Solución de los Problemas Propuestos

1. Expresa con notación de intervalos los siguientes conjuntos de números reales x:

a) $-3 < x < 2$; b) $x \geq -1$; c) $5 < x \leq 7$; d) $x \leq -2$.

Solución:

a) $-3 < x < 2 \rightarrow x \in (-3,\ 2)$; b) $x \geq -1 \rightarrow x \in [-1,\ +\infty)$.

c) $5 < x \leq 7 \rightarrow x \in (5,\ 7]$; d) $x \leq -2 \rightarrow x \in (-\infty,\ -2]$.

2. Dados los intervalos $A = (-2, 5)$, $B = [1, 7]$ y $C = (0, +\infty)$, determina:

a) $A \cup B$, b) $A \cap C$; c) $A - C$; d) $C - B$.

Haz su representación gráfica en todos los casos.

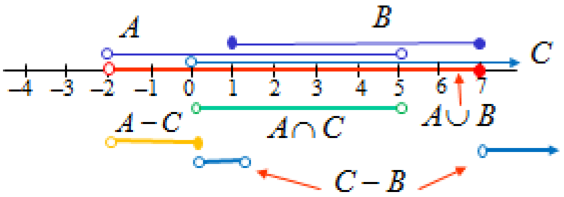
Solución:

a) $A \cup B = (-2, 7]$.

b) $A \cap C = (0, 5)$.

c) $A - C = (-2, 0]$.

d) $C - B = (0, 1) \cup (7, +\infty)$.



3. Dados los intervalos $A = [-3, 2]$, $B = (-2, 3)$ y $C = (-\infty, 0)$, representa gráficamente y expresa mediante notación de intervalos el resultado de:

a) $A \cup B$; b) $A \cap C$; c) $C - A$; d) $A - C$; e) $\mathbf{R} - B$.

Solución:

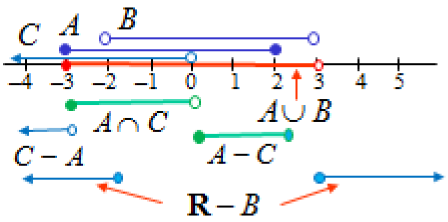
a) $A \cup B = [-3, 3)$.

b) $A \cap C = [-3, 0)$.

c) $C - A = (-\infty, -3)$.

d) $A - C = [0, 2]$.

e) $\mathbf{R} - B = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$.



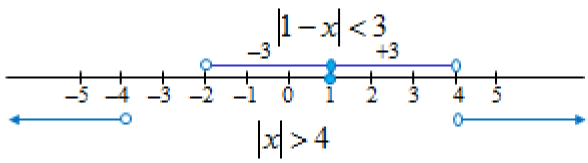
4. Representa gráficamente los números reales x que cumplen la condición:

a) $|x| > 4$; b) $|1 - x| < 3$; c) $|x + 2| \leq 2$; d) $|x - 3| \geq 0{,}5$.

Solución:

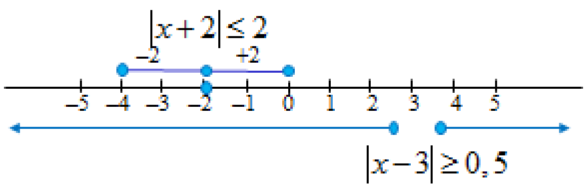
a) $|x| > 4 \rightarrow$ Números que distan de 0 más de 4

$\Leftrightarrow x \in (-\infty,\ -4) \cup (4,\ +\infty)$.



b) $|1 - x| < 3 \Leftrightarrow |x - 1| < 3 \rightarrow$ Números que distan de 1 menos de 3 $\Leftrightarrow x \in (-2,\ 4)$.

c) $|x + 2| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x + 2 \leq 2$ (restando 2 a cada miembro) $-4 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-4, 0]$.



d) $|x - 3| \geq 0{,}5 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \leq -0{,}5 \\ x - 3 \geq 0{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2{,}5 \\ x \geq 3{,}5 \end{cases} \Rightarrow$

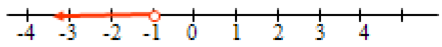
$\Rightarrow x \in (-\infty,\ 2{,}5] \cup [3{,}5,\ +\infty)$.

5. Escribe en forma de intervalo y representa en la recta real, los conjuntos:

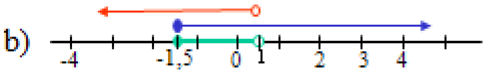
a) $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x<-1\}$; b) $B=\{x\in\mathbf{R}\mid x<1/2 \text{ y } x\geq -1{,}5\}$; c) $C=\{x\in\mathbf{R}\mid x\leq 1 \text{ o } x>3\}$.

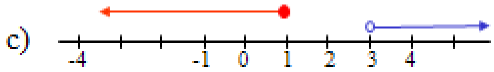
<u>Solución</u>:

a) $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x<-1\}=(-\infty,\,-1)$.



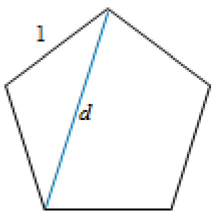
b) $B=\{x\in\mathbf{R}\mid x<1/2 \text{ y } x\geq -1{,}5\}=(-\infty,\,1/2)\cap[-1{,}5,\,+\infty)=[-1{,}5,\,1/2)$.



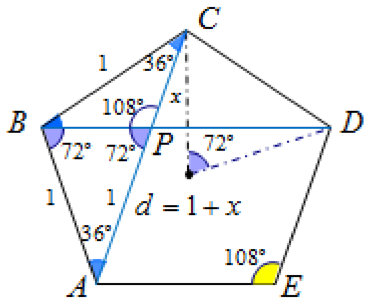


c) $C=\{x\in\mathbf{R}\mid x\leq 1 \text{ o } x>3\}=(-\infty,\,1]\cup(3,\,+\infty)$.

6. Demuestra que la diagonal de un pentágono regular de lado 1 vale el número áureo.



<u>Solución</u>:



Se trazan dos diagonales, AC y BD, que se cortan en el punto P.
Como el ángulo central correspondiente a cada lado vale 72º $\Rightarrow$ cada ángulo interior del pentágono vale 108º $\Rightarrow$ los ángulos BAC y BCA miden 36º $\Rightarrow$ los triángulos ABC y BPC son semejantes. Cumpliéndose que $\dfrac{|AC|}{|BC|}=\dfrac{|BC|}{|PC|}$.

También se puede observar que el triángulo ABP es isósceles: los ángulos ABP y APB miden 72º cada uno $\Rightarrow$ sus lados AB y AP son iguales: miden 1. Luego, la diagonal $d=1+x$.

Por tanto,

$$\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{|BC|}{|PC|}\Rightarrow \frac{1+x}{1}=\frac{1}{x}\Rightarrow\ x^2+x=1\Rightarrow x^2+x-1=0\ \Rightarrow\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Como $d=1+x=1+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\ \to\ d=\Phi$, el número áureo.

7. La renta per cápita de un país se ha redondeado a cientos de euros en 21500. Da el intervalo en el que se mueve ese valor de renta. ¿Qué error absoluto y relativo máximo se está asumiendo?

<u>Solución</u>:

Todos los números cuyo redondeo, a centenas, es 21500 están comprendidos entre 21450 y 21549,99.
Son todos los números pertenecientes al intervalo [21450, 21499,99) $\to$ como hablamos de euros hay que llegar a los céntimos.
El error absoluto máximo que se comete es de 50 €.

El error relativo máximo será: $E_r=\dfrac{50}{21450}=0{,}00233...\to$ 0,233 %.

8. Comprueba que cuando se da un resultado redondeado con dos cifras decimales, el error absoluto que se asume es menor o igual que 5 milésimas.

<u>Solución</u>:

Redondear con dos decimales es una operación bastante frecuente. Por ejemplo, 34,2347 se redondea a 34,23; 0,4568, a 0,46; 4,005, a 4,01.
El error absoluto es de 0,0047, 0,0032 y 0,005, respectivamente.

En general:
→ si la cifra de las milésimas es 4 (o menos) la cifra de las centésimas se mantiene; así puede despreciarse una cantidad de 0,004999…. < 0,005. Por ejemplo, 12,47499 ≈ 12,47;
→ si la cifra de las de las milésimas es 5 (o más) la cifra de las centésimas sube una unidad; así puede incrementarse una cantidad de 0,005. Por ejemplo, 12,465 ≈ 12,47.
Todos los números del intervalo [12,465, 12,475) se redondean a 12,47.
En todos los casos, el error absoluto es igual o menor que 5 milésimas.

9. a) Indica el orden de magnitud de los siguientes números:
$7{,}03 \times 10^8$; $3{,}203 \times 10^{12}$; $2{,}25 \times 10^{-3}$; $4{,}78 \times 10^{-5}$.
b) Escríbelos con todas sus cifras.
Solución:
a) Los órdenes de magnitud son: centenas de millón, billones, milésimas y cienmilésimas, respectivamente.

b) $7{,}03 \times 10^8 \to 703\,000\,000$; $3{,}203 \times 10^{12} \to 3\,203\,000\,000\,000$;
$2{,}25 \times 10^{-3} \to 0{,}00225$; $4{,}78 \times 10^{-5} \to 0{,}0000478$.

10. Escribe con notación científica, dejando cuatro cifras significativas, los siguientes números:
a) 2347800567; b) 40053890600; c) 0,0000050734; d) 0,000000070456.
Indica, en cada caso, los errores absoluto y relativo que se asumen.
Solución:
a) $2347800567 = 2{,}348 \times 10^9$.
Error absoluto: $|2347800567 - 2348000000| = 199433$.
Error relativo: $E_r = \dfrac{199433}{2347800567} \approx 0{,}000085$.

b) $40053890600 = 4{,}005 \times 10^{10}$.
Error absoluto: $|40053890600 - 40050000000| = 3890600$.
Error relativo: $E_r = \dfrac{3890600}{40053890600} \approx 0{,}000097$.

c) $0{,}0000050734 = 5{,}073 \times 10^{-6}$.
Error absoluto: $|0{,}0000050734 - 0{,}000005073| = 0{,}0000000004$.
Error relativo: $E_r = \dfrac{0{,}0000000004}{0{,}0000050734} \approx 0{,}000079$.

d) $0{,}000000070456 = 7{,}046 \times 10^{-8}$.
Error absoluto: $|0{,}000000070456 - 0{,}00000007046| = 4 \times 10^{-12}$.
Error relativo: $E_r = \dfrac{0{,}000000000004}{0{,}000000070456} \approx 0{,}100006$.

11. Calcula:
a) $\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\right)\cdot\dfrac{4}{5}-2$; b) $\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{4}{5}-2\right)$; c) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4}{5}-2$; d) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{4}{5}-2\right)$.
Observa que en los cuatro casos intervienen las mismas fracciones; cambia la disposición de los paréntesis. Utiliza la calculadora para comprobar tus resultados.
Solución:

a) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}-2=\left(\frac{3+4}{12}\right)\cdot\frac{4}{5}-2=\frac{7}{12}\cdot\frac{4}{5}-2=\frac{28}{60}-2=\frac{28-120}{60}=-\frac{92}{60}=-\frac{23}{15}$.

❖ Calculadora: (1/4+1/3)×4/5–2= → –23/15. Puede aparecer una expresión parecida a –1/8/15, cuyo significado es el *número mixto* $-\left(1\frac{8}{15}\right)$, cuyo significado es $-\left(1+\frac{8}{15}\right)=-\frac{23}{15}$.

b) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}-2\right)=\left(\frac{7}{12}\right)\cdot\left(\frac{4-10}{5}\right)=\left(\frac{7}{12}\right)\cdot\left(\frac{-6}{5}\right)=-\frac{42}{60}=-\frac{7}{10}$.

❖ Calculadora: (1/4+1/3)×(4/5–2)= → –7/10.

c) $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}-2=\frac{1}{4}+\frac{4}{15}-2=\frac{15}{60}+\frac{16}{60}-\frac{120}{60}=-\frac{89}{60}$.

❖ Calculadora: 1/4+1/3×4/5–2= → –89/60 (o bien –1/29/60).

d) $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{5}-2\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)=\frac{1}{4}-\frac{6}{15}=\frac{15-24}{60}=-\frac{9}{60}=-\frac{3}{20}$.

❖ Calculadora: 1/4+1/3×(4/5–2)= → –3/20.

12. Simplificando el resultado, halla:

a) $\frac{12^4\cdot(-3)^5}{36^4}$; b) $\frac{10\cdot 8^2\cdot 5}{800}$; c) $\frac{6^3\cdot 10^2\cdot 7^3}{49^2\cdot 30^2}$; d) $\frac{(-2)^7\cdot 5^2-2^4}{2^5\cdot 5}$

Solución:

a) $\frac{12^4\cdot(-3)^5}{36^4}=\frac{\left(3\cdot 2^2\right)^4\cdot(-3)^5}{\left(3^2\cdot 2^2\right)^4}=\frac{3^4\cdot 2^8\cdot(-3)^5}{3^8\cdot 2^8}=\frac{-3}{1}=-3$.

b) $\frac{10\cdot 8^2\cdot 5}{800}=\frac{10\cdot 8^2\cdot 5}{8\cdot 10\cdot 10}=\frac{8\cdot 5}{10}=4$.

c) $\frac{6^3\cdot 10^2\cdot 7^3}{49^2\cdot 30^2}=\frac{2^3\cdot 3^3\cdot 10^2\cdot 7^3}{7^4\cdot 3^2\cdot 10^2}=\frac{2^3\cdot 3}{7}=\frac{24}{7}$.

d) $\frac{(-2)^7\cdot 5^2-2^4}{2^5\cdot 5}=\frac{2^4\left[(-2)^3\cdot 5^2-1\right]}{2^5\cdot 5}=\frac{(-2)^3\cdot 5^2-1}{2\cdot 5}=\frac{-8\cdot 25-1}{10}=\frac{-201}{10}$.

→ Comprueba estos resultados utilizando la calculadora.

13. Simplifica (sin utilizar calculadora):

a) $\left(\sqrt{3}\right)^6$; b) $\left(\sqrt[4]{46}\right)^4$; c) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}$; d) $\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2$.

Solución:

a) $\left(\sqrt{3}\right)^6=\sqrt{3^6}=3^3=27$.

b) $\left(\sqrt[4]{46}\right)^4=46$.

c) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}=\sqrt{5\cdot 125}=\sqrt{625}=25$.

d) $\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2=7-4\cdot 3=-5$.

14. Halla el resultado de las operaciones siguientes:

a) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{3\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}$; c) $\sqrt{\frac{8}{32}}$; d) $\left(\sqrt{2}\right)^6$.

Solución:

a) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{9\cdot 2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3$. b) $\frac{3\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{4\cdot 2}}{2\sqrt{2}}=\frac{3\cdot 2\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=3$.

c) $\sqrt{\frac{8}{32}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.

d) $\left(\sqrt{2}\right)^6=\left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^3=2^3=8$. De otra forma: $\left(\sqrt{2}\right)^6=\left(2^{1/2}\right)^6=2^{\frac{1}{2}\cdot 6}=2^3=8$.

15. Suma, agrupando todo lo que puedas:

a) $5\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{3}\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{200}-7\sqrt{8}$; c) $3\sqrt{5}\left(2-\sqrt{5}\right)$; d) $\left(4-\sqrt{3}\right)\cdot\left(4+\sqrt{3}\right)$.

Solución:

a) $5\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{3}\sqrt{3}=\left(5-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}\right)\cdot\sqrt{3}=\left(\frac{30}{6}-\frac{3}{6}+\frac{10}{6}\right)\cdot\sqrt{3}=\frac{37}{6}\cdot\sqrt{3}$.

b) $3\sqrt{200}-7\sqrt{8}=3\sqrt{100\cdot 2}-7\sqrt{4\cdot 2}=3\cdot 10\cdot\sqrt{2}-7\cdot 2\sqrt{2}=30\sqrt{2}-14\sqrt{2}=16\sqrt{2}$.

c) $3\sqrt{5}\left(2-\sqrt{5}\right)=6\sqrt{5}-3\cdot 5=6\sqrt{5}-15$.

d) $\left(4-\sqrt{3}\right)\cdot\left(4+\sqrt{3}\right)=16+4\sqrt{3}-4\sqrt{3}-3=13$.

16. Extrae todos los factores que puedas de las siguientes expresiones radicales:

a) $\sqrt{16a^2b^3}$; b) $\sqrt{(a+5)^2}$; c) $\sqrt{216x^5}$; d) $\sqrt{50a^4b+9}$.

Solución:

a) $\sqrt{16a^2b^3}=4ab\sqrt{b}$. b) $\sqrt{(a+5)^2}=a+5$.

c) $\sqrt{216x^5}=\sqrt{2^3\cdot 3^3\cdot x^4\cdot x}=2\cdot 3\cdot x^2\sqrt{2\cdot 3\cdot x}=6x^2\sqrt{6x}$.

d) $\sqrt{50a^4b+9}\rightarrow$ No hay factores comunes en el radicando.

17. Extrae del radical todos los factores que puedas:

a) $\sqrt{4^2+3^2}$; b) $\sqrt{a^2x+a^3x^2}$; c) $\sqrt{9x^2+81}$; d) $\sqrt{27(a+5)^2}$.

Solución:

a) $\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$. b) $\sqrt{a^2x+a^3x^2}=\sqrt{a^2\left(x+ax^2\right)}=a\cdot\sqrt{x+ax^2}$.

c) $\sqrt{9x^2+81}=\sqrt{9\left(x^2+9\right)}=3\sqrt{x^2+9}$. d) $\sqrt{27(a+5)^2}=\sqrt{3\cdot 9\cdot(a+5)^2}=3(a+5)\sqrt{3}$.

18. Racionaliza las expresiones:

a) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$; c) $\frac{4+\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$; d) $\frac{3-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$.

Solución:

a) $\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. b) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{2\cdot 3}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

c) $\frac{4+\sqrt{12}}{\sqrt{2}}=\frac{\left(4+\sqrt{12}\right)\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{24}}{2}=\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{4\cdot 6}}{2}=\frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

d) $\frac{3-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}-2}{4}$.

19. Racionaliza las expresiones:

a) $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{7+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$; c) $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; d) $\frac{3\sqrt{5}}{10+\sqrt{20}}$.

Solución:

a) $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$.

b) $\frac{7+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\left(7+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{7\sqrt{2}+7+3\cdot 2+3\sqrt{2}}{2-1}=13+10\sqrt{2}$.

c) $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{2\sqrt{6}+4-3-\sqrt{6}}{3-2}=\sqrt{6}+1$.

d) $\frac{3\sqrt{5}}{10+\sqrt{20}}=\frac{3\sqrt{5}\cdot\left(10-\sqrt{20}\right)}{\left(10+\sqrt{20}\right)\cdot\left(10-\sqrt{20}\right)}=\frac{30\sqrt{5}-3\sqrt{100}}{100-20}=\frac{30\sqrt{5}-30}{80}=\frac{3\sqrt{5}-3}{8}$.

20. Calcula, simplificando al máximo, el valor de:

a) $\frac{\sqrt{56}}{2\sqrt{14}}$; b) $\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{28}}-\frac{5\sqrt{32}}{2\sqrt{8}}$; c) $\frac{2\sqrt{20}+\sqrt{80}+2\sqrt{125}}{3\sqrt{45}}$.

Solución:

a) $\frac{\sqrt{56}}{2\sqrt{14}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{56}{14}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}=1$.

b) $\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{28}}-\frac{5\sqrt{32}}{2\sqrt{8}}=\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{7\cdot 4}}-\frac{5\sqrt{8\cdot 4}}{2\sqrt{8}}=\frac{2}{3\sqrt{4}}-\frac{5\sqrt{4}}{2}=\frac{2}{3\cdot 2}-\frac{5\cdot 2}{2}=\frac{1}{3}-5=-\frac{14}{3}$.

c) $\frac{2\sqrt{20}+\sqrt{80}+2\sqrt{125}}{3\sqrt{45}}=\frac{2\sqrt{4\cdot 5}+\sqrt{16\cdot 5}+2\sqrt{25\cdot 5}}{3\sqrt{9\cdot 5}}=\frac{2\cdot 2\sqrt{5}+4\sqrt{5}+2\cdot 5\sqrt{5}}{3\cdot 3\sqrt{5}}=\frac{18\sqrt{5}}{9\sqrt{5}}=2$.

21. Halla el resultado simplificado de las siguientes sumas y restas de radicales:

a) $7\sqrt{8}-3\sqrt{12}-\sqrt{32}+4\sqrt{75}$; b) $-2\sqrt{20}+\sqrt{125}-\frac{6}{5}\sqrt{45}-3\sqrt{5}$.

Solución:

a) $7\sqrt{8}-3\sqrt{12}-\sqrt{32}+4\sqrt{75} = 7\sqrt{4\cdot 2}-3\sqrt{4\cdot 3}-\sqrt{16\cdot 2}+4\sqrt{25\cdot 3} = 7\cdot 2\sqrt{2}-3\cdot 2\sqrt{3}-4\sqrt{2}+4\cdot 5\sqrt{3} =$

$= 14\sqrt{2}-4\sqrt{2}-6\sqrt{3}+20\sqrt{3} = 10\sqrt{2}+14\sqrt{3}$.

b) $-2\sqrt{20}+\sqrt{125}-\frac{6}{5}\sqrt{45}-3\sqrt{5} = -2\sqrt{4\cdot 5}+\sqrt{25\cdot 5}-\frac{6}{5}\sqrt{9\cdot 5}-3\sqrt{5} =$

$= -2\cdot 2\sqrt{5}+5\sqrt{5}-\frac{6}{5}\cdot 3\sqrt{5}-3\sqrt{5} = \left(-4+5-\frac{18}{5}-3\right)\cdot\sqrt{5} = \frac{28\sqrt{5}}{5}$.

22. Halla, racionalizando los resultados, el valor de las siguientes expresiones:

a) $\frac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}-2\sqrt{125}}{\sqrt{12}}$; b) $\frac{8\sqrt{72}-3\sqrt{288}-2\sqrt{338}}{\sqrt{98}}$; c) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{45}}{2\sqrt{5}}$.

Solución:

a) $\frac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}-2\sqrt{125}}{\sqrt{12}} = \frac{3\sqrt{4\cdot 5}+\sqrt{16\cdot 5}-2\sqrt{25\cdot 5}}{\sqrt{12}} = \frac{6\sqrt{5}+4\sqrt{5}-10\sqrt{5}}{\sqrt{12}} = \frac{0}{\sqrt{12}} = 0$.

b) $\frac{8\sqrt{72}-3\sqrt{288}-2\sqrt{338}}{\sqrt{98}} = \frac{8\sqrt{36\cdot 2}-3\sqrt{144\cdot 2}-2\sqrt{169\cdot 2}}{\sqrt{49\cdot 2}} = \frac{(48-36-26)\sqrt{2}}{7\cdot\sqrt{2}} = \frac{-14}{7} = -2$.

c) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{45}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{25\cdot 5}}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{9\cdot 5}}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}}-\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 5-\frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.

23. Calcula y simplifica todo lo posible cada una de las expresiones siguientes:

a) $\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)^2-\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)$.

b) $\sqrt{a^3-a^2b}+\sqrt{(a-b)(a^2-2ab+b^2)}+\sqrt{ab^2-b^3}$.

Solución:

a) Desarrollando los cuadrados y multiplicando:

$\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)^2-\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right) =$

$= \left(\sqrt{x}\right)^2+\left(2\sqrt{y}\right)^2+2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{y}+\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(2\sqrt{y}\right)^2-2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{y}-\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(2\sqrt{y}\right)^2\right] =$

$= x+4y+4\sqrt{xy}+x+4y-4\sqrt{xy}-x+4y = x+12y$.

b) En todas las raíces puede extraerse algún factor.

$\sqrt{a^3-a^2b}+\sqrt{(a-b)(a^2-2ab+b^2)}+\sqrt{ab^2-b^3} =$

$= \sqrt{a^2(a-b)}+\sqrt{(a-b)(a-b)^2}+\sqrt{b^2(a-b)} = a\sqrt{a-b}+(a-b)\sqrt{a-b}+b\sqrt{a-b} =$

$= (a+a-b+b)\sqrt{a-b} = 2a\sqrt{a-b}$.

24. Demuestra que las igualdades $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $ax^2+bx+c=0$ son equivalentes.

Solución:

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow 2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac} \Leftrightarrow 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac} \rightarrow$ elevando al cuadrado $\rightarrow (2ax+b)^2=\left(\pm\sqrt{b^2-4ac}\right)^2 \Leftrightarrow 4a^2x+4abx+b^2=b^2-4ac \;\; 4a^2x+4abx+4ac=0 \rightarrow$ dividiendo por $4a \rightarrow ax^2+bx+c=0$.

Nota: Este resultado justifica que la solución de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ es $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.