1$.
Si el radicando es 0 hay dos soluciones iguales; esto sucede si $p = -1$. La solución doble es $x = 2$.
Si el radicando es negativo no hay solución; esto sucede si $p < -1$.

**9**. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^3-2x^2+4x-8=0$; b) $4x^3+4x^2-3x=0$; c) $2x^3-10x^2+14x-6=0$;
d) $(x^2+2x)(x^2-5x+4)=0$; e) $x^3+3x^2-1=0$; f) $(x-1)(4x^2-1)(x^3+8)=0$.

Solución:
a) $x^3-2x^2+4x-8=0$ → Se buscan soluciones enteras entre los divisores de 8: $\pm1$: $\pm2$ $\pm4$ $\pm8$.
→ ¿$x = 1$? → NO: $1-2+4-12\neq0$. → ¿$x = -1$? → NO: $-1-2-4-12\neq0$.
→ ¿$x = 2$? → SÍ: $8-8+8-8=0 \Rightarrow x-2$ es un factor de la expresión → se divide:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 4 & -8 \\ 2 & & 2 & 0 & 8 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow (x^3-2x^2+4x-8)=(x-2)(x^2+4).$$

Por tanto,

$$x^3-2x^2+4x-8=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+4)=0.$$

Como el segundo factor nunca se hace 0, no hay más raíces. Solo es solución $x = 2$.

b) $4x^3+4x^2-3x=0$ → se saca factor común: $x(4x^2+4x-3)=0$.

Resolviendo $4x^2+4x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+48}}{8}=\dfrac{-4\pm 8}{8}=\begin{cases}-3/2\\ 1/2\end{cases}$.

Las soluciones de la ecuación dada son: $x = 0$, $x=-\dfrac{3}{2}$ y $x=\dfrac{1}{2}$.

c) $2x^3-10x^2+14x-6=0$ → Se buscan soluciones enteras entre los divisores de –6: ±1: ±2; ±3; ±6.

→ ¿$x = 1$? → SÍ: $2-10+14-6=0 \Rightarrow x-1$ es un factor de la expresión → se divide:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -10 & 14 & -6 \\ 1 & & 2 & -8 & 6 \\ \hline & 2 & -8 & 6 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow 2x^3-10x^2+14x-6=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(2x^2-8x+6\right)=0.$$

Resolviendo $2x^2-8x+6=0 \Rightarrow x=\dfrac{8\pm\sqrt{64-48}}{4}=\dfrac{8\pm 4}{4}=\begin{cases}1\\ 3\end{cases}$.

Las soluciones de la ecuación dada son: $x = 1$, doble; $x = 3$.

d) $(x^2+2x)(x^2-5x+4)=0$ → Cada uno de los factores puede ser 0.

→ $x^2+2x=0 \Rightarrow x(x+2)=0 \Rightarrow x = 0$, $x = -2$.

→ $x^2-5x+4=0 \Rightarrow x = 1$, $x = 4$.

e) $x^3+3x^2-1=0$ → Se buscan soluciones enteras entre los divisores de 1: 1; –1.

→ ¿$x = 1$? → NO: $1+3-1\neq 0$. → ¿$x = -1$? → NO: $-1+3-1\neq 0$.

Como no tiene soluciones enteras no puede encontrase la solución.

f) $(x-1)(4x^2-1)(x^3+8)=0$ → Cada uno de los factores puede ser 0.

→ $x-1=0 \Rightarrow x=1$.

→ $4x^2-1=0 \Rightarrow x^2=\dfrac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}$.

→ $x^3+8=0 \Rightarrow x^3=-8 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-8} \Rightarrow x=-2 \Rightarrow x = 1$, $x = 4$.

**10**. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4+5x^2-36=0$; b) $x^4-21x^2+80=0$; c) $x^4-25x^2=0$; d) $x^4-81=0$.

Solución:

En todos los dos primeros casos se hace el cambio $x^2=t$.

a) $x^4+5x^2-36=0 \Leftrightarrow t^2+5t-36=0 \Rightarrow t=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+144}}{2}=\dfrac{-5\pm 13}{2}=\begin{cases}-9\\ 4\end{cases}$.

→ Si $t=-9 \Rightarrow x^2=-9$: No puede ser.

→ Si $t=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$.

Esta ecuación solo tiene dos soluciones reales.

b) $x^4-21x^2+80=0 \Leftrightarrow t^2-21t+80=0 \Rightarrow t=\dfrac{21\pm\sqrt{21^2-4\cdot 1\cdot 80}}{2}=\dfrac{21\pm 11}{2}=\begin{cases}16\\ 5\end{cases}$.

→ Si $t=16 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x = \pm 4$.

→ Si $t=5 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$.

Las soluciones son: $x = 2$; $x = 2$; $x=-\sqrt{5}$; $x=\sqrt{5}$

c) $x^4-25x^2=0 \to$ sacando factor común $\to x^2\left(x^2-25\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \to x=0 \\ x^2-25 \to x=-5; x=5 \end{cases}$.

d) $x^4-81=0 \to$ despejando $\to x^4=81 \Rightarrow x=\sqrt[4]{81} \Rightarrow x=-3; x=3$.

**11**. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x}+3x=4$; b) $\sqrt{x+5}-3=0$; c) $1-3x=\sqrt{3x-1}$;

d) $2\sqrt{x+3}-5=x-10$; e) $2\sqrt{x-1}=8-\sqrt{3x+1}$; f) $\sqrt{15-x}-2x=6$.

Solución:

Para resolver estas ecuaciones es imprescindible saber operar correctamente. Hay que saber operar con raíces y hacer bien el cuadrado de productos, de sumas y restas.

a) $\sqrt{x}+3x=4 \to$ (se aísla la raíz y se hace el cuadrado) $\to \sqrt{x}=4-3x \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=(4-3x)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x=16-24x+9x^2 \Rightarrow \Rightarrow 9x^2-25x+16=0 \Rightarrow x=\frac{25\pm\sqrt{(-25)^2-4\cdot9\cdot16}}{2\cdot9}=\frac{25\pm7}{18}=\begin{cases} 1 \\ 16/9 \end{cases}.$$

El valor $x=\frac{2}{3}$ no es válido como solución, pues: $\sqrt{\frac{16}{9}}+3\cdot\frac{16}{9}=\frac{4}{3}+\frac{16}{3}=\frac{20}{3}\neq 4$ (Habría que tomar el signo menos de la raíz, pero, en las ecuaciones, el signo que se considera es el inicial; en este caso positivo).

Nota:

b) $\sqrt{x+5}-3=0 \to$ (se aísla la raíz) $\to \sqrt{x+5}=3 \Rightarrow \left(\sqrt{x+5}\right)^2=3^2 \Rightarrow x+5=9 \Rightarrow x=4$.

c) $1-3x=\sqrt{3x-1} \to$ (se eleva al cuadrado) $\to (1-3x)^2=\left(\sqrt{3x-1}\right)^2 \Rightarrow 1-6x+9x^2=3x-1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9x^2-9x+2=0 \Rightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{18}=\frac{9\pm3}{18}=\begin{cases} 2/3 \\ 1/3 \end{cases} \to \text{Solo vale } x=\frac{1}{3}.$$

La solución $x=\frac{2}{3}$ no es válida, pues: $1-3x \to 1-3\cdot\frac{2}{3}=-1$; pero $\sqrt{3x-1}=\sqrt{3\cdot\frac{2}{3}-1}=\sqrt{1}=1$.

d) $2\sqrt{x+3}-5=x-10 \to$ (se aísla la raíz y se hace el cuadrado) $\to$

$$\to 2\sqrt{x+3}=x-5 \Rightarrow \left(2\sqrt{x+3}\right)^2=(x-5)^2 \Rightarrow 4(x+3)=x^2-10x+25 \Rightarrow 4x+12=x^2-10x+25$$

$$\Rightarrow x^2-14x+13=0 \Rightarrow x=\frac{14\pm\sqrt{196-52}}{2}=\frac{14\pm12}{2}=\begin{cases} 1 \\ 13 \end{cases}.$$

Veamos si valen las dos soluciones.

Si $x=1 \to 2\sqrt{1+3}-5=1-10 \Rightarrow 4-5=1-9$ : no vale.

Si $x=13 \to 2\sqrt{13+3}-5=13-10 \Rightarrow 8-5=13-9 \to$ esta es la solución.

Nota: Con **GeoGebra**, tecleando Resuelve(2sqrt(x+3) – 5 = x–10) se obtiene {x=13}.

e) $2\sqrt{x-1}=8-\sqrt{3x+1} \to$ (se eleva al cuadrado) $\to \left(2\sqrt{x-1}\right)^2=\left(8-\sqrt{3x+1}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(x-1)=64-16\sqrt{3x+1}+(3x+1) \to$ (se opera y se aísla la raíz; se vuelve a elevar al cuadrado)

$$\to 4x-4=64-16\sqrt{3x+1}+3x+1 \Rightarrow x-69=-16\sqrt{3x+1} \Rightarrow (x-69)^2=\left(-16\sqrt{3x+1}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 138x + 4761 = 256(3x+1) \Rightarrow x^2 - 906x + 4505 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{906 \pm \sqrt{906^2 - 4 \cdot 4505}}{2} = \frac{906 \pm \sqrt{802816}}{2} = \frac{906 \pm 896}{2} = \begin{cases} 5 \\ 901 \end{cases}.$$

Veamos si valen las dos soluciones.

Si $x = 5 \to 2\sqrt{5-1} = 8 - \sqrt{3 \cdot 5 + 1} \Rightarrow 4 = 8 - 4$: sí vale.

Si $x = 901 \to 2\sqrt{901-1} = 8 - \sqrt{3 \cdot 901 + 1} \Rightarrow 60 = 8 - 52 \to$ No vale.

f) $\sqrt{15-x} - 2x = 6 \Rightarrow \sqrt{15-x} = 6 + 2x \Rightarrow \left(\sqrt{15-x}\right)^2 = (6+2x)^2 \Rightarrow 15 - x = 36 + 24x + 4x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4x^2 + 25x + 21 = 0 \Rightarrow x = \frac{-25 \pm \sqrt{625 - 4 \cdot 4 \cdot 21}}{2 \cdot 4} = \frac{-25 \pm \sqrt{289}}{8} = \frac{-25 \pm 17}{8} = \begin{cases} -1 \\ 21/4 \end{cases}$$

Solo es válida la solución $x = -1$.

**12**. Resuelve las siguientes ecuaciones con raíces:

a) $\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2-3} = 2$;  b) $\sqrt{4x} - \sqrt{2x+1} - 1 = 0$;  c) $\sqrt{2x-1} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{1-x}$.

Solución:

a) $\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2-3} = 2 \Rightarrow \sqrt{2x^2+1} = 2 + \sqrt{x^2-3} \to$ elevando al cuadrado $\to$

$2x^2 + 1 = 4 + 4\sqrt{x^2-3} + x^2 - 3 \Rightarrow x^2 = 4\sqrt{x^2-3} \to$ elevando al cuadrado $\to$

$x^4 = 16(x^2-3) \Rightarrow x^4 - 16x^2 + 48 = 0 \to$ ecuación bicuadrada: $x^2 = \dfrac{16 \pm \sqrt{256-192}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 12 \end{cases}$.

Para $x^2 = 4$ se obtienen las soluciones $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$.

Para $x^2 = 12$ se obtienen las soluciones $x = \sqrt{12}$: $x_3 = -2\sqrt{3}$ y $x_4 = 2\sqrt{3}$.

b) $\sqrt{4x} - \sqrt{2x+1} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{4x} - 1 = \sqrt{2x+1} \to$ elevando al cuadrado $\to$

$4x - 2\sqrt{4x} + 1 = 2x + 1 \Rightarrow 2x = 2\sqrt{4x} \Rightarrow x = \sqrt{4x} \Rightarrow x^2 = 4x \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

La solución $x_1 = 0$ no es válida.

c) $\sqrt{2x-1} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{1-x} \to$ elevando al cuadrado $\to$

$2x - 1 - 2\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{3x-2} + 3x - 2 = 1 - x \Rightarrow 6x - 4 = 2\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{3x-2} \Rightarrow$

$3x - 2 = \sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{3x-2} \to$ elevando al cuadrado $\to 9x^2 - 12x + 4 = (2x-1)(3x-2)$

$9x^2 - 12x + 4 = 6x^2 - 7x + 2 \Rightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \begin{cases} 2/3 \\ 1 \end{cases}$.

**13**. Resuelve la ecuación: $\left(\sqrt{x} - 4\right)\left(7 - 4\sqrt{x}\right) = 5$.

Solución:

$\left(\sqrt{x} - 4\right)\left(7 - 4\sqrt{x}\right) = 5 \Rightarrow 7\sqrt{x} - 4x - 28 + 16\sqrt{x} = 5 \Rightarrow 4x - 23\sqrt{x} + 33 = 0$.

Si se hace el cambio $\sqrt{x} = t$, con lo que la ecuación quedaría $4t^2 - 23t + 33 = 0 \Rightarrow$

$$t = \frac{23 \pm \sqrt{23^2 - 4 \cdot 4 \cdot 33}}{2 \cdot 4} = \frac{23 \pm \sqrt{529-528}}{8} = \frac{23 \pm 1}{8} = \begin{cases} 3 \\ 11/4 \end{cases}.$$

Si $t = \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$; si $t = \sqrt{x} = \dfrac{11}{4} \Rightarrow x = \dfrac{121}{16}$.

$\rightarrow$ También podría hacerse así: $4x-23\sqrt{x}+33=0 \Rightarrow 4x+33=23\sqrt{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (4x+33)^2=\left(23\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow 16x^2-265x+1089=0 \Rightarrow \ldots\ x=9; x=\frac{121}{16}.$$

**14**. Resuelve las siguientes ecuaciones con valores absolutos:

a) $|2x+1|=5$; b) $|x^2+2x|=4x$; c) $\frac{x+1}{2}=|x|$; d) $\frac{|x-2|}{x}=1$.

Solución:

a) $|2x+1|=5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=5 \Rightarrow x=2 \\ 2x+1=-5 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$. Las soluciones son $x = 2$ y $x = –3$. (Compruébalo).

b) $$|x^2+2x|=4x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x=4x \\ x^2+2x=-4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x=0 \\ x^2+6x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-2)=0 \rightarrow x=0; x=2 \\ x(x+6)=0 \rightarrow x=0; x=-6 \end{cases}.$$

c) $$\frac{x+1}{2}=|x| \Leftrightarrow x+1=2\cdot|x| \Rightarrow \begin{cases} x+1=2x \\ x+1=-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=x \\ 3x=-1 \end{cases} \Rightarrow x=1; x=-\frac{1}{3}.$$

d) $$\frac{|x-2|}{x}=1 \Leftrightarrow |x-2|=x \Rightarrow \begin{cases} x-2=x \\ x-2=-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2=0 \\ 2x=2 \end{cases} \Rightarrow x=1.$$

**15**. Resuelve las siguientes ecuaciones con valores absolutos:

a) $|x+3|=2x-1$; b) $|x^2-3x|=4$; c) $|x+6|=x^2$; d) $\frac{2}{x}=|x-1|$.

Solución:

a) $$|x+3|=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=2x-1 \\ x+3=-2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x=-4 \\ 3x=-2 \end{cases} \Rightarrow x=4; x=-\frac{2}{3}.$$

b) $$|x^2-3x|=4 \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x=4 \rightarrow x^2-3x-4=0 \\ x^2-3x=-4 \rightarrow x^2-3x+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm 5}{2} \rightarrow x=-1, x=4 \\ x=\frac{3\pm\sqrt{9-16}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución} \end{cases}.$$

c) $$|x+6|=x^2 \Rightarrow \begin{cases} x+6=x^2 \rightarrow x^2-x-6=0 \\ x+6=-x^2 \rightarrow x^2+x+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm 5}{2} \rightarrow x=-2, x=3 \\ x=\frac{1\pm\sqrt{1-24}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución} \end{cases}.$$

d) $$\frac{2}{x}=|x-1| \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{x}=x-1 \\ -\frac{2}{x}=x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=x^2-x \\ -2=x^2-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ x^2-x+2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \rightarrow x=-1, x=2 \\ x=\frac{1\pm\sqrt{1-8}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución} \end{cases} \rightarrow \text{La solución } x=-1 \text{ no es válida.}$$

**16**. Resuelve la ecuación: $|x-3|=2x$. Da una interpretación geométrica del resultado.

<u>Solución</u>:

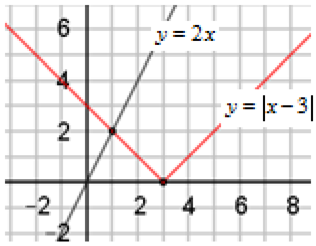
$$|x-3|=2x \Rightarrow \begin{cases} x-3=2x \to x=-3 \\ -x+3=2x \to x=1 \end{cases}.$$

La solución $x = -3$ no es válida, pues $|x-3|=|-3-3|=6$; mientras que $2x=2\cdot(-3)=-6$.

Aunque se volverá sobre este asunto en el tema de <u>funciones usuales</u>, debes saber que:

1) La función $y=|x-3|$ se representa uniendo dos semirrectas que arrancan en la abscisa $x = 3$,

pues $y=|x-3|=\begin{cases} -(x-3), \text{ si } x<3 \\ x-3, \text{ si } x\geq 3 \end{cases}$.




2) $y=2x$ es una recta que pasa por el origen.

3) La solución de la ecuación $|x-3|=2x$ es el punto de corte de ambas gráficas, que se da cuando $x = 1$.

**17**. La suma de tres múltiplos consecutivos de 3 vale 477. ¿Qué números son?

<u>Solución</u>:

Tres múltiplos consecutivos de 3 son: $x$, $x + 3$ y $x + 6$.

Como $x+x+3+x+6=477 \Rightarrow 3x=468 \Rightarrow x=\dfrac{468}{3}=156$.

Los números son: 156, 159 y 162.

**18**. Un grifo llena un depósito en 6 horas; si otro grifo tarda 4 horas en llenar un depósito igual.

a) ¿Cuánto llenan entre los dos en una hora?

b) ¿Cuánto tardarían en llenarlo entre los dos juntos?

<u>Solución</u>:

a) El primero grifo llena $\dfrac{1}{6}$ del depósito en 1 h; el segundo llena $\dfrac{1}{8}$.

Entre los dos llenan: $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{10}{24}=\dfrac{5}{12}$ del depósito $\to$ 5 partes de 12.

b) Si en 1 hora llenan $\dfrac{5}{12}$ de depósito, para llenarlo entero tardarán $\dfrac{12}{5}=2,4$ h = 2 h, 24 min.

Si no entiendes este razonamiento, plantéalo como una regla de tres.

$\to$ Si entre los dos grifos llenan $\dfrac{5}{12}$ de depósito en 1 hora;

Llenarán todo el depósito, $\dfrac{12}{12}$ en $h$ horas $\Rightarrow h=\dfrac{\frac{12}{12}\cdot 1}{\frac{5}{12}}=\dfrac{12}{5}=2,4$ h.

<u>De otra manera</u>, planteando una ecuación.

Si entre los dos tardarán $h$ horas, en una hora llenarían $\dfrac{1}{h}$ del depósito.

Como se sabe que entre los dos llenan $\dfrac{5}{12}$ de depósito $\to \dfrac{1}{h}=\dfrac{5}{12} \Rightarrow h=\dfrac{12}{5}$.

**19**. Entre dos caños llenan una piscina en 12 horas. Si un caño solo tarda 10 horas más que el otro, ¿cuánta tardaría cada uno por separado?
Solución:
Si el caño de mayor cauda tarda *x* horas, el otro tardará *x* + 10 horas.
Por separado, en 1 hora, cada uno llenaría $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{x+10}$, respectivamente.
Los dos a la vez llenarían, en una hora, $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}$.
Como se sabe que entre los dos tardan 12 horas, en 1 hora llenará $\frac{1}{12}$ de la piscina.
Por tanto: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}=\frac{1}{12} \to$ (operando) $\frac{x+10}{x(x+10)}+\frac{x}{x(x+10)}=\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{2x+10}{x(x+10)}=\frac{1}{12} \Rightarrow$

$$24x+120=x(x+10) \Rightarrow 24x+120=x^2+10x \Rightarrow x^2-14x-120=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{14\pm\sqrt{196+480}}{2}=\frac{14\pm 26}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=20 \\ x=-6 \end{cases}$$ $\to$ El valor negativo no tiene sentido.

Por tanto, el caño de mayor caudal emplearía 20 h en llenar la piscina; el otro, necesitaría 30 h.

**20**. El doble de un número más el cuadrado de su mitad es igual a 45. Halla el número.
Solución:
Si el número buscado es *x*, se cumple la relación: $2x+\left(\frac{x}{2}\right)^2=45$.
Operando:

$$2x+\left(\frac{x}{2}\right)^2=45 \Rightarrow 2x+\frac{x^2}{4}=45 \Rightarrow 8x+x^2=180 \Rightarrow x^2+8x-180=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-8\pm\sqrt{64+720}}{2}=\frac{-8\pm 28}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ x=-18 \end{cases}$$ $\to$ El número buscado puede ser 10 o –18.

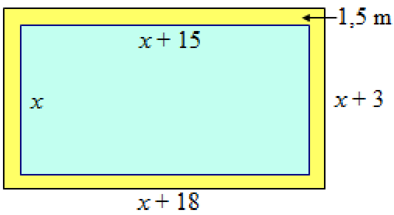
**21**. Descompón el número 40 en dos partes tales que su producto sea 256.
Solución:
Si una de las partes es *x*, la otra será 40 – *x*.
Como su producto debe valer 256, se obtiene la ecuación: $x\cdot(40-x)=256$.

$$x\cdot(40-x)=256 \Rightarrow 40x-x^2=256 \Rightarrow x^2-40x+256=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{40\pm\sqrt{1600-1024}}{2}=\frac{40\pm 24}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=32 \\ x=8 \end{cases}.$$

Los números pedidos son 32 y 8.

**22**. Una piscina rectangular está rodeada por un pasillo antideslizante de 1,5 m de ancho. La piscina es 15 m más larga que ancha. Si la superficie del pasillo es de 114 m$^2$, ¿cuáles son las dimensiones de la piscina?
Solución:
Si el ancho de la piscina son *x* metros; su largo será de *x* + 15 m.
Si se incluye el pasillo que la bordea, sus dimensiones serán de *x* + 3 por *x* + 18.
La superficie el pasillo es la diferencia entre el rectángulo de fuera (que incluye el pasillo) y el rectángulo interior (el de la piscina)



Por tanto:

Sup. pasillo = $(x+3)\cdot(x+18)-x\cdot(x+15)=114 \Rightarrow$

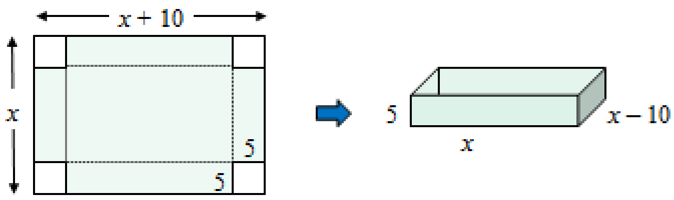
$x^2+21x+54-x^2-15x=114 \Rightarrow 6x=60 \Rightarrow x=10$ m

La piscina mide 10 por 25 m.

**23**. Con un trozo rectangular de cartón, que es 10 cm más largo que ancho, se construye una caja sin tapa de volumen 3000 cm$^3$, cortando un cuadrado de 5 cm de lado en cada esquina y doblando por los bordes. ¿Qué dimensiones tenía el cartón?

Solución:

La situación se representa en la figura adjunta.




Si el ancho del cartón es $x$, su largo será $x + 10$.

Si se cortan 5 cm por cada extremo, el lardo será de $x + 10 - 5 \cdot 2 = x$; el ancho de $x - 2 \cdot 5 = x - 10$; el alto de 5 cm.

El volumen de la caja en función de $x$ es: $V = x\cdot(x-10)\cdot 5 = 5x^2 - 50x$.

Como $V = 5x^2 - 50x = 3000 \Rightarrow 5x^2 - 50x - 3000 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x - 600 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100+2400}}{2} = \begin{cases} 30 \\ -7,5 \end{cases}.$$

Las dimensiones del cartón eran de 30 × 40 cm.

**24**. El trayecto de ida y vuelta, entre dos ciudades A y B, distantes 200 km, se realiza en 4,5 horas. Si la ida se hace a una velocidad media que es 20 km/h mayor que a la vuelta, ¿a qué velocidad media se hicieron cada uno de los trayectos?

Solución:

Si la velocidad de ida fue $v$, la de vuelta sería de $v - 20$.

Como $t = \frac{e}{v}$, el tiempo empleado en la ida fue: $t_{A-B} = \frac{200}{v}$; y el tiempo de vuelta, $t_{B-A} = \frac{200}{v-20}$.

Se cumple que $t_{A-B} + t_{B-A} = 4,5 \Rightarrow \frac{200}{v} + \frac{200}{v-20} = 4,5 \Rightarrow \frac{200(v-20)+200v}{v^2-20v} = 4,5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 400v - 4000 = 4,5v^2 - 90v \Rightarrow 4,5v^2 - 490v + 4000 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{490 \pm \sqrt{490^2 - 4\cdot 4,5\cdot 4000}}{9} = \frac{490 \pm 410}{9} = \begin{cases} 100 \\ 80/9 \end{cases}$$ $\Rightarrow v$ = 100 km/h; $v$ = 80/9 no tiene sentido.

La ida la hizo a 100 km/h; la vuelta a 80 km/h.

**25**. El trayecto de ida entre dos ciudades A y B se hizo a una velocidad media de 100 km/h. Si la vuelta se hizo a una velocidad media de 80 km/h, ¿cuál fue la velocidad media del trayecto completo?

Solución:

Se desconoce la distancia entre ambas ciudades; la designamos por $x$.

Como $t = \frac{e}{v}$, el tiempo empleado en la ida fue: $t_{A-B} = \frac{x}{100}$; y el tiempo de vuelta, $t_{B-A} = \frac{x}{80}$.

El tiempo entre la ida y la vuelta fue: $t_{A-B} + t_{B-A} = \frac{x}{100} + \frac{x}{80}$.

Si la velocidad media del trayecto completo fue $v_m$, el tiempo total en recorrer la distancia 2$x$ ($x$ de ida, más $x$ de vuelta) fue de: $t_{Total}=\dfrac{2x}{v_m}$.

Igualando los tiempos:

$$\frac{x}{100}+\frac{x}{80}=\frac{2x}{v_m}\Rightarrow\frac{1}{100}+\frac{1}{80}=\frac{2}{v_m}\Rightarrow\frac{9}{400}=\frac{2}{v_m}\Rightarrow v_m=\frac{800}{9}=88{,}89\text{ km/h.}$$

Nota: Si tu respuesta inmediata ha sido "90 km/h", que está mal, imagina que la distancia entre A y B es de 200 km (como en el caso del problema anterior), y haz el cociente entre la distancia total recorrida (400 km) y el tiempo total empleado (4,5 horas).

**26**. Las expresiones $I(x)=-2x^2+51x$ y $G(x)=x^2-3x+96$, con $0\le x\le 18$, representan, respectivamente, los ingresos y gastos de una empresa, en miles de euros, en función de los años, $x$, transcurridos desde su inicio y en los últimos 18 años.

a) ¿Para qué valores de $x$, desde su entrada en funcionamiento, los ingresos coincidieron con los gastos?

b) Determina la expresión que representa los beneficios en función de $x$. Indica los beneficios o pérdidas cuando $x$ = 2, $x$ = 10; $x$ = 17.

Solución:

a) Si los ingresos coinciden con los gastos:

$$I(x)=G(x)\Rightarrow -2x^2+51x=x^2-3x+96\Rightarrow 3x^2-54x+96=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{54\pm\sqrt{54^2-4\cdot3\cdot96}}{6}=\begin{cases}2\\16\end{cases}.$$

En los años 2 y 16 los ingresos coinciden con los gastos.

b) El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los gastos; luego:

$$B(x)=I(x)-G(x)\Rightarrow B(x)=-2x^2+51x-\left(x^2-3x+96\right)\Rightarrow B(x)=-3x^2+54x-96.$$

Para $x$ = 2: $B(2)=-3\cdot2^2+54\cdot2-96=0$.

Para $x$ = 10: $B(10)=-3\cdot10^2+54\cdot10-96=144$ $\to$ ganancia de 144000 euros.

Para $x$ = 17: $B(10)=-3\cdot17^2+54\cdot17-96=-45$ $\to$ pérdidas de 45000 euros.