TEMA 8. Integrales
Problemas Resueltos

Integrales inmediatas

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \left(x^2+6x-3\right)dx$ b) $\int \left(3-2x+3x^4\right)dx$ c) $\int \left(3x^2+x-2\sqrt{x}\right)dx$

d) $\int x\left(4-4x^2\right)dx$ e) $\int 5x\left(1-2x^2\right)^2 dx$ f) $\int (2-3x)^2 dx$

g) $\int \frac{3}{2\sqrt{x+1}}dx$ h) $\int \left(x+x^{1/2}-x^{2/3}\right)dx$ i) $\int \frac{3}{x^2}dx$

Solución:
En la mayoría de los casos hay que ajustar constantes y operar cuando sea necesario.

a) $\int \left(x^2+6x-3\right)dx = \frac{x^3}{3}+3x^2-3x+c$.

b) $\int \left(3-2x+3x^4\right)dx = 3x-x^2+\frac{3}{5}x^5+c$.

c) $\int \left(3x^2+x-2\sqrt{x}\right)dx = x^3+\frac{1}{2}x^2-2\int x^{1/2}dx = x^3+\frac{1}{2}x^2-2\frac{x^{3/2}}{3/2}+c$.

d) $\int x\left(4-4x^2\right)dx = \int \left(4x-4x^3\right)dx = 2x^2-x^4+c$.

e) $\int 5x\left(1-2x^2\right)^2 dx = -\frac{5}{4}\int \left(-4x\left(1-2x^2\right)^2\right)dx = -\frac{5}{4}\cdot\frac{\left(1-2x^2\right)^3}{3}+c = -\frac{5}{12}\left(1-2x^2\right)^3+c$.

f) Se opera en el integrando:

$\int (2-3x)^2 dx = \int \left(4-12x+9x^2\right)dx = 4x-6x^2+3x^3+c$.

g) Es inmediata: $\int \frac{3}{2\sqrt{x+1}}dx = 3\int \frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx = 3\sqrt{x+1}+c$.

h) $\int \left(x+x^{1/2}-x^{2/3}\right)dx = \frac{x^2}{2}+\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^{5/3}}{5/3}+c = \frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{3}{5}x^{5/3}+c$.

i) $\int \frac{3}{x^2}dx = 3\int x^{-2}dx = 3\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+c = -\frac{3}{x}+c$.

2. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 5x(1-2x)^2 dx$ b) $\int \left(3x^2-2x\right)^2 dx$ c) $\int \frac{x}{1+3x^2}dx$

d) $\int (1-x)^3 dx$ e) $\int x(1-x)^3 dx$ f) $\int \frac{(x-1)^3}{x}dx$

Solución:

a) $\int 5x(1-2x)^2 dx = \int 5x\left(1-4x+4x^2\right)dx = \int \left(5x-20x^2+20x^3\right)dx = \frac{5}{2}x^2-\frac{20}{3}x^3+5x^4+c$.

b) $\int \left(3x^2-2x\right)^2 dx = \int \left(9x^4-12x^3+4x^2\right)dx = \frac{9}{5}x^5-3x^4+\frac{4}{3}x^3+c$.

c) $\int \frac{x}{1+3x^2}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{1+3x^2}dx = \frac{1}{6}\ln\left(1+3x^2\right)+c$.

d) Desarrollando el integrando:

$$\int (1-x)^3 dx = \int \left(1-3x+3x^2-x^3\right)dx = x-\frac{3}{2}x^2+x^3-\frac{1}{4}x^4+c.$$

También podría hacerse directamente ajustando constantes:

$$\int (1-x)^3 dx = -\int (-1)(1-x)^3 dx = -\frac{(1-x)^4}{4}+c.$$

e) Hay que desarrollar el cubo, multiplicar e integrar: $\int x(1-x)^3 dx =$

$$= \int x\left(1-3x+3x^2-x^3\right)dx = \int \left(x-3x^2+3x^3-x^4\right)dx = \frac{1}{2}x^2-x^3+\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5+c.$$

f) Hay que desarrollar el cubo, dividir e integrar:

$$\int \frac{(x-1)^3}{x}dx = \int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x}dx = \int \left(x^2-3x+3-\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-\ln x+c.$$

3. Calcula:

a) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$ b) $\int \sqrt{x}\left(7x^2+3\right)dx$ c) $\int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2}dx$

d) $\int \frac{4x^2}{\sqrt{3-x^3}}dx$ e) $\int \frac{5x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ f) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Solución:

a) Ajustando constantes:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}dx = \frac{2}{3}\int \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{3x^2+1}+c.$$

b) Se opera dentro del integrando:

$$\int \sqrt{x}\left(7x^2+3\right)dx = \int \left(7x^{5/2}+3x^{1/2}\right)dx = \frac{7x^{7/2}}{7/2}+\frac{3x^{3/2}}{3/2}+c = 2x^{7/2}+2x^{3/2}+c.$$

c) Se hace la división:

$$\int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2}dx = \int \left(\frac{5}{x}+\sqrt{3}x^{-3/2}\right)dx = 5\ln x+\frac{\sqrt{3}}{-1/2}x^{-1/2}+c = 5\ln x-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}}+c.$$

d) Ajustando constantes:

$$\int \frac{4x^2}{\sqrt{3-x^3}}dx = -\frac{4\cdot 2}{3}\int \frac{-3x^2}{2\sqrt{3-x^3}}dx = -\frac{8}{3}\int \frac{-3x^2}{2\sqrt{3-x^3}}dx = -\frac{8}{3}\sqrt{3-x^3}+c.$$

e) Ajustando constantes:

$$\int \frac{5x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -5\int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx = -5\sqrt{1-x^2}+c.$$

f) Es inmediata: $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}dx = 5\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 5\arcsin x+c$.

4. Halla las integrales:

a) $\int \frac{3}{7x-4}dx$ b) $\int \frac{5x}{3+3x^2}dx$ c) $\int \frac{x^2}{x^3+2}dx$ d) $\int \frac{3}{1+x^2}dx$

Solución:

a) $\int \frac{3}{7x-4}dx = \frac{3}{7}\int \frac{7}{7x-4}dx = \frac{3}{7}\ln(7x-4)+c$.

b) $\int \frac{5x}{3+3x^2}dx = \frac{5}{6}\int \frac{6x}{3+3x^2}dx = \frac{5}{6}\ln\left(3+3x^2\right)+c$.

c) Ajustando constantes:

$$\int \frac{x^2}{x^3+2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+2}dx = \frac{1}{3}\ln\left(x^3+2\right)+c.$$

d) Es inmediata: $\int \frac{3}{1+x^2}dx = 3\cdot\int \frac{1}{1+x^2}dx = 3\arctan x + c$.

5. Resuelve las integrales:

a) $\int \cos(4x+3)dx$ b) $\int \left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos 5x\right)dx$ c) $\int \left(3\cos\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{5}\right)dx$

d) $\int x\cos\left(3x^2\right)dx$ e) $\int \left(\cos(2x) - 3e^{2x-3}\right)dx$ f) $\int \cos x\cdot(\sin x)^2\,dx$

g) $\int (\sin 2x - 3\cos 5x)\,dx$ h) $\int (\sin x + \cos x)^2\,dx$ i) $\int (\sin x - \cos x)^2\,dx$

Solución:

a) $\int \cos(4x+3)dx = \frac{1}{4}\int 4\cos(4x+3)dx = \frac{1}{4}\sin(4x+3)+c$.

b) $\int \left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos 5x\right)dx = \frac{1}{2}\int 2\sin 2x dx - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\int 5\cos 5x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{15}\sin 5x + c$.

c) $\int \left(3\cos\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{5}\right)dx = 6\int \left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx - \frac{1}{10}\int 2\sin 2x dx = 6\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{10}\cos 2x + c$.

d) $\int x\cos\left(3x^2\right)dx = \frac{1}{6}\int 6x\cos\left(3x^2\right)dx = \frac{1}{6}\sin\left(3x^2\right)+c$.

e) Ajustando constantes en cada una de las funciones:

$$\int \left(\cos(2x) - 3e^{2x-3}\right)dx = \int \cos(2x)dx - \int \left(3e^{2x-3}\right)dx = \frac{1}{2}\int 2\cos(2x)dx - \frac{3}{2}\int \left(2e^{2x-3}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{3}{2}e^{2x-3} + c.$$

f) Recuerda que $\int f^n \cdot f'dx = \frac{f^{n+1}}{n+1}$. Aquí, $f(x) = \sin x$.

Ajustando constantes:

$$\int \cos x\cdot(\sin x)^2\,dx = \frac{1}{3}\int 3(\sin x)^2\cdot\cos x dx = \frac{1}{3}(\sin x)^3 + c.$$

g) $\int (\sin 2x - 3\cos 5x)\,dx = \int \sin 2x dx - \int 3\cos 5x dx = \frac{1}{2}\int 2\sin 2x dx - \frac{3}{5}\int 5\cos 5x dx =$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{3}{5}\sin 5x + c.$$

h) $\int (\sin x + \cos x)^2\, dx =$

$= \int \left(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x\right) dx = \int (1 + 2\sin x \cos x)\, dx = x + \sin^2 x + c$.

i) $\int (\sin x - \cos x)^2\, dx =$

$= \int \left(\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x\right) dx = \int (1 - 2\sin x \cos x)\, dx = x + \cos^2 x + c$.

También se puede escribir:

$\int (\sin x - \cos x)^2\, dx = x - \sin^2 x + c$, pues $x + \cos^2 x = x + \left(1 - \sin^2 x\right) + c = x - \sin^2 x + (1 + c)$.

6. Halla:

a) $\int e^{4x} dx$ b) $\int e^{x/3} dx$ c) $\int x e^{1-x^2} dx$

d) $\int 4^x\, dx$ e) $\int 4 \cdot 3^x\, dx$ f) $\int 20x \cdot 3^{x^2}\, dx$

Solución:

a) $\int e^{4x} dx = \frac{1}{4}\int 4e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} + c$.

b) $\int e^{x/3} dx = 3\int \frac{1}{3} e^{x/3} dx = 3e^{x/3} + c$.

c) $\int x e^{1-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int \left(-2xe^{1-x^2}\right) dx = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + c$.

d) $\int 4^x\, dx = 4^x \cdot \frac{1}{\ln 4} + c$.

e) $\int 4 \cdot 3^x\, dx = 4\int 3^x\, dx = 4 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + c = \frac{4}{\ln 3} \cdot 3^x + c$.

f) $\int 20x \cdot 3^{x^2}\, dx = 10\int 2x \cdot 3^{x^2}\, dx = 10 \cdot 3^{x^2} \cdot \frac{1}{\ln 3} + c = \frac{10}{\ln 3} \cdot 3^{x^2} + c$.

7. Calcula:

a) $\int \frac{e^{-2x}}{5} dx$ b) $\int 2xe^{3x^2} dx$ c) $\int 20e^{0,2x} dx$

d) $\int \left(e^x + e^{-x}\right) dx$ e) $\int \left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx$ f) $\int \left(e^{2x} - \sin 2x\right) dx$

Solución:

Se opera si es necesario y se ajustan constantes.

a) $\int \frac{e^{-2x}}{5} dx = \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int \left(-2e^{-2x}\right) dx = -\frac{1}{10} e^{-2x} + c$.

b) $\int 2xe^{3x^2} dx = \frac{1}{3}\int 6xe^{3x^2} dx = \frac{1}{3} e^{3x^2} + c$.

c) $\int 20e^{0,2x} dx = 100\int 0,2e^{0,2x} dx = 100e^{0,2x} + c$.

d) $\int\left(e^{x}+e^{-x}\right)dx=e^{x}-e^{-x}+c$.

e) $\int\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}dx=\int\left(e^{2x}+e^{-2x}+2e^{x}\cdot e^{-x}\right)dx=\int e^{2x}dx+\int e^{-2x}dx+\int 2dx=$

$=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x+c$.

f) $\int\left(e^{2x}-\sin 2x\right)dx=\frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx-\frac{1}{2}\int 2\sin xdx=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\cos 2x+c$.

Integración por cambio de variable

8. Calcula las siguientes integrales haciendo el cambio que se indica:

a) $\int x\sqrt{1-x^{2}}dx\rightarrow(1-x^{2}=t)$ b) $\int(\sin x)^{3}dx\rightarrow(\cos x=t)$

c) $\int\frac{dx}{x(4-\ln x)}\rightarrow(t=\ln x)$ d) $\int x\sqrt[3]{4+x^{2}}dx\rightarrow(4+x^{2}=t)$

Solución:

a) Si $1-x^{2}=t\Rightarrow-2xdx=dt\Rightarrow xdx=-\frac{1}{2}dt$.

Por tanto:

$$\int x\sqrt{1-x^{2}}dx=\int\sqrt{1-x^{2}}\,(xdx)=-\frac{1}{2}\int t^{1/2}dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2}+c=-\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^{2}\right)^{3}}+c$$

Observación: $\int x\sqrt{1-x^{2}}dx$ puede hacerse directamente (es inmediata), pues:

$$\int x\sqrt{1-x^{2}}dx=-\frac{1}{2}\int\left(-2x(1-x^{2})^{1/2}\right)dx=-\frac{1}{2}\frac{(1-x^{2})^{3/2}}{3/2}+c=-\frac{1}{3}(1-x^{2})^{3/2}+c$$

b) Si $\cos x=t\Rightarrow-\sin xdx=dt$.

Como

$$\int\sin^{3}xdx=\int\sin x\cdot\sin^{2}xdx=\int\sin x\cdot(1-\cos^{2}x)dx=-\int\left(1-\cos^{2}x\right)\left(-\sin xdx\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\sin^{3}xdx=-\int\left(1-t^{2}\right)dt=-t+\frac{t^{3}}{3}+c=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^{3}x+c.$$

c) Si $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$.

Luego:

$$\int\frac{dx}{x(4-\ln x)}=\int\frac{1}{(4-\ln x)}\cdot\left(\frac{1}{x}dx\right)=\int\frac{1}{4-t}dt=-\ln\left(4-t\right)+c=-\ln\left(4-\ln x\right)+c.$$

d) Si $4+x^{2}=t\Rightarrow 2xdx=dt\Rightarrow xdx=\frac{1}{2}dt$.

Por tanto:

$$\int x\sqrt[3]{4+x^{2}}dx=\int\left(4+x^{2}\right)^{1/3}\cdot\left(xdx\right)=\int t^{1/3}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{4/3}}{4/3}+c=\frac{3}{8}\left(4+x^{2}\right)^{4/3}+c.$$

Observación: También se puede hacer ajustando constantes, pues:

$$\int x\sqrt[3]{4+x^{2}}dx=\frac{1}{2}\int 2x\left(4+x^{2}\right)^{1/3}dx=\left(\int f'(x)\cdot\left(f(x)\right)^{n}\right)=\frac{1}{2}\frac{\left(4+x^{2}\right)^{1/3+1}}{1/3+1}+c=$$

$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(4+x^2\right)^4} + c$.

9. Halla la integral indefinida $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ mediante el cambio de variable $\sqrt{x} = t$.

Solución:

Si $\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}dt = 2tdt$.

Por tanto,

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{1+t}2tdt = \int \frac{2t}{1+t}dt = \int \frac{2(1+t)-2}{1+t}dt = \int \left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt = 2t - 2\ln(1+t) + c =$$

$= \text{(deshaciendo el cambio)} = 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + c$.

10. Haciendo el cambio $2^x = t$, calcula la integral: $\int \frac{2^x}{1+2^{2x}}dx$.

Solución:

Si se hace el cambio $2^x = t \Rightarrow \left(2^x \ln 2\right)dx = dt \Rightarrow 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}dt$.

Por tanto,

$$\int \frac{2^x}{1+2^{2x}}dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{\ln 2}\cdot \arctan t + c = \frac{1}{\ln 2}\cdot \arctan\left(2^x\right) + c.$$

11. Haciendo el cambio que se indica, calcula:

a) $\int \left(-3xe^{x^2}\right)dx \to (t = x^2)$ b) $\int 4x^2 e^{5x^3}dx \to (t = 5x^3)$

Solución:

a) Si $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$.
Para sustituir fácilmente se escribe la integral dada en forma adecuada.

$$\int \left(-3xe^{x^2}\right)dx = -\frac{3}{2}\int e^{x^2}\left(2x\right)dx = -\frac{3}{2}\int e^t dt = -\frac{3}{2}e^t + c = -\frac{3}{2}e^{x^2} + c$$

b) Si $t = 5x^3 \Rightarrow dt = 15x^2 dx$.
Sustituyendo:

$$\int 4x^2 e^{5x^3}dx = \frac{4}{15}\int e^{5x^3}\left(15x^2\right)dx = \frac{4}{15}\int e^t dt = \frac{4}{15}e^t + c = \frac{4}{15}e^{5x^3} + c$$

12. Haciendo el cambio de variable $e^x = t$, halla:

a) $\int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx$ b) $\int \frac{3e^x}{2+5e^x}dx$

Solución:

Si $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$. Por tanto:

a) $\int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx = \int \frac{1}{\left(1+t\right)^2}dt = \int \left(1+t\right)^{-2}dt = -\left(1+t\right)^{-1} + c = \frac{-1}{1+t} + c$.

Deshaciendo el cambio: $\int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx = \frac{-1}{1+e^x} + c$.

b) $\int \frac{3e^x}{2+5e^x}dx = \int \frac{3}{2+5t}dt = \frac{3}{5}\int \frac{5}{2+5t}dt = \frac{3}{5}\ln\left(2+5t\right)+c = \frac{3}{5}\ln\left(2+5e^x\right)+c$.

Integración por descomposición en fracciones racionales

13. Calcula, descomponiendo el integrando, las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x-3}{x}dx$ b) $\int \frac{2x^2+3x+5}{x^2}dx$ c) $\int \frac{3x^3+2x^2-6x}{6}dx$

d) $\int \frac{2x-x^2+3x^3}{x^4}dx$ e) $\int \frac{x^3-3x^2+5}{4x^3}dx$ f) $\int \frac{x^3+5x^2-3x+2}{\sqrt{x}}dx$

g) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$ h) $\int \left(\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\right)dx$ i) $\int \frac{x^3-1}{x+3}dx$

Solución:

En todos los casos hay que dividir el integrando.

a) $\int \frac{2x-3}{x}dx = \int \left(2-\frac{3}{x}\right)dx = 2x - 3\ln x + c$.

b) $\int \frac{2x^2+3x+5}{x^2}dx = \int \left(2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)dx = 2x+3\ln x - \frac{5}{x} + c$.

c) $\int \frac{3x^3+2x^2-6x}{6}dx = \int \left(\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^2-x\right)dx = \frac{1}{8}x^4+\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{2}x^2+c$.

d) Se escribe el integrando como se indica:

$$\int \frac{2x-x^2+3x^3}{x^4}dx = \int \left(\frac{2x}{x^4}-\frac{x^2}{x^4}+\frac{3x^3}{x^4}\right)dx = \int \left(2x^{-3}-x^{-2}+\frac{3}{x}\right)dx = -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+3\ln x + c.$$

e) $\int \frac{x^3-3x^2+5}{4x^3}dx = \int \left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4x}+\frac{5}{4x^3}\right)dx = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\ln x - \frac{5}{8x^2}+c$.

f) Operando se tiene:

$$\int \frac{x^3+5x^2-3x+2}{\sqrt{x}}dx = \int \left(x^{5/2}+5x^{3/2}-3x^{1/2}+2x^{-1/2}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{7}x^{7/2}+5\frac{2}{5}x^{5/2}-3\frac{2}{3}x^{3/2}+2\cdot 2x^{1/2}+c = \left(\frac{2}{7}x^3+2x^2-2x+4\right)x^{1/2}+c.$$

g) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx = \int \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx = \int \left(x^{-1/4}-x^{-5/12}\right)dx = \frac{4}{3}x^{3/4}-\frac{12}{7}x^{7/12}+c$.

h) $\int \left(\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\right)dx = \int \left(\frac{4x^2+1}{4x^2+1}-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx = \int \left(1-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx = x - \frac{1}{2}\ln(4x^2+1)+c$.

i) Dividiendo el integrando (puede hacerse por Ruffini), se tiene:

$$\int \frac{x^3-1}{x+3}dx = \int \left(x^2-3x+9-\frac{28}{x+3}\right)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+9x-28\ln(x+3)+c.$$

14. a) Comprueba que $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{x^3+x}$. b) Calcula la integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x}dx$.

Solución:

a) Efectivamente: $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1}{x\left(x^2+1\right)}-\dfrac{x^2}{x\left(x^2+1\right)}=\dfrac{1}{x^3+x}$.

b) Por lo visto:

$$\int \frac{1}{x^3+x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c.$$

15. Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{2-3x+5x^2}{2x}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{(x-3)^2}{4x}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x^2+5}{x^2}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{3x^3-x^2+4x-5}{x}dx$ e) $\displaystyle\int \frac{3x^3-x^2+4x-5}{x+1}dx$ f) $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x^2+2}{x+1}dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int \frac{2-3x+5x^2}{2x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}x\right)dx=\ln x-\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}x^2+c.$

b) $\displaystyle\int \frac{(x-3)^2}{4x}dx=\int \frac{x^2-6x+9}{4x}dx=\int \frac{1}{4}xdx-\int \frac{3}{2}dx+\int \frac{9}{4x}dx=\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\ln x+c.$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x^2+5}{x^2}dx=\int\left(2x-3+\frac{5}{x^2}\right)dx=x^2-3x-\frac{5}{x}+c.$

d) $\displaystyle\int \frac{3x^3-x^2+4x-5}{x}dx=\int\left(3x^2-x+4-\frac{5}{x}\right)dx=x^3-\frac{1}{2}x^2+4x-5\ln x+c.$

e) $\displaystyle\int \frac{3x^3-x^2+4x-5}{x+1}dx=\int\left(3x^2-4x+8-\frac{13}{x+1}\right)dx=x^3-2x^2+8x-13\ln\left(x+1\right)+c.$

Se ha dividido: $\dfrac{3x^3-x^2+4x-5}{x+1}=3x^2-4x+8-\dfrac{13}{x+1}$.

f) Para hallar $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x^2+2}{x+1}dx$ hay que dividir antes (el método de Ruffini es adecuado).

Se obtiene: $\dfrac{2x^3-3x^2+2}{x+1}=2x^2-5x+5+\dfrac{-3}{x+1}$.

De donde:

$$\int \frac{2x^3-3x^2+2}{x+1}dx=\int\left(2x^2-5x+5+\frac{-3}{x+1}\right)dx=\int\left(2x^2-5x+5\right)dx+\int \frac{-3}{x+1}dx.$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x^3-3x^2+2}{x+1}dx=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+5x-3\ln(x+1)+c.$$

16. Calcula las integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2dx}{x^2-4}$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+2x-12}dx$

Solución:

Todas pueden hacerse por el método de descomposición en fracciones simples.

a) $\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx$.

Como las raíces del denominador son $x = 1$ y $x = -2$: $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$, se tiene la igualdad:

$$\frac{x+8}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}.$$

Luego:

$$x+8=A(x+2)+B(x-1).$$

si $x = 1$: $9 = 3A \Rightarrow A = 3$.

si $x = -2$: $6 = -3B \Rightarrow B = -2$.

Con esto:

$$\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx=\int \frac{3}{x-1}dx+\int \frac{-2}{x+2}dx=3\ln(x-1)-2\ln(x+2)+c.$$

b) $\int \frac{2dx}{x^2-4}$.

Como:

$$\frac{2}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2=A(x+2)+B(x-2)\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B=2 \end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{2} \text{ y } B=-\frac{1}{2}.$$

Luego,

$$\int \frac{2dx}{x^2-4}=\int\left(\frac{1/2}{x-2}-\frac{1/2}{x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln(x-2)-\frac{1}{2}\ln(x+2)+c.$$

c) $\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx$.

La ecuación $x^2-2x-3=0$ tiene soluciones reales: $x = -1$ y $x = 3$.

Por tanto:

$$\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}\Rightarrow \frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=A(x-3)+B(x+1)\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -3A+B=1 \end{cases}\Rightarrow A=-\frac{1}{4};\ B=\frac{1}{4}.$$

En consecuencia:

$$\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx = \int\left(\frac{-1/4}{x+1}+\frac{1/4}{x-3}\right)dx= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-3}dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln(x+1)+\frac{1}{4}\ln(x-3)+c.$$

d) $\int \frac{1}{2x^2+2x-12}dx$.

El denominador: $2x^2+2x-12=2(x-2)(x+3)$.

La descomposición que se hace es:

$$\frac{1}{2x^2+2x-12}=\frac{A}{2(x-2)}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+2B(x-2)}{2(x-2)(x+3)}.$$

Luego:

$1 = A(x+3) + 2B(x-2)$.

si $x = 2$: $1 = 5A \Rightarrow A = 1/5$.

si $x = -3$: $1 = -10B \Rightarrow B = -1/10$.

Por tanto:

$$\int \frac{1}{2x^2+2x-12}dx = \int\left(\frac{1/5}{2(x-2)} - \frac{1/10}{x+3}\right)dx = \frac{1}{10}\int\frac{1}{x-2}dx - \frac{1}{10}\int\frac{1}{x+3}dx =$$

$$= \frac{1}{10}\ln(x-2) - \frac{1}{10}\ln(x+3) + c.$$

17. Calcula las integrales:

a) $\int \frac{1}{x^2-1}dx$ b) $\int \frac{x}{x^2-1}dx$ c) $\int \frac{x^2}{x^2-1}dx$ d) $\int \frac{x^3}{x^2-1}dx$

Solución:

a) $\int \frac{1}{x^2-1}dx \to$ Hay que descomponer la función dada en fracciones simples.

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}.$$

Luego:

$1 = A(x+1) + B(x-1) \Rightarrow 1 = (A+B)x + A - B$.

Identificando coeficientes:

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = A - B \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2};\ B = -\frac{1}{2}.$$

Con esto:

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{1/2}{x-1}dx - \int \frac{1/2}{x+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + c.$$

b) Es inmediata: $\int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right) + c$.

c) Se transforma el integrando como sigue:

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}dx = \int \frac{x^2-1+1}{x^2-1}dx = \int\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)dx = x + \int \frac{1}{x^2-1}dx =$$

= (la última integral se ha hecho más arriba) = $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + c$.

d) Es inmediata si se transforma el integrando como sigue:

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}dx = \int\left(x + \frac{x}{x^2-1}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right) + c.$$

18. Halla:

a) $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+1}dx$ b) $\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}dx$ c) $\int \frac{5+4x}{1+x^2}dx$

Solución:

a) El denominador tiene una raíz real doble: $x^2+2x+1 = (x+1)^2$.

Por tanto, se hace la descomposición:

$$\frac{3x+1}{x^2+2x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2} \Rightarrow A = 3;\ B = -2.$$

Luego,

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+1}dx = \int\left(\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}\right)dx = 3\ln(x+1)+\frac{2}{x+1}+c\,.$$

b) $\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}dx$

Como el denominador $x^2-2x+1=(x-1)^2$, se hace la descomposición:

$$\frac{x+2}{x^2-2x+1}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A+B(x-1)}{(x-1)^2}\,.$$

Luego:

$$x+2=A+B(x-1)\,.$$

Si $x = 1$: $3 = A \Rightarrow A = 3$; si $x = 0$: $2 = A - B \Rightarrow B = 1$.

Con esto:

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}dx=\int \frac{3}{(x-1)^2}dx+\int \frac{1}{x-1}dx=\frac{-3}{x-1}+\ln(x-1)+c\,.$$

c) $\int \frac{5+4x}{1+x^2}dx$ $\to$ Se observa que *puede* tener que ver con un arcotangente y un logaritmo,

pues: $\int \frac{5+4x}{1+x^2}dx = \int\left(\frac{5}{1+x^2}+\frac{4x}{1+x^2}\right)dx = \int \frac{5}{1+x^2}dx+\int \frac{4x}{1+x^2}dx =$

$$= 5\int \frac{1}{1+x^2}dx+2\int \frac{2x}{1+x^2}dx = 5\arctan x+2\ln(1+x^2)+c\,.$$

Método de integración por partes

19. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x\cos x dx$ b) $\int xe^{2x}dx$ c) $\int x^2\cdot e^{3x}dx$

d) $\int 2x^3e^{x^2}dx$ e) $\int (x\ln x)dx$ f) $\int x^2\sin(2x)dx$

Solución:

Todas pueden resolverse aplicando el método de integración por partes.

a) Se toma: $x = u$ y $dv=\cos x dx \Rightarrow du=dx$ y $v=\sin x$.

Luego, $\int x\cos x dx = x\sin x-\int \sin x\,dx = x\sin x+\cos x+c\,.$

b) Tomando: $u=x \Rightarrow du=dx$; $e^{2x}dx=dv \Rightarrow \int e^{2x}dx=\int dv \Rightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x}$.

Luego:

$$\int xe^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+c\,.$$

c) Tomando: $u=x^2 \Rightarrow du=2xdx$; $dv=e^{3x}dx \Rightarrow v=\frac{1}{3}e^{3x}$

Se tiene: $\int x^2e^{3x}dx=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{3}\int xe^{3x}dx\,.$

La segunda integral, $\int xe^{3x}dx$, también se hace por partes.

Tomando ahora: $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x}$.

Se tiene: $\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}$.

Por tanto:

$$\int x^2e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right) + c =$$

$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c.$$

d) Haciendo $u = x^2$ y $dv = 2xe^{x^2}dx$ se tiene:

$$\int 2x^3e^{x^2}dx = x^2e^{x^2} - \int 2xe^{x^2}dx = x^2e^{x^2} - e^{x^2} + c.$$

e) Tomando: $u = x\ln x \Rightarrow du = (\ln x + 1)dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$.

Luego, $\int (x\ln x)dx = x^2\ln x - \int (x\ln x + x)dx = x^2\ln x - \int (x\ln x)dx + \int xdx$.

En el segundo miembro aparece la misma integral, que se traspone al primer miembro, obteniéndose,

$$2\int (x\ln x)dx = x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + c.$$

De donde, $\int (x\ln x)dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4} + c$.

f) Haciendo: $x^2 = u$, $\sin 2xdx = dv \Rightarrow 2xdx = du$; $v = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

Luego, $\int x^2\sin(2x)dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x\cos 2xdx$.

Para hacer la segunda integral se aplica nuevamente el método de partes: $\int x\cos 2xdx$.

Tomando: $x = u$; $dv = \cos 2xdx \Rightarrow dx = du$; $v = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Luego, $\int x\cos 2xdx = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$.

Por tanto: $\int x^2\sin(2x)dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$.

20. Utilizando el método de integración por partes, calcula $\int \frac{x}{e^x}dx$.

Solución:

$$\int \frac{x}{e^x}dx = \int xe^{-x}dx.$$

Se hace:

$u = x$ y $dv = e^{-x}dx \Rightarrow du = dx$; $v = -e^{-x}$.

Luego:

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c\,.$$

21. A partir del resultado de $\int \ln x dx$, calcula las siguientes integrales:

a) $2\int \ln x dx$ b) $\int \ln(2x)dx$ c) $\int \ln x^2 dx$ d) $\int (\ln x)^2 dx$

Solución:

La integral $\int \ln x dx$ se hace por el método de partes.

Tomando: $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$.

Luego:

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c\,.$$

Con esto:

a) $2\int \ln x dx = 2\left(x\ln x - \int dx\right) = 2(x\ln x - x) + c$.

b) $\int \ln(2x)dx = \int (\ln 2 + \ln x)\,dx = \int \ln 2dx + \int \ln x dx = (\ln 2)\cdot x + x\ln x - x + c$.

c) $\int \ln x^2 dx = \int 2\ln x dx = 2\int \ln x dx = 2\left(x\ln x - \int dx\right) = 2(x\ln x - x) + c$.

d) Tomando: $u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = 2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$.

Luego:

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x dx = x(\ln x)^2 - \int 2\ln x dx =$$

$$= x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c\,.$$

Otras integrales

22. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \frac{2}{1+x^2}dx$ b) $\int \frac{2x}{1+x^2}dx$ c) $\int \frac{2}{1-x^2}dx$ d) $\int \frac{2}{(1+x)^2}dx$

Solución:

Obsérvese que las cinco integrales tienen cierto parecido. No obstante, sus resultados son muy diferentes.

a) Es inmediata: $\int \frac{2}{1+x^2}dx = 2\cdot\int \frac{1}{1+x^2}dx = 2\arctan x + c$.

b) También es inmediata: $\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \ln\left(1+x^2\right) + c$.

c) Hay que hacerla por descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{2}{1-x^2}dx = \int\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)dx = \ln(1+x) + \ln(1-x) + c\,.$$

d) Es inmediata: $\int \frac{2}{(1+x)^2}dx = 2\int (1+x)^{-2}dx = 2\cdot\frac{(1+x)^{-1}}{-1}+c = -\frac{2}{1+x}+c$.

23. Integra:

a) $\int \frac{e^x+e^{2x}}{1+e^x}dx$ b) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$ c) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx$ d) $\int \tan^2 x dx$

Solución:

a) Sacando factor común en el numerador:

$$\int \frac{e^x+e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{e^x(1+e^x)}{1+e^x}dx = \int e^x dx = e^x + c.$$

b) Haciendo el cambio $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow$

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{e^x\cdot e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{t}{1+t}dt = \int \left(1-\frac{t}{1+t}\right)dx = t-\ln(1+t)+c = e^x - \ln(1+e^x)+c.$$

c) Es inmediata, aunque puede hacerse el cambio $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$.

Por tanto: $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{-1}{t^4}dx = -\int t^{-4}dt = -\frac{t^{-3}}{-3}+c = \frac{1}{3t^3}+c = \frac{1}{3\cos^3 x}+c$.

d) Sumando y retando 1 al integrando se tiene:

$$\int \tan^2 x dx = \int (1+\tan^2 x - 1)dx = \int (1+\tan^2 x)dx - \int dx = \tan x - x + c.$$

24. Dada la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 10$, halla una primitiva $F(x)$ que verifica que $F(1) = 8$.

Solución:

El conjunto de todas las primitivas de $f(x)$ es

$$F(x) = \int (3x^2 - 6x + 10)dx = x^3 - 3x^2 + 10x + c.$$

Como debe cumplirse que $F(1) = 8$, entonces: 1 – 3 + 10 + c = 8 $\Rightarrow$ c = 0. Por tanto, la primitiva buscada es $F(x) = x^3 - 3x^2 + 10x$.

25. Halla una primitiva de $f(x) = e^x + 3x$ que pase por el punto (0, 2).

Solución:

El conjunto de todas las primitivas de $f(x) = e^x + 3x$ es

$$\int (e^x + 3x)dx = e^x + \frac{3x^2}{2} + c.$$

Como debe pasar por el punto (0, 2), entonces $e^0 + c = 2 \Rightarrow c = 1$.

Por tanto, la primitiva buscada es $F(x) = e^x + \frac{3x^2}{2} + 1$.

26. Dada la función $f(x) = \frac{2a+3}{(x-3)^2}$, determina el valor de a para que una de sus primitivas, $F(x)$, pase por los puntos (2, 0) y (1, 2). Indica $F(x)$.

Solución:

La integral de $f(x)$ es:

$$F(x)=\int \frac{2a+3}{(x-3)^2}dx = (2a+3)\int (x-3)^{-2}dx=(2a+3)\cdot\frac{(x-3)^{-1}}{-1}+c=-\frac{2a+3}{x-3}+c\,.$$

Por tanto: $F(x)=-\dfrac{2a+3}{x-3}+c$.

Por pasar por los puntos (2, 0) y (1, 2) se cumple que $F(2)=0$ y $F(1)=2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{2a+3}{-1}+c=0 \\ \dfrac{2a+3}{-2}+c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+3+c=0 \\ 2a+3+2c=4 \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{7}{2}; c=4\,.$$

Luego, $F(x)=\dfrac{4}{x-3}+4$.

Integrales definidas

27. Halla el valor de:

a) $\displaystyle\int_1^3 \left(3x^2-2x+1\right)dx$ b) $\displaystyle\int_{-2}^3 \left(x^2+2\right)dx$ c) $\displaystyle\int_0^2 \left(x^3+4x-2\right)dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int_1^3 \left(3x^2-2x+1\right)dx = \left(x^3-x^2+x\right)\Big|_1^3 = 27-9+3-(1-1+1)=20\,.$

b) $\displaystyle\int_{-2}^3 \left(x^2+2\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_{-2}^3 = 9+6-\left(-\frac{8}{3}-4\right)=\frac{65}{3}\,.$

c) $\displaystyle\int_0^2 \left(x^3+4x-2\right)dx = \left(\frac{x^4}{4}+2x^2-2x\right)\Bigg|_0^2 = 4+8-4=8\,.$

28. Halla el valor de:

a) $\displaystyle\int_0^7 \frac{4}{\sqrt{5x+1}}dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int_0^7 \frac{4}{\sqrt{5x+1}}dx=\frac{8}{5}\int_0^7 \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}dx=\left(\frac{8}{5}\sqrt{5x+1}\right)\Bigg|_0^7=\frac{8}{5}(6-1)=8\,.$

b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} 2x\left(1+x^2\right)^{1/2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1+x^2\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}(8-1)=\frac{7}{3}\,.$

c) $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)dx = \left[2\sqrt{x}-\ln x\right]_1^4 = 4-\ln 4-(2-\ln 1)=2-\ln 4\,.$

29. Halla el valor de:

a) $\int_0^2 e^{2x}dx$ b) $\int_2^{10} 20e^{0,1x}dx$ c) $\int_0^1 xe^{-3x^2+1}dx$

Solución:

a) $\int_0^2 e^{2x}dx = \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(e^4-1\right)$.

b) $\int_2^{10} 20e^{0,1x}dx = 200\int_2^{10}\left(0,1e^{0,1x}\right)dx = 200\left(e^{0,1x}\right)\Big|_2^{10} = 200\left(e-e^{0,2}\right)$.

c) $\int_0^1 xe^{-3x^2+1}dx = -\frac{1}{6}\int_0^1\left(-6xe^{-3x^2+1}\right)dx = \left(-\frac{1}{6}e^{-3x^2+1}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{6}\left(e^{-2}-e\right)$.

30. Calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-2}^{-1}(-x^2+2)dx$ b) $\int_1^4\left(x+\frac{4}{x^2}\right)dx$ c) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$

Solución:

a) $\int_{-2}^{-1}(-x^2+2)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{3}-2-\left(\frac{8}{3}-4\right) = -\frac{1}{3}$.

b) $\int_1^4\left(x+\frac{4}{x^2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{4}{x}\right]_1^4 = 8-1-\left(\frac{1}{2}-4\right) = \frac{21}{2}$.

c) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$.

31. Calcula el valor de $a > 0$ en los siguientes casos:

a) $\int_0^3 (x^2+a)dx = 15$ b) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}dx = a$ c) $\int_0^a \frac{1}{x+1}dx = 3$

Solución:

a) $\int_0^3 (x^2+a)dx = \left[\frac{x^3}{3}+ax\right]_0^3 = 9+3a \to 9+3a = 15 \Rightarrow a = 2$.

b) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}dx = a \Rightarrow \left[\ln\left(x+1\right)\right]_0^3 = a \Rightarrow \ln 4 - \ln 1 = a \Rightarrow a = \ln 4$.

c) $\int_0^a \frac{1}{x+1}dx = 3 \Rightarrow \left[\ln\left(x+1\right)\right]_0^a = 3 \Rightarrow \ln\left(a+1\right)-\ln 1 = 3 \Rightarrow \ln\left(a+1\right) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a+1 = e^3 \Rightarrow a = e^3-1$.

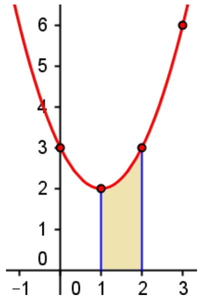
Cálculo de áreas de recintos planos

32. Haz su la representa gráfica de la función $f(x) = x^2-2x+3$. Calcula el área limitada por la curva de f y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

La función $f(x) = x^2-2x+3$ es una parábola. Su mínimo se da cuando $f´(x) = 2x-2 = 0$; cuando $x = 1$, punto (1, 2).

Otros puntos de f son: (0, 3); (2, 3); (3, 6).
Su gráfica es la adjunta.



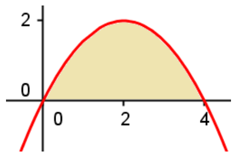
El área pedida es la de la región sombreada, y vale:

$$A=\int_1^2\left(x^2-2x+3\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_1^2=\frac{8}{3}-4+6-\left(\frac{1}{3}-1+3\right)=\frac{7}{3}\text{ u}^2.$$

33. Halla el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x$ y el eje OX.

Solución:

La función $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x$ corta al eje OX en las soluciones de la ecuación $-\frac{1}{2}x^2+2x=0\Rightarrow -x^2+4x=0\Rightarrow x(4-x)=0\Rightarrow x=0$ y $x = 4$.



Su gráfica es la adjunta.
El área pedida es la de la región sombreada. Su valor es:

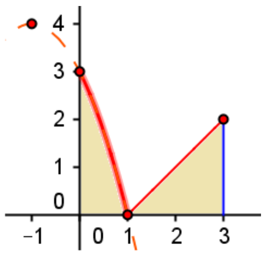
$$A=\int_0^4\left(-\frac{1}{2}x^2+2x\right)dx=\left[-\frac{x^3}{6}+x^2\right]_0^4=-\frac{64}{6}+16=\frac{16}{3}\text{ u}^2.$$

34. Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+3 & \text{si } 0\le x<1\\ x-1 & \text{si } 1\le x\le 3\end{cases}$.

a) Haz su gráfica. ¿Es continua?
b) Calcula el área de la región determinada por su gráfica y las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$.

Solución:

a) Su gráfica se puede tazar dando valores, pues está definida por un trozo de parábola y otro trozo de recta.
Puntos: Parábola: (–1, 4); (0,3); (1, 0). Recta: (1, 0); (3, 2).
Es continua.



b) El área es la sombreada en la figura. Su valor es:

$$A=\int_0^1\left(-x^2-2x+3\right)dx+\int_1^3\left(x-1\right)dx=$$

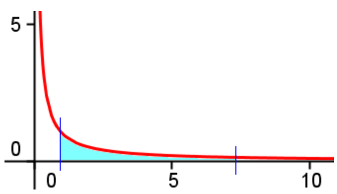
$$=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3=-\frac{1}{3}-1+3+\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{5}{3}+2=\frac{11}{3}\text{ u}^2.$$

(Observa que el área del triángulo sombreado, de base 2 y altura 2, es 2 u^2).

35. Halla el área encerrada entre la curva $y=\frac{1}{x}$ y el eje OX, entre $x = 1$ y $x = e^2$.

Solución:

El recinto es el sombreado de la figura adjunta.
(No es necesario dibujarlo, pues la función es positiva en el intervalo de integración).



El área es:

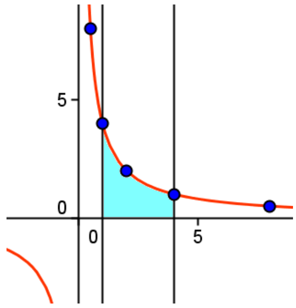
$$\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_1^{e^2}=\ln e^2-\ln 1=2\text{ unidades cuadradas (u}^2\text{).}$$

36. Calcula el área de la región limitada por $y=\dfrac{4}{x}$, el eje *OX* y las rectas $x = 1$, $x = 4$.

Solución:

La función $y=\dfrac{4}{x}$, que es una hipérbola equilátera, puede trazarse dando algunos puntos: (0,5, 8); (1, 4); (2, 2); (4, 1); (8, 0,5).
La región es la sombreada en la gráfica adjunta.
El área viene dada por la integral definida:

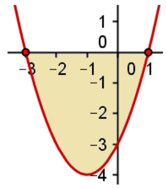
$$\int_1^4 \frac{4}{x}dx=\left[4\ln x\right]_1^4=4\ln 4 \text{ u}^2.$$



37. Halla el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x)=x^2+2x-3$ y el eje *OX*.

Solución:

La función $f(x)=x^2+2x-3$ corta al eje *OX* en las soluciones de la ecuación $x^2+2x-3=0 \Rightarrow x = 1$ y $x = -3$.
Su gráfica es la adjunta.
Como el recinto está por debajo del eje *OX*, su área viene dada por:

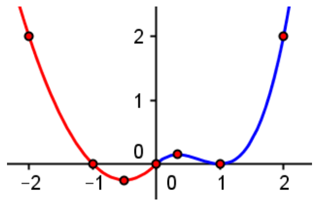


$$A=-\int_{-3}^{1}\left(x^2+2x-3\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_{-3}^{1}=-\frac{1}{3}-1+3-\left(9-9-9\right)=\frac{32}{3} \text{ u}^2.$$

También podría utilizarse el valor absoluto. Esto es:

$$A=\left|\int_{-3}^{1}\left(x^2+2x-3\right)dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_{-3}^{1}\right|=\left|\frac{1}{3}+1-3-\left(-9+9+9\right)\right|=\frac{32}{3} \text{ u}^2.$$

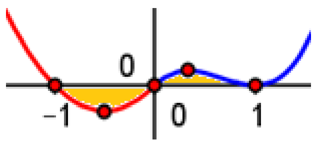
38. La gráfica de la función $f(x)=\begin{cases} x(x+1) & \text{si } x\le 0 \\ x(x-1)^2 & \text{si } x>0\end{cases}$ es la adjunta. (Su gráfica se representó en el problema propuesto 2 del tema anterior).
Halla el área del recinto limitado por la curva y el eje *OX*.



Solución:

El área pedida es la del recinto sombreado.
Como la primera región queda por debajo del eje *OX*, su valor viene dada por:

$$A=-\int_{-1}^{0}x\left(x+1\right)dx+\int_{0}^{1}x\left(x-1\right)^2dx=$$



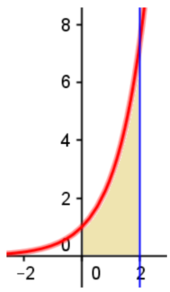
$$=-\int_{-1}^{0}\left(x^2+x\right)dx+\int_{0}^{1}\left(x^3-2x^2+x\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4} \text{ u}^2.$$

39. Calcula el área de la región limitada por la curva de la función $f(x)=e^x$, el eje *OX* y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Solución:

El área pedida es la de la región es la sombreada en la gráfica adjunta.



Viene dada por la integral definida:

$$\int_0^2 e^x dx = \left[e^x\right]_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1 \text{ u}^2.$$

40. Calcula el área encerrada entre la curva de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2+x}$ y el eje *OX*, en el intervalo [0, 2].

Solución:

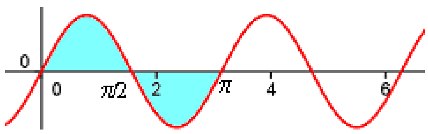
Como en el intervalo de integración la función es positiva, el área pedida es:

$$A = \int_0^2 \frac{x^2}{2+x} dx = \int_0^2 \left(x - 2 + \frac{4}{2+x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x + 4\ln(2+x)\right]_0^2 =$$

$$= -2 + 4\ln 4 - 4\ln 2 = 4\ln 2 - 2 \text{ u}^2.$$

41. Halla el área de la región plana limitada por la curva $y = \sin 2x$ y el eje *OX* en el intervalo [0, π].

Solución:



La función $y = \sin 2x$ es periódica de periodo π.

Corta al eje *OX* en los puntos $x = 0$, $x = \pi/2$ y $x = \pi$.

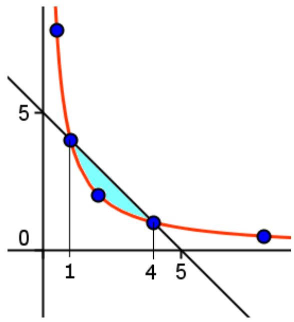
Su gráfica se puede trazar a partir de la de la función seno.

El área pedida es la sombreada en la figura adjunta.

Luego: $S = 2\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx = 2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi/2} = 2 \text{ u}^2.$

42. Calcula el área de la región limitada por la función $y = \dfrac{4}{x}$ y la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (4, 1).

Solución:



La recta que pasa por los puntos (1, 4) y (4, 1) de la curva tiene por ecuación: $y = mx + n$.

Por pasar por (1, 4) → $4 = m + n$.

Por pasar por (4, 1) → $1 = 4m + n$.

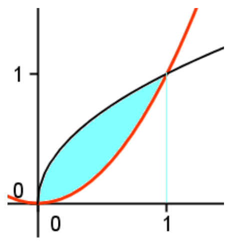
Resolviendo el sistema se obtiene: $y = -x + 5$.

El recinto es el sombreado en la figura adjunta. Su área viene dada por la integral definida:

$$\int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln x\right]_1^4 = \frac{15}{2} - 4\ln 4 \text{ u}^2.$$

43. Halla el área del recinto plano comprendido entre las gráficas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Solución:



El recinto plano comprendido entre las gráficas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, que puede trazarse dando algunos valores, es el adjunto.

Los puntos de corte se obtienen resolviendo la ecuación $x^2 = \sqrt{x}$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 1$. La curva que va por encima es $y = \sqrt{x}$.

Luego:

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left(\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\ \text{u}^2.$$

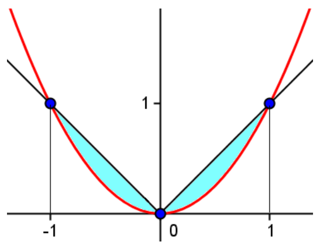
44. Halla el área del recinto limitado por las curvas de ecuación $y=x^2$ e $y=|x|$.

Solución:

Las curvas se cortan cuando $x^2=|x|$.

Sus soluciones son $x = 0$, $x = –1$ y $x = 1$.

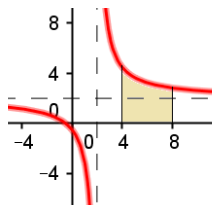
Las curvas son las adjuntas; pueden representarse dando valores: (–1, –1); (0, 0); (1, 1).



Por tanto: $S=2\int_0^1(x-x^2)dx=\left(x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$ u^2.

Otros problemas

45. La gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$ es la adjunta.



Halla el área del recinto sombreado.

(Esta función se representó en el problema 23 del tema anterior).

Solución:

$$\int_4^8\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)dx=\int_4^8\left(2+\frac{5}{x-2}\right)dx\ =$$

$$=\left[2x+5\ln(x-2)\right]_4^8=16+5\ln 6-8-5\ln 2=8+5\ln 3\ \text{u}^2.$$

→ La división puede hacerse por Ruffini.

→ Observa que $5\ln 6-5\ln 2=5(\ln 6-\ln 2)=5\ln\frac{6}{2}=5\ln 3$.

46. Halla la superficie del recinto plano limitado por la curva de ecuación $f(x)=-x^2+4x$, la recta tangente a ella en el punto de abscisa $x = 3$ y el eje OX.

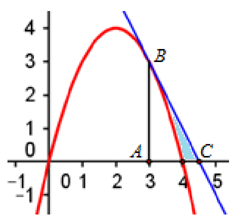
Solución:

La ecuación de la tangente es $y´-f(3)=f´(3)(x-3)$.

Como $f(3)=3$ y $f´(3)=-2$, se obtiene:

$$y-3=-2(x-3)\Rightarrow\ y=-2x+9.$$

Las gráficas de la función y de la recta tangente pueden hacerse dando valores. Se obtiene la figura adjunta.



La recta corta al eje OX en el punto $x = 4{,}5$; la parábola en $x = 4$.

El área del recinto sombreado es la diferencia entre la del triángulo ABC menos la del arco de parábola comprendido entre 3 y 4.

Su valor será:

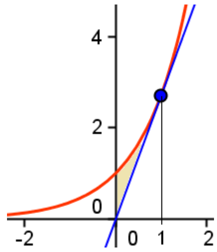
$$\int_3^{4,5}(-2x+9)\,dx-\int_3^4\left(x^2-4x\right)dx=\left[-x^2+9x\right]_3^{4,5}-\left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_3^4=\frac{9}{4}-\frac{5}{3}=\frac{7}{12}\ \text{u}^2.$$

47. Determina el área encerrada entre la curva $y=e^x$, el eje OY y la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:
Como $y' = e^x \Rightarrow y'(1) = e$, se tiene que la ecuación de la tangente es:

$$y - e = e(x-1) \Rightarrow y = ex.$$

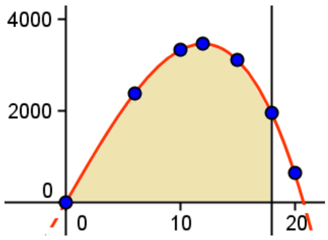
La tangente y la curva se cortan cuando x = 1.
El recinto del que se desea conocer el área es el sombreado en la figura.
Su valor es:



$$\int_0^1 \left(e^x - ex\right)dx = \left[e^x - \frac{ex^2}{2}\right]_0^1 = e - \frac{e}{2} - \left(e^0\right) = \frac{e}{2} - 1 \text{ u}^2.$$

48. (Propuesto en Selectividad) El número de pasajeros que pasan por la terminal de un aeropuerto se ajusta durante un día determinado a la función $P(t) = 432t - t^3$, siendo t el tiempo en horas y $P(t)$ el número de viajeros en el momento t.
a) Representa la gráfica de la función en el contexto del problema. ¿Cuál fue la máxima afluencia del día y en qué momento se da?
b) ¿Qué cantidad de viajeros pasa por esa terminal desde las 0 horas hasta las 18 horas?
Solución:
a) $P(t) = 432t - t^3 = t(432 - t^2)$
Vale 0 en los instantes t = 0 y $t = \sqrt{432} \approx 20{,}78$ h ≈ 20 h 47 min.
Derivando:

$P'(t) = 432 - 3t^2$, que se anula cuando t = 12.

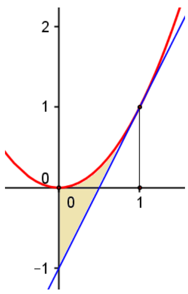


Si 0 < t < 12, $P'(t) > 0 \Rightarrow P(t)$ es creciente.
Si 12 < t < 24, $P'(t) < 0 \Rightarrow P(t)$ es decreciente.
Por tanto, el máximo se da cuando t = 12, siendo el número de pasajeros $P(12)$ = 3456.
Dando algunos valores más puede trazarse su gráfica, que es la adjunta.
Valores:
(0, 0); (6, 2376); (10, 3320); (12, 3456), máximo; (15, 3105); (18, 1944); (20, 640)

b) El número de viajeros que pasa por esa terminal entre las 0 y las 18 horas viene dado por el valor de la integral:

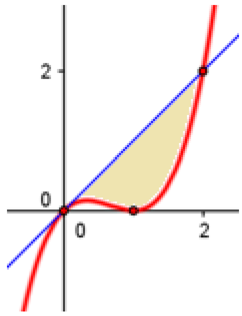
$$C = \int_0^{18} (432t - t^3)dt = \left[216t^2 - \frac{t^4}{4}\right]_0^{18} = 43740 \text{ pasajeros.}$$

49. Dada la curva de ecuación $y = x^2$, calcula el área el recinto plano limitado por dicha curva, la recta tangente a ella en el punto (1, 1) y el eje OY.
Solución:
La recta tangente tiene por ecuación $y - 1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 1$.
Recuerda que su pendiente es $f'(1)$: en este caso, $f'(x) = 2x$.
El recinto es el sombreado en la figura adjunta.
Su área se obtiene integrando:



$$\int_0^1 \left(x^2 - (2x-1)\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ u}^2.$$

50. Dada la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + x$.
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa curva en el origen.
b) Haz un esquema del recinto limitado por la gráfica de la curva y la recta hallada.
c) Calcula el área de ese recinto.
Solución:
a) $y = x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow y' = 3x^2 - 4x + 1 \to y(0) = 0;\ y'(0) = 1$.
Tangente en (0, 0): $y = x$.
b) La derivada se anula, $3x^2 - 4x + 1 = 0$, cuando $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \begin{cases} 1/3 \\ 1 \end{cases}$.
Como $y'' = 6x - 4 \Rightarrow y''(1/3) < 0;\ y''(1) > 0$. Luego, en x = 1/3 se tiene un máximo; y en x = 1, un mínimo.
La recta tangente corta a la curva cuando $x^3 - 2x^2 + x = x \Rightarrow$ x = 0 y x = 2.
Algunos puntos de la gráfica de la curva son:
(–1, –4); (0, 0); (1/3, 4/27), máximo; (1, 0), mínimo; (2, 2).



c) El recinto comprendido entre la recta y la curva es el sombreado en la figura adjunta. Como en el intervalo [0, 2] la recta va por encima de la curva, el área pedida viene determinada por la integral
$$A = \int_0^2 \left(x - \left(x^3 - 2x^2 + x\right)\right) dx = \int_0^2 \left(-x^3 + 2x^2\right) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = -4 + \frac{16}{3} = \frac{4}{3} \text{ u}^2.$$

51. El ritmo de crecimiento de una población de palomas en una ciudad viene dado por la función $p(x) = 2x - 0,5x^2$, x en años, y $p(x)$ en miles de palomas. Si actualmente hay 2500 palomas:
a) ¿Cuántas palomas habrá dentro de x años?
b) ¿En cuánto aumentará la población de palomas durante el segundo semestre a partir del momento actual?
c) ¿Hasta cuándo aumentará la población de palomas? ¿Qué número máximo alcanzará?
Solución:
a) La función $p(x) = 2x - 0,5x^2$ es la tasa de variación instantánea de la población de palomas, luego el número de palomas vendrá dado por una primitiva de $p(x)$. Si $P(x)$ es dicha primitiva, se tiene:
$$P(x) = \int \left(2x - 0,5x^2\right) dx = x^2 - \frac{1}{6}x^3 + c.$$
Como en el momento actual, x = 0, hay 2500 palomas (2,5 miles) $\Rightarrow P(0) = 2,5 = c$.
En consecuencia, $P(x) = x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + 2,5$.

b) El segundo semestre va desde x = 0,5 hasta x = 1, luego el aumento de palomas viene dado por la integral definida:
$$\int_{0,5}^{1} \left(2x - 0,5x^2\right) dx = \left(x^2 - \frac{1}{6}x^3\right)\Bigg|_{1/2}^{1} = \left(1 - \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}\right) = \frac{29}{48} \approx 0,604 \text{ miles de palomas}$$
$\to$ 604 palomas.

c) Aumenta hasta que $P'(x) = p(x) = 2x - 0,5x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - 0,5x) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 4$.
Como $P''(x) = 2 - x$ y $P''(4) = -2$, para el valor x = 4 se da el máximo.
Ese máximo será $P(4) = 16 - \frac{64}{6} + 2,5 \approx 7,833$ → 7833 palomas.

52. Supongamos que se rompe una tubería y que t minutos después se pierde agua a razón de $f(t) = 100 + 1,5t$ litros por minuto.
a) ¿Cuál es la función que da el agua perdida al cabo de t minutos?
b) ¿Cuánta agua se perderá si no se repara la tubería durante la segunda hora?
Solución:
a) Como $f(t)$ es la función que da la variación (instantánea) del agua que se pierde en función del tiempo, la función $F(t)$ que da los litros de agua perdida al cabo de t minutos viene dada por:

$$F(t) = \int_0^t (100 + 1,5x)\,dx = \left[100x + \frac{1,5}{2}x^2\right]_0^t = 100t + 0,75t^2$$

(Recuerda que la variable de integración es independiente; pero si se pone t como límite de integración, para evitar errores conviene integrar respeto a otra variable).
b) La segunda hora comienza en el minuto 60 y termina en el 120, luego se perderán:

$$\int_{60}^{120} (100 + 1,5x)\,dx = \left[100x + \frac{1,5}{2}x^2\right]_{60}^{120} = 22800 - 8700 = 14100 \text{ litros.}$$

53. La función de coste marginal de la unidad x de un producto viene dada por $c(x) = 4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.
Halla la función de coste total si el coste de funcionamiento de la empresa es de 100 u.m.
Solución:
Si $C(x)$ es la función de coste total, su derivada, $C'(x)$, será el coste marginal. En consecuencia,

$$C(x) = \int \left(4 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(4 - x^{-1/2}\right) dx = 4x - \frac{x^{1/2}}{1/2} + c = 4x - 2\sqrt{x} + c.$$

Como $C(0) = 100 \Rightarrow c$ = 100.
Luego, la función de coste total es: $C(x) = 4x - 2\sqrt{x} + 100$.

54. Un fabricante de cosméticos espera vender dentro de x meses 10000 barras de labios por mes a un precio de $p(x) = 2 + 0,2\sqrt{x}$ euros por barra de labios. ¿Cuál será el ingreso total del fabricante en los próximos 18 meses si se cumplen sus previsiones?
Solución:
En el momento x, a un precio de $p(x) = 2 + 0,2\sqrt{x}$ por unidad, la venta de 10000 barras de labios genera, mensualmente, unos ingresos de:

$$i(x) = 10000\cdot\left(2 + 0,2\sqrt{x}\right) \to i(x) = 20000 + 2000\sqrt{x}.$$

Por tanto, los ingresos totales en los próximos 18 meses vendrán dados por el área bajo la curva $i(x)$ en el intervalo [0, 18], que vale:

$$\int_0^{18}\left(20000+2000\sqrt{x}\right)dx=\left[20000x+\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{18}=360050,91 \text{ euros.}$$

55. Una empresa de de compraventa de coches de segunda mano tiene estipulado que el ritmo de depreciación, en porcentaje, de un coche nuevo viene dado por $d(t)=10+0,75e^{0,15t}$, t en años. Calcula:

a) El valor de un coche con *t* años.

b) El valor de un coche con dos años si nuevo costón 30000 €.

c) ¿En cuánto se depreciará dicho coche en los siguientes tres años?

<u>Solución</u>:

Sea $D(t)$ la función que da el porcentaje total en el que se ha depreciado un coche con *t* años.

a) $D(t)=\int\left(10+0,75e^{0,15t}\right)dt=\int\left(10+5\cdot\left(0,15e^{0,15t}\right)\right)dt=10t+5e^{0,15t}+c$.

Como para *t* = 0, en el momento de su compra, el coche no se ha depreciado nada, $D(0)=0$, de donde,

$$D(0)=10\cdot 0+5e^0+c=0\Rightarrow c=-5 \;\Rightarrow\; D(t)=10t+5e^{0,15t}-5.$$

En consecuencia, el valor, $V(t)$, en porcentaje, de un coche con *t* años, es:

$$V(t)=100-D(t)=105-10t-5e^{0,15t}.$$

b) Un coche con dos años valdrá: $V(2)=105-10\cdot 2-5e^{0,3}\approx 78,25\%$ de su valor inicial.

Si su valor inicial fue de 30000 €, a los dos años valdrá: 0,7825 · 30000 = 23475 €.

De otra manera, el coche se depreciará en:

$$\int_0^{2}\left(10+0,75e^{0,15t}\right)dt=\left[10t+5e^{0,15t}\right]_0^2=20+5\cdot e^{0,3}-5=21,75\%$$

Luego, valdrá el 100 – 21,75 = 78,25% de su valor inicial.

c) En los siguientes tres años, el coche se deprecia en:

$$\int_2^{5}\left(10+0,75e^{0,15t}\right)dt=\left[10t+5e^{0,15t}\right]_2^5=\left(50+5\cdot e^{0,75}\right)-\left(20+5\cdot e^{0,3}\right)=$$

= 60,585 – 26,75 = 33,835% de su valor inicial.

Por tanto, en los tres años siguientes se devalúa en 0,33835 · 30000 = 10150,50 €.

Luego, su valor, después de cinco años será de

23475 (lo que valía hace 2 años) – 10150,50 = 13324,50 €.

→ También podría determinarse su valor mediante la función $V(t)=105-10t-5e^{0,15t}$.

Para *t* = 5: $V(5)=44,415$ %

Si nuevo costó 30000 €, 5 años después valdrá 30000 · 0,44415 = 13324,50 €.