TEMA 6. Derivadas
Problemas Resueltos

Derivada de una función en un punto

1. Calcula la tasa de variación media de:
a) $f(x)=x^2-3x+1$, en el intervalo [1, 4].
b) $g(x)=\sqrt{x+1}$, en el intervalo [–1, 3].
c) $h(x)=2x+1$, en el intervalo [2, 4].
Solución:
La tasa de variación media viene dada por $Tvm[a,b]=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

a) $Tvm\left(f(x),[1,4]\right)=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{5-(-1)}{3}=2$.

b) $Tvm\left(g(x),[-1,3]\right)=\dfrac{g(3)-g(-1)}{3-(-1)}=\dfrac{2-0}{4}=0,5$.

c) $Tvm\left(h(x),[2,4]\right)=\dfrac{h(4)-h(2)}{4-2}=\dfrac{9-5}{2}=2$. La tasa de variación media de una función lineal es la pendiente de la recta.

2. Calcula, aplicando la definición, la derivada de:
a) $f(x)=x^2-3x+1$, en el punto $x = 2$.
b) $g(x)=\sqrt{x+1}$, en el punto $x = 3$.
c) $h(x)=2x+1$, en cualquier punto.
Solución:
La derivada viene dada por $f´(a)=Tvi(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

a) $f´(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2+h}{h}=1$.

b) $g´(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(3+h)-g(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+h}-2\right)\left(\sqrt{4+h}+2\right)}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{4+h-4}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=\frac{1}{4}.$$

c) $h´(x)=\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{h(x+p)-h(x)}{p}=\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{2\left(x+p\right)+1-2x-1}{p}=\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{2p}{p}=2$.

3. Utilizando la definición, calcula la derivada de $f(x)=x^3-3x$ en el punto $x = 1$.
Solución:
La derivada de la función $f(x)$ es en el punto $x = a$ se define así: $f´(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

En este caso: $f´(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

Como $f(1+h)=(1+h)^3-3(1+h)=1+3h+3h^2+h^3-3-3h=3h^2+h^3-2$ y $f(1) = -2$, se tiene:

$$f´(1)=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+h^3-2-(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3h+h^2\right)=0\,.$$

4. Utilizando la definición, halla la derivada de la función $f(x)=\dfrac{3+x}{x-2}$ en el punto $x = 3$.
Comprueba, mediante las reglas de derivación que tu resultado es correcto.
<u>Solución</u>:

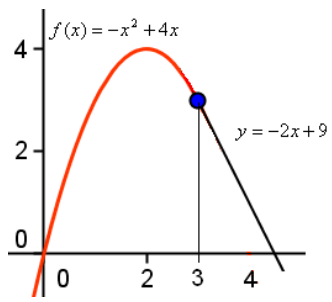
$$f´(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

Luego: $f´(3)=\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{3+(3+h)}{(3+h)-2}-\dfrac{3+3}{3-2}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{6+h}{1+h}-6}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{-5h}{h+h^2}=-5$.

Derivando $f(x)=\dfrac{3+x}{x-2}\Rightarrow f´(x)=\dfrac{(x-2)-(3+x)}{(x-2)^2}=\dfrac{-5}{(x-2)^2}$.

Si $x = 3$, $f´(3)=\dfrac{-5}{(3-2)^2}=-5$. Obviamente coinciden.

5. Aplicando la definición, estudia si la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x, & x\le 3\\ -2x+9 & x>3\end{cases}$ es derivable en el punto $x = 3$.
<u>Solución</u>:



Para que la función sea derivable en $x = 3$ debe ser continua y deben coincidir las derivadas laterales en dicho punto.
Es continua, pues los límites laterales son iguales:

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}\left(-x^2+4x\right)=3\,.$$

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^-}\left(-2x+9\right)=3\,.$$

Las derivadas laterales son:
Por la izquierda: $f(x)=-x^2+4x$.
Como $f(3+h)=-(3+h)^2+4(3+h)=-h^2-2h+3$ y $f(3)=3$, se tendrá:

$$f´(3^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2-2h+3-3}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2-2h}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(-h-2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-h-2)=-2\,.$$

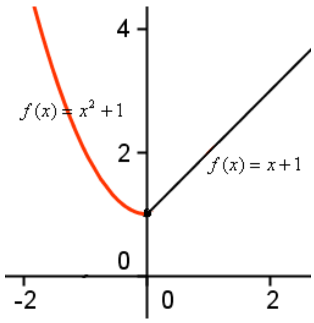
Por la derecha: $f(x)=-2x+9$.
Como $f(3+h)=-2(3+h)+9=-2h+3$ y $f(3)=3$, se tendrá:

$$f´(3^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-2h+3-3}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-2h}{h}=-2\,.$$

Como las derivadas laterales son iguales, la función es derivable en $x = 3$.
En la gráfica anterior puede verse que la función no cambia su trayectoria al pasar de la curva a la recta. De hecho, a partir de $x = 3$, la curva es sustituida por la recta tangente a la curva en ese punto: “la curva se va por la tangente”.

6. Aplicando la definición, estudia si la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ x+1, & x\geq 0\end{cases}$ es derivable en x = 0.

Solución:
La función es continua en x = 0, pues los límites laterales son iguales:



$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+1\right)=1$. $\qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+1\right)=1$.

Las derivadas laterales son:
Por la izquierda: $f(x)=x^2+1$.
Como $f(0+h)=h^2+1$ y $f(0)=1$, se tendrá:

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+1-1}{h}=\lim_{h\to 0^-} h=0.$$

Por la derecha: $f(x)=x+1$.
Como $f(0+h)=h+1$ y $f(0)=1$, se tendrá:

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h+1-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1.$$

Como las derivadas laterales son diferentes, la función no es derivable en x = 0.
En la gráfica anterior puede verse que, en el punto x = 0, la función hace un cambio brusco, tiene un pico.

7. En qué puntos no son derivables las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$ $\qquad$ b) $f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad$ c) $f(x)=x^3-5x^2+4$

En cada caso indica el porqué.
Solución:

a) La función $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$ no es derivable en el punto x = –3, pues en ese punto no está definida (y por tanto no es continua).

b) La función $f(x)=\sqrt{x}$ no es derivable para los números reales negativos, por no estar definida. Además, tampoco es derivable en x = 0, pues la función derivada $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ no está definida si x = 0.

c) La función $f(x)=x^3-5x^2+4$ es derivable para todo número real x; su derivada es $f'(x)=3x^2-10x$, que siempre está definida.
Las funciones polinómicas son derivables en todo **R**.

8. Un estudio sobre la eficiencia de los trabajadores de una factoría ha determinado que el promedio de piezas producidas por trabajador viene dado por la función $P(t)=25t+5t^2-t^3$, siendo t las horas transcurridas a partir del comienzo de la jornada.
a) ¿Qué media de piezas produce un trabajador en la segunda y tercera horas?
b) ¿Cuál es la tasa de producción de un trabajador a las 3 horas de comenzar la jornada?
Solución:

a) Se pide la tasa de variación media en el intervalo [1, 3], desde que comienza la segunda hora, $x \geq 1$, hasta que finaliza la segunda, $x \leq 3$.

$$Tvm\left([1,3]\right) = \frac{P(3)-P(1)}{3-1} = \frac{93-29}{2} = 32.$$

b) Se pide la tasa de variación instantánea: la derivada en el instante $t = 3$.

$$P'(t) = 25 + 10t - 3t^2 \Rightarrow P'(3) = 25 + 10\cdot 3 - 3\cdot 3^2 = 28.$$

(Está bajando la producción con respecto a las dos horas anteriores, intervalo [1, 3]).

9. La temperatura (en °C) de un refresco, h horas después de ser introducido en un frigorífico, viene dada por $T(h) = \dfrac{30h^2 + 15}{8h^2 - 2h + 1}$.

Halla:
a) Su temperatura cuando $h = 0$, $h = 1$ y $h = 3$.
b) La tasa de variación media de la temperatura entre $h = 0$ y $h = 3$.
c) La tasa de variación instantánea de la temperatura cuando $h = 1$ y $h = 3$.

Solución:

a) $T(0) = 15$ ºC; $T(1) = \dfrac{45}{7} \approx 6,4$ ºC; $T(3) = \dfrac{285}{67} \approx 4,25$ ºC.

b) $Tvm\left([0,3]\right) = \dfrac{T(3)-T(0)}{3-0} = \dfrac{\frac{285}{67} - 15}{3} = \dfrac{-\frac{720}{67}}{3} = -3,58$. (En las tres primeras horas el refresco se enfría a razón de 3,58 ºC por hora: En total se enfría 10,75 ºC).

c) Derivando:

$$T'(h) = \frac{30h\cdot\left(8h^2 - 2h + 1\right) - \left(30h^2 + 15\right)\cdot(16h - 2)}{\left(8h^2 - 2h + 1\right)^2} = \frac{-60h^2 - 180h + 30}{\left(8h^2 - 2h + 1\right)^2}.$$

Por tanto:

$T'(1) = \dfrac{-210}{49} \approx -4,29 \rightarrow$ está bajando a razón de 4,29 ºC la hora.

$T'(3) = \dfrac{-1050}{4489} \approx -0,23 \rightarrow$ está bajando a razón de 0,23 ºC la hora.

(Al principio se enfría muy rápidamente; con el paso del tiempo, como ya está frío, se enfría más lentamente).

10. El efecto de una anestesia t horas después de ser administrada viene dada por la expresión, $A(t) = \dfrac{16 - t^2}{16}$ (con $0 \leq t \leq 4$).

Halla:
a) El cambio medio del efecto durante la primera hora.
b) El cambio medio en el intervalo de tiempo [2, 2+h].
c) La variación del efecto en el instante $t = 2$.

Solución:

a) El cambio medio es la tasa de variación media.

$$Tvm[1,0] = \frac{A(1)-A(0)}{1-0} = \frac{\frac{15}{16} - 1}{1} = -\frac{1}{16}.$$

Lo que significa que la anestesia disminuye su efecto durante la primera hora a una velocidad media de $\frac{1}{16}$.

b) $Tvm[2,2+h]=\dfrac{A(2+h)-A(2)}{(2+h)-2}=\dfrac{16-(2+h)^2-(16-2^2)}{16h}=\dfrac{-4h-h^2}{16h}=-\dfrac{4+h}{16}$.

c) La variación instantánea para $t = 2$, es el límite de la expresión anterior cuando $h \to 0$, que vale –1/4. Este valor indica que el efecto está disminuyendo a razón de 1/4 por hora.

<u>Derivabilidad de funciones definidas a trozos</u>

11. Comprueba que la función $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x \le 0 \\ \ln(1+x^2), & \text{si } x > 0 \end{cases}$, es derivable en todo **R**.

<u>Solución</u>:
La función dada está definida siempre. También es continua y derivable en todos los puntos, salvo, quizás, en $x = 0$.
Continuidad en $x = 0$.
Si $x \to 0^-$, $f(x) = x^2 \to 0$.
Si $x \to 0^+$, $f(x) = \ln(1+x^2) \to \ln 1 = 0$.
Como ambos límites coinciden, la función es continua en $x = 0$.
Derivabilidad en $x = 0$.
Salvo en $x = 0$, su derivada vale: $f'(x)=\begin{cases} 2x, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x}{1+x^2}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
Si $x \to 0^-$, $f'(x) = 2x \to 0$.
Si $x \to 0^+$, $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2} \to 0$.
Como las derivadas laterales coinciden, la función también es derivable en $x = 0$.

12. Comprueba que la función $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+x^2, & x<0 \\ -1+\sqrt{x+1}, & 0 \le x \end{cases}$ es continua y derivable en todo **R**. Haz un esbozo de su gráfica dando valores.
<u>Solución</u>:
El único punto que presenta dificultad es $x = 0$.
Continuidad en $x = 0$. (Para que sea continua es necesario que los límites laterales sean iguales.)
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2}x+x^2\right)=0$.
Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-1+\sqrt{x+1}\right)=-1+1=0$.
Evidentemente es continua.
Derivabilidad en $x = 0$. Deben coincidir las derivadas laterales.
Salvo en $x = 0$, la derivada es:

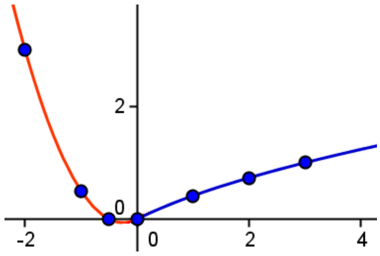
$$f´(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}+2x, & x<0\\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}, & 0<x\end{cases}.$$

Derivada por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 0^-} f´(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2}+2x\right)=\frac{1}{2}$.

Derivada por la derecha: $\lim\limits_{x\to 0^+} f´(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2}$.

Luego, la función es derivable en $x = 0$.

Para dibujarla puede observarse que se trata de dos parábolas: una de eje vertical, $f(x)=\frac{1}{2}x+x^2$; la otra, de eje horizontal, $f(x)=-1+\sqrt{x+1}$. Ambas pueden trazarse a partir de una tabla de valores.



(–2, 3); (–1, 1/2); (–1/2, 0); (0, 0).

(0, 0); $\left(1,-1+\sqrt{2}\right)$; $\left(2,-1+\sqrt{3}\right)$; (3, 1).

13. Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+x, & x\le 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$.

Solución:

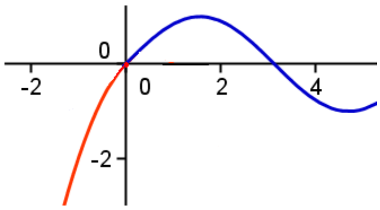
Como las funciones que definen a f son derivables, el único punto conflictivo es $x = 0$.

Para que la función sea derivable en $x = 0$ debe ser continua y deben coincidir las derivadas laterales en dicho punto.

Es continua, pues los límites laterales son iguales:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-x^2+x\right)=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\sin x=0$.



Salvo en $x = 0$, la derivada de la función es:

$$f´(x)=\begin{cases}-2x+1, & x<0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$$

Por la izquierda de $x = 0$: si $x\to 0^-$, $f´(x)=-2x+1\to 1$.

Por la derecha de $x = 0$: si $x\to 0^+$, $f´(x)=\cos x\to 1$.

Como las derivadas laterales son iguales, la función es derivable también en $x = 0$.

En la gráfica anterior puede verse que la función no cambia su trayectoria al pasar de la parábola al seno.

14. Determina los puntos en los que no son derivables las funciones:

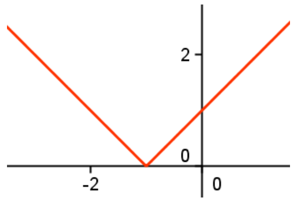
a) $f(x)=|x+1|$ b) $f(x)=|x^2-2x|$

Solución:

Ambas funciones pueden definirse a trozos y ambas son continuas.

a) $f(x)=|x+1|=\begin{cases}-(x+1), & \text{si } x<-1\\ x+1, & \text{si } x\ge -1\end{cases}$.

Derivando: $f'(x)=\begin{cases}-1, & \text{si } x<-1\\ 1, & \text{si } x>-1\end{cases}$.



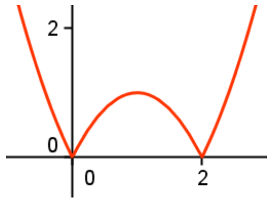
Es evidente que en $x = -1$ las derivadas laterales son distintas.
Su gráfica es la adjunta.

b) $f(x)=\left|x^2-2x\right|=\begin{cases}x^2-2x, & \text{si } x\le 0\\ -x^2+2x, & \text{si } 0<x<2\\ x^2-2x, & \text{si } x\ge 2\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x-2, & \text{si } x<0\\ -2x+2, & \text{si } 0<x<2\\ 2x-2, & \text{si } x>2\end{cases}$.

En $x = 0$ las derivadas valen:

Por la izquierda: $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x-2)=-2$.

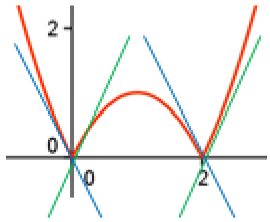
Por la derecha: $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-2x+2)=2$.



Como no son iguales, la función no es derivable en $x = 0$.
En $x = 2$:

Por la izquierda: $f'(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-2x+2)=-2$.

Por la derecha: $f'(2^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2x-2)=2$.



Tampoco es derivable en $x = 2$.
En ambos casos puede verse que las tangentes por uno y otro lado de esos puntos no son las mismas.

Derivabilidad de funciones definidas a trozos. Casos con parámetros

15. Dada la función $f(x)=\begin{cases}3-ax^2 & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{2}{ax} & \text{si } x>1\end{cases}$ halla:

a) El valor o valores de *a* para que *f* sea continua.
b) El valor o valores de *a* para que *f* sea derivable.

Solución:

El único punto que presenta dificultades es $x = 1$, que es donde se distinguen las funciones que intervienen.

a) Para que sea continua los límites laterales deben ser iguales.

Si $x\to 1^-$, $f\to 3-a$. Si $x\to 1^+$, $f\to 2/a$.

Como deben ser iguales: $3-a=\dfrac{2}{a}\Rightarrow a^2-3a+2=0 \Rightarrow a=1$ o $a=2$.

La función es continua en todo **R** si $a = 1$ o $a = 2$.

b) Para que sea derivable deben ser iguales las derivadas laterales en $x = 1$.

Derivando: $f'(x)=\begin{cases}-2ax & \text{si } x<1\\ \dfrac{-2}{ax^2} & \text{si } x>1\end{cases}$

Si $x\to 1^-$, $f'\to -2a$. Si $x\to 1^+$, $f'\to -2/a$.

Como deben ser iguales: $-2a=-\dfrac{2}{a}\Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$.

Para $a = -1$ la función no es continua, luego el valor que hace la función derivable es $a = 1$.
(Para $a = 2$ la función es continua, pero no derivable).

16. ¿Qué valor hay que asignar a *a* para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & \text{si } x\le 0 \\ 2x+1, & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea derivable en *x* = 0?

Solución:

Los límites laterales coinciden con *f*(0) = 1, pues:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{ax}=e^{0^-}=1 \text{ y } \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x+1)=1.$$

Por tanto, la función es continua en *x* = 0.

Salvo en *x* = 0, su derivada es $f´(x)=\begin{cases} ae^{ax}, & \text{si } x<0 \\ 2, & \text{si } x>0 \end{cases}$.

Las derivadas laterales en *x* = 0 valen:

$f´(0^-) = a$ y $f´(0^+) = 2 \Rightarrow$ La función es derivable si *a* = 2.

17. Halla el valor de *a* que hace que la función $f(x)=\begin{cases} ax(x+1) & \text{si } x\le 0 \\ x(x-1)^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea derivable en todo **R**. Para el valor hallado haz un esbozo de su gráfica en el intervalo [–2, 2].

Solución:

Es continua en *x* = 0, pues coinciden los limites laterales.

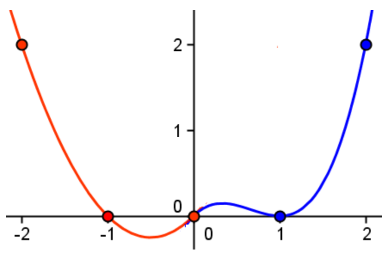
Si $x\to 0^-$, $f(x)=ax(x+1)\to 0$; si $x\to 0^+$, $f(x)=x(x-1)^2 \to 0$.

Para que sea derivable es necesario que las derivadas laterales sean iguales.

Como, salvo en *x* = 0, $f´(x)=\begin{cases} 2ax+a & \text{si } x<0 \\ 3x^2-4x+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ se tiene:

Si $x\to 0^-$, $f´(x)=2ax+a \to a$; si $x\to 0^+$, $f´(x)=3x^2-4x+1\to 1 \Rightarrow a = 1$.

Por tanto, la función es $f(x)=\begin{cases} x(x+1) & \text{si } x\le 0 \\ x(x-1)^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$.



Se puede representar dando valores, como se muestra en la figura.

(Puede observarse que en *x* = 0 la línea pasa "suavemente" de una a otra función. Eso es un indicador de su derivabilidad).

18. Demuestra que la función $f(x)=\begin{cases} \sin x & \text{si } x\le 0 \\ x-ax^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$ es derivable en toda la recta real.

Solución:

El único punto que presenta dificultades es *x* = 0. En ese punto habrá que ver que la función es continua y derivable.

Continuidad:

Si $x\to 0^-$, $f(x)=\sin x\to 0$.

Si $x\to 0^+$, $f(x)=x-ax^2\to 0$.

Como los límites laterales coinciden, la función es continua para cualquier valor de *a*.

Derivabilidad:

Salvo para $x = 0$, la función derivada es $f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 1 - 2ax & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Si $x \to 0^-$, $f'(x) = \cos x \to 1$.

Si $x \to 0^+$, $f'(x) = 1 - 2ax \to 1$.

Como las derivadas laterales coinciden, la función dada es derivable siempre, independientemente del valor que tome a.

19. Halla el valor de a para que $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + ax & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea derivable en todo **R**.

Solución:
La función dada debe ser continua y derivable.
El único punto que presenta dificultad es $x = 0$.
Continuidad:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1 - \cos x) = 1 - 1 = 0 \text{ y } \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x^2 + ax\right) = 0.$$

Como los límites laterales coinciden con $f(0) = 0$, la función es continua para cualquier valor de a.
Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x < 0 \\ 2x + a & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Como:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \sin x = 0 \text{ y } \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (2x + a) = a \Rightarrow a = 0.$$

Por tanto, la función es derivable solo cuando $a = 0$.

20. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$.

a) ¿Pará qué valores de a y b es continua en $x = 2$?
b) ¿Pará qué valores de a y b es derivable en $x = 2$?
Solución:
a) Será continua en $x = 2$ cuando coincidan los limites laterales.
Si $x \to 2^-$, $f(x) = x^2 + ax + b \to 4 + 2a + b$; si $x \to 2^+$, $f(x) = 2x \to 4$.
Debe cumplirse que $4 + 2a + b = 4 \Rightarrow 2a + b = 0$.
La función será continua siempre que $b = -2a$, con a arbitrario.

b) Para que sea derivable es necesario que las derivadas laterales, en $x = 2$, sean iguales.
Como, salvo en $x = 2$, $f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$, se deduce:

Si $x \to 2^-$, $f'(x) = 2x + a \to 4 + a$; si $x \to 2^+$, $f'(x) = 2 \to 2$.
Por tanto, $4 + a = 2 \Rightarrow a = -2$.
En ese caso, como $b = -2a \Rightarrow b = 4$.
Luego, para que sea derivable es preciso que $a = -2$ y $b = 4$.

21. Determina los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & \text{si } x\le 0 \\ ax+b & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea derivable en el punto $x = 0$.

Solución:

En primer lugar es necesario que sea continua. Para ello, deben coincidir los límites laterales en $x = 0$.

Si $x\to 0^-$, $f(x)=x^2+2x \to 0$.

Si $x\to 0^+$, $f(x)=ax+b \to b \Rightarrow b = 0$.

Para que sea derivable es necesario que coincidan las derivadas laterales.

Salvo en $x = 0$, la derivada de la función es:

$$f´(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si } x<0 \\ a & \text{si } x>0 \end{cases}.$$

Cuando $x\to 0^-$, $f´(x)=2x+2 \to 2$.

Cuando $x\to 0^+$, $f´(x)=a \to a \Rightarrow a = 2$.

Por tanto, la función dada será derivable cuando $a = 2$ y $b = 0$.

22. Determina los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} 5+2\sin(ax) & \text{si } x\le 0 \\ ax^2+bx+b & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea derivable en $x = 0$.

Solución:

Continuidad en $x = 0$: deben coincidir los límites laterales en dicho punto.

Si $x\to 0^-$, $f(x)=5+2\sin(ax)\to 5$.

Si $x\to 0^+$, $f(x)=ax^2+bx+b \to b \Rightarrow b = 5$; independiente del valor de a.

Por tanto, $f(x)=\begin{cases} 5+2\sin(ax) & \text{si } x\le 0 \\ ax^2+5x+5 & \text{si } x>0 \end{cases}$.

Derivabilidad en $x = 0$: deben coincidir las derivadas laterales en dicho punto.

Salvo en $x = 0$, $f´(x)=\begin{cases} 2a\cos(ax) & \text{si } x<0 \\ 2ax+5 & \text{si } x>0 \end{cases}$.

Si $x\to 0^-$, $f´(x)=2a\cos(ax) \to 2^a$.

Si $x\to 0^+$, $f´(x)=2ax+5 \to 5 \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a=\frac{5}{2}$.

La función derivable es $f(x)=\begin{cases} 5+2\sin\left(\frac{5}{2}x\right) & \text{si } x\le 0 \\ \frac{5}{2}x^2+5x+5 & \text{si } x>0 \end{cases}$.

23. (Selectividad 2011). Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x} & \text{si } x\le -1\\[2mm] \dfrac{x^2-b}{4} & \text{si } x>-1\end{cases}.$$

Calcúlense *a*, *b* para que *f* sea continua y derivable en *x* = –1.

<u>Solución</u>:

Continuidad:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{a}{x}=-a\,;\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-b}{4}=\frac{1-b}{4}.$$

Límites laterales iguales: $-a=\dfrac{1-b}{4}\Rightarrow 4a-b=-1$. [1]

Derivabilidad:

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{a}{x^2} & \text{si } x<-1\\[2mm] \dfrac{2x}{4} & \text{si } x>-1\end{cases}$$ → Las derivadas laterales en *x* = –1 deben ser iguales:

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x)=\lim_{x\to -1^-}\left(-\frac{a}{x^2}\right)=-a\,;\ \lim_{x\to -1^+} f'(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ -a=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}.$$

Sustituyendo en $4a-b=-1\Rightarrow 2-b=-1\Rightarrow b=3$.

<u>Cálculo de derivadas</u>

24. Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado y calcula en cada caso $f'(-1)$, si existe.

a) $f(x)=(1+2x)\cdot(x-x^2)^3$ b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ c) $f(x)=\ln\sqrt{2x^2-2x}$

<u>Solución</u>:

a) $f(x)=(1+2x)\cdot(x-x^2)^3\ \Rightarrow\ f'(x)=2\cdot(x-x^2)^3+(1+2x)\cdot 3(x-x^2)^2\cdot(1-2x)\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ f'(x)=\left(2\cdot(x-x^2)+(1+2x)\cdot 3(1-2x)\right)(x-x^2)^2=\left(2x-2x^2+3(1-4x^2)\right)(x-x^2)^2\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ f'(x)=(3+2x-14x^2)(x-x^2)^2\ \to\ f'(-1)=(-13)\cdot(-2)^2=-52$.

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}\ \Rightarrow$ b) $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}\ \to\ f'(-1)=\dfrac{-2\cdot(-1)}{((-1)^2+1)^2}=\dfrac{1}{2}$.

c) $f(x)=\ln\sqrt{2x^2-2x}\ \Rightarrow\ f(x)=\ln(2x^2-2x)^{1/2}=\dfrac{1}{2}\ln(2x^2-2x)\Rightarrow$

$\Rightarrow\ f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4x-2}{2x^2-2x}=\dfrac{2x-1}{2x^2-2x}\ \to\ f'(-1)=\dfrac{-3}{4}$.

25. Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado y calcula en cada caso $f´(-1)$, si existe.

a) $f(x)=\dfrac{2x^3-3x}{x^2-1}$ b) $f(x)=x^2e^{2x-2}$ c) $f(x)=\sin(1+x)^2-\cos(\pi x)$

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{2x^3-3x}{x^2-1} \Rightarrow f´(x)=\dfrac{(6x^2-3)(x^2-1)-2x\cdot(2x^3-3x)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2x^4-3x^2+3}{(x^2-1)^2} \to f´(-1)$ no existe: la función no está definida en ese punto.

b) $f(x)=x^2e^{2x-2} \Rightarrow f´(x)=2xe^{2x-2}+2x^2e^{2x-2}=2x(1+x)e^{2x-2} \to f´(-1)=0$.

c) $f(x)=\sin(1+x)^2-\cos(\pi x) \Rightarrow f´(x)=2(1+x)\cdot\cos(1+x)^2+\pi\cdot\sin(\pi x) \to f´(-1)=0$.

26. Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ b) $f(x)=(2x+2)\sqrt{x^2-2x}$ c) $f(x)=(1-x)^2e^{3x}$

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2} \Rightarrow f´(x)=\dfrac{(x-1)^2-x\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\dfrac{x-1-2x}{(x-1)^3}=\dfrac{-x-1}{(x-1)^3}$.

b) $f(x)=(2x+2)\sqrt{x^2-2x} \Rightarrow f´(x)=2\sqrt{x^2-2x}+(2x+2)\cdot\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} \Rightarrow$

$f´(x)=\dfrac{4x^2-4x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$.

c) $f(x)=(1-x)^2e^{3x} \Rightarrow f´(x)=2(1-x)\cdot(-1)e^{3x}+(1-x)^2\cdot 3e^{3x}=(3x^2-4x+1)e^{3x}$.

27. Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ b) $f(x)=x^2\sqrt{x^4-2x}$ c) $f(x)=\ln(2x^2+2)-\sin\dfrac{x}{2}$

Solución:

a) $f´(x)=\dfrac{e^x\cdot(1+e^x)^2-2e^x\cdot(1+e^x)\cdot e^x}{(1+e^x)^4}=\dfrac{e^x\cdot(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$.

b) $f(x)=x^2\sqrt{x^4-2x} \Rightarrow f´(x)=2x\sqrt{x^4-2x}+x^2\cdot\dfrac{4x^3-2}{2\sqrt{x^4-2x}} \Rightarrow f´(x)=\dfrac{4x^5-5x^2}{\sqrt{x^4-2x}}$.

c) $f(x)=\ln(2x^2+2)-\sin\dfrac{x}{2} \Rightarrow f´(x)=\dfrac{4x}{2x^2+2}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$.

28. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln\left(\sqrt{x}\right)$ b) $f(x)=\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ c) $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ d) $f(x)=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{x+3}}$

Solución:

Recuerda que si $y=\ln f(x) \Rightarrow y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

a) $f(x)=\ln\left(\sqrt{x}\right) \Rightarrow f(x)=\ln\left(x^{1/2}\right)=\dfrac{1}{2}\ln x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2x}$.

b) $f(x)=\ln\left(1+\sqrt{x}\right) \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}+2x}$.

c) $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\left(\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\right)$ = (operando) = $\dfrac{-1}{2x\left(\sqrt{x}+1\right)}$.

d) $f(x)=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{x+3}} \Rightarrow$ (aplicando las propiedades de los logaritmos) $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=\ln x^2-\ln\sqrt{x+3} \Rightarrow f(x)=2\ln x-\dfrac{1}{2}\ln\left(x+3\right)$.

Derivando: $f'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2\left(x+3\right)}$.

29. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{1/x}$ b) $f(x)=x^2e^{1/x}$ c) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$ d) $f(x)=e^{x^2-\frac{1}{x}}$

Solución:

Recuerda que si $y=e^{f(x)} \Rightarrow y'=f'(x)\cdot e^{f(x)}$

a) $f(x)=e^{1/x} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{1/x}$.

b) $f(x)=x^2e^{1/x} \Rightarrow f'(x)=2xe^{1/x}-x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}e^{1/x}=\left(2x-1\right)e^{1/x}$.

c) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1/x}} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{1/x}}{\left(1+e^{1/x}\right)^2}=\dfrac{e^{1/x}}{x^2\left(1+e^{1/x}\right)^2}$.

d) $f(x)=e^{x^2-\frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x)=\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{x^2-\frac{1}{x}}$.

30. Dada $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2-3)^3}$, halla los valores de $f\,'(1)$ y $f\,''(1)$.

Solución:

$$f'(x)=\frac{2(x^2-3)^3-2x\cdot 3(x^2-3)^2\cdot 2x}{(x^2-3)^6} \Rightarrow f'(x)=\frac{2(x^2-3)-2x\cdot 3\cdot 2x}{(x^2-3)^4} \Rightarrow f'(x)=\frac{-10x^2-6}{(x^2-3)^4}.$$

$$f''(x)=\frac{-20x(x^2-3)^4-(-10x^2-6)\cdot 4(x^2-3)^3\cdot 2x}{(x^2-3)^8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{-20x(x^2-3)-(-10x^2-6)\cdot 4\cdot 2x}{(x^2-3)^8} \Rightarrow f''(x)=\frac{60x^3+108x}{(x^2-3)^5}.$$

Por tanto:

$$f'(1)=\frac{-10-6}{(-2)^4}=-1; \qquad f''(1)=\frac{60+108}{(-2)^5}=-\frac{21}{4}.$$

31. Halla los puntos en los que se anulan las derivadas primera y segunda de $f(x)=\dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$.

Solución:

$$f(x)=\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}=\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}.$$

Derivada primera:

$$f'(x)=\frac{(8x-4)\cdot(4x^2+1)-(4x^2-4x+1)\cdot 8x}{(4x^2+1)^2}=\frac{16x^2-4}{(4x^2+1)^2} \Rightarrow 16x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}.$$

Derivada segunda:

$$f''(x)=\frac{32x(4x^2+1)^2-(16x^2-4)\cdot 2(4x^2+1)\cdot 8x}{(4x^2+1)^4}=\frac{32x(4x^2+1)-(16x^2-4)\cdot 2\cdot 8x}{(4x^2+1)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{32x(3-4x^2)}{(4x^2+1)^4} \to 32x(3-4x^2)=0 \Rightarrow x=0 \text{ o } x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

32. Halla el valor de las derivadas primera y segunda de $g(x)=\dfrac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$ en el punto $x=-\dfrac{1}{2}$.

Solución:

$$g(x)=\frac{e^{2x+1}}{(x-1)^2} \Rightarrow g'(x)=\frac{2e^{2x+1}(x-1)^2-e^{2x+1}2(x-1)}{(x-1)^4} \Rightarrow \text{(simplificando)}$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{2e^{2x+1}(x-1)-e^{2x+1}2}{(x-1)^3}=\frac{2(x-2)e^{2x+1}}{(x-1)^3}.$$

Por tanto, $g'(-1/2)=\dfrac{2\left(-\frac{1}{2}-2\right)e^0}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^3}=\dfrac{-5}{-\frac{27}{8}}=\dfrac{40}{27}.$

Derivada segunda:

$$g'(x)=\frac{2(x-2)e^{2x+1}}{(x-1)^3} \Rightarrow g''(x)=\frac{\left(2e^{2x+1}+4(x-2)e^{2x+1}\right)\cdot(x-1)^3-2(x-2)e^{2x+1}\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}.$$

Simplificando:

$$g''(x)=\frac{\left(2e^{2x+1}+4(x-2)e^{2x+1}\right)\cdot(x-1)-2(x-2)e^{2x+1}\cdot 3}{(x-1)^4}=\frac{\left(4x^2-16x+18\right)\cdot e^{2x+1}}{(x-1)^4}.$$

Por tanto, $g''(-1/2)=\dfrac{(1+8+18)\cdot e^0}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^4}=\dfrac{27}{\frac{81}{16}}=\dfrac{16}{3}$.

33. a) Halla los puntos en los que se anula la derivada de $f(x)=\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$.

b) Halla los puntos en los que es positiva la derivada de $f(x)=2x^3-3x^2$.

c) Halla los puntos en los que es negativa la derivada de $f(x)=\ln\left(x^2+2x+2\right)$.

<u>Solución</u>:

a) $f'(x)=\dfrac{e^x\cdot\left(1+e^x\right)^2-2e^x\cdot\left(1+e^x\right)\cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^4}=\dfrac{e^x\cdot\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^3}$; $f'(x)=0 \Rightarrow 1-e^x=0 \Rightarrow x=0$.

b) $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1) \Rightarrow 6x(x-1)>0$ cuando ambos factores son negativos o ambos positivos: $x<0$ o $x>1$.

c) $f'(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2} \Rightarrow$ Esta derivada será negativa cuando lo sea el numerador, pues el denominador nunca lo es. Por tanto: $2x+2<0 \Rightarrow x<-1$.

34. Deriva las siguientes funciones simplificando el resultado. Calcula, si es posible, su valor en el punto $x = 0$:

a) $f(x)=-2xe^{x^2}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos^2\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ c) $f(x)=(1-x)^2e^x$ d) $f(x)=\ln(2x^2+2)$

<u>Solución</u>:

a) $f(x)=-2xe^{x^2} \Rightarrow f'(x)=-2e^{x^2}-2x\cdot 2xe^{x^2} \Rightarrow f'(x)=-2e^{x^2}(1+2x^2) \to f'(0)=-2$.

b) $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos^2\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cos\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\cdot\left(-\sin\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right)\cdot\left(\dfrac{x-1-x}{(x-1)^2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\sin\left(\frac{x}{x-1}\right)\cos\left(\frac{x}{x-1}\right)}{(x-1)^2} \to f'(0)=0.$$

c) $f(x)=(1-x)^2e^x \Rightarrow f'(x)=2(1-x)\cdot(-1)e^x+(1-x)^2e^x=\left(x^2-1\right)e^x \to f'(0)=-1$.

d) $f(x)=\ln(2x^2+2) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{4x}{2x^2+2}=\dfrac{2x}{x^2+1} \to f'(0)=0$.

35. Deriva, simplificando los resultados, las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{(2x-1)^2}$ b) $f(x)=(5x-4)^2e^{3x}$ c) $f(x)=\ln\left(3x^2+2x\right)-\cos\left(\dfrac{x-3}{3}\right)$

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{(2x-1)^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(2x-1)(2x-1)^2-\left(x^2-x\right)\cdot 2(2x-1)\cdot 2}{(2x-1)^4}=$

$=\dfrac{(2x-1)(2x-1)-\left(x^2-x\right)\cdot 2\cdot 2}{(2x-1)^3}=\dfrac{1}{(2x-1)^3}$.

b) $f(x)=(5x-4)^2e^{3x} \Rightarrow f'(x)=2(5x-4)\cdot 5e^{3x}+(5x-4)^2\cdot 3e^{3x}=(15x-2)(5x-4)e^{3x}$

c) $f(x)=\ln\left(3x^2+2x\right)-\cos\left(\dfrac{x-3}{3}\right) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{6x+2}{3x^2+2x}+\sin\left(\dfrac{x-3}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{3}$.

36. Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado cuando se pueda; calcula en todos los casos $f'(1)$, si existe.

a) $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2}{x-1}$ b) $f(x)=(2-3x)\sqrt{3x^4-2x}$ c) $f(x)=\sin^2\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\left(6x^2+2x\right)(x-1)-1\cdot\left(2x^3+x^2\right)}{(x-1)^2}=\dfrac{4x^3-5x^2-2x}{(x-1)^2} \to f'(1)$ no existe.

b) $f(x)=(2-3x)\sqrt{3x^4-2x} \Rightarrow f'(x)=-3\sqrt{3x^4-2x}+(2-3x)\cdot\dfrac{12x^3-2}{2\sqrt{3x^4-2x}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)=-3\sqrt{3x^4-2x}+(2-3x)\cdot\dfrac{6x^3-1}{\sqrt{3x^4-2x}} \to f'(1)=-3-1\cdot\dfrac{5}{\sqrt{1}}=-8$.

c) $f(x)=\sin^2\left(\dfrac{x-1}{2}\right) \Rightarrow f'(x)=2\sin\dfrac{x-1}{2}\cdot\cos\dfrac{x-1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{x-1}{2}\cdot\cos\dfrac{x-1}{2} \to f'(1)=0$.

37. Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado y calcula en cada caso $f'(-1)$, si existe.

a) $f(x)=\dfrac{2x^3-3x}{x^2-1}$ b) $f(x)=\sqrt[5]{x^2-2}$

c) $f(x)=x^2e^{2x-2}$ d) $f(x)=\sin(1+x)^2-\cos(\pi x)$

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{2x^3-3x}{x^2-1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\left(6x^2-3\right)\left(x^2-1\right)-2x\cdot\left(2x^3-3x\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\dfrac{2x^4-3x^2+3}{\left(x^2-1\right)^2} \to f'(-1)$ no existe: la función no está definida en ese punto…

b) $f(x)=\left(x^2-2\right)^{1/5} \Rightarrow f´(x)=\dfrac{1}{5}\left(x^2-2\right)^{-4/5}\cdot 2x = \dfrac{2x}{5\cdot\sqrt[5]{\left(x^2-2\right)^4}} \to f´(-1)=-\dfrac{2}{5}$.

c) $f(x)=x^2e^{2x-2} \Rightarrow f´(x)=2xe^{2x-2}+2x^2e^{2x-2} = 2x(1+x)e^{2x-2} \to f´(-1)=0$.

d) $f(x)=\sin(1+x)^2-\cos(\pi x) \Rightarrow f´(x)=2(1+x)\cdot\cos(1+x)^2+\pi\cdot\sin(\pi x) \to f´(-1)=0$.

38. Halla la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $y=2^{3x^2-x}$ b) $f(x)=\left(\cos x^2\right)^3$ c) $f(x)=(\cos 2x)^3$ d) $y=\operatorname{tag}(3x+2)$

e) $y=\operatorname{tag}(x^3+2)$ f) $y=\operatorname{tag}(x+2)^3$ g) $y=\arcsin 3x$ h) $y=\arcsin\dfrac{x}{3}$

i) $y=\sqrt{9-x^2}$ j) $y=\arcsin x^3$ k) $y=\sqrt{1-x^6}$ l) $y=\arccos(1+x)$

m) $y=\arctan 4x$ n) $y=\arctan\dfrac{x}{4}$ o) $y=\ln\left(16+x^2\right)$ p) $y=\arctan\sqrt{x}$

Solución:

a) $y=2^{3x^2-x} \Rightarrow y´=(6x-1)\cdot 2^{3x^2-1}\ln 2$.

b) $f(x)=\left(\cos x^2\right)^3 \Rightarrow f´(x)=3\left(\cos x^2\right)^2\cdot\left(-\sin x^2\right)\cdot 2x = -6x\cdot\sin x^2\cdot\left(\cos x^2\right)^2$.

c) $f(x)=(\cos 2x)^3 \Rightarrow f´(x)=3(\cos 2x)^2\cdot(-\sin 2x)\cdot 2 = -6\cdot\sin 2x\cdot(\cos 2x)^2$.

d) $y=\operatorname{tag}(3x+2) \Rightarrow y´=3\left(1+\operatorname{tag}^2(3x+2)\right) = \dfrac{3}{\cos^2(3x+2)}$.

e) $y=\operatorname{tag}(x^3+2) \Rightarrow y´=3x^2\left(1+\operatorname{tag}^2(x^3+2)\right)=\dfrac{3x^2}{\cos^2(x^3+2)}$.

f) $y=\operatorname{tag}(x+2)^3 \Rightarrow y´=3(x+2)^2\left(1+\operatorname{tag}^2(x+2)^3\right)$.

g) $y=\arcsin 3x \Rightarrow y´=\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$.

h) $y=\arcsin\dfrac{x}{3} \Rightarrow y´=\dfrac{1/3}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}}}=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.

i) $y=\sqrt{9-x^2} \Rightarrow y´=\dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$.

j) $y=\arcsin x^3 \Rightarrow y´=\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$.

k) $y=\sqrt{1-x^6} \Rightarrow y´=\dfrac{-6x^5}{2\sqrt{1-x^6}}=\dfrac{-3x^5}{\sqrt{1-x^6}}$.

l) $y=\arccos(1+x) \Rightarrow y´=-\dfrac{1}{\sqrt{1-(1+x)^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{x(-x-2)}}$.

m) $y=\arctan 4x \Rightarrow y´=\dfrac{4}{1+16x^2}$.

n) $y = \arctan\frac{x}{4} \Rightarrow y' = \frac{1/4}{1+\frac{x^2}{16}} = \frac{4}{16+x^2}$.

o) $y = \ln\left(16+x^2\right) \Rightarrow y'\frac{2x}{16+x^2}$.

p) $y = \arctan\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Tangente a una curva

39. Halla y representa gráficamente la recta tangente a $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto $x = 0,5$.

Solución:
La recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = a$ es:

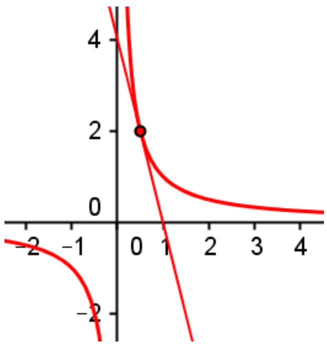
$y - f(a) = f'(a)(x-a)$.

En este caso, $a = 0,5$, $f(0,5) = 2$ y $f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f'(0,5) = -4$.

Por tanto, la recta tangente es:

$y - 2 = -4(x-0,5) \Rightarrow y = -4x+4$.

La representación gráfica es la adjunta.



40. Halla la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes en los puntos que se indica:

a) $f(x) = -x^2 + 4x$ en el punto $x = 3$.
b) $y = \frac{2}{x+3}$ en el punto de abscisa $x = 1$.
c) $f(x) = \frac{4}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$.
d) $f(x) = \frac{6x}{4x^2+1}$ en el punto $x = 1$.
e) $f(x) = e^{-x+2}$ en el punto $x = 2$.
f) $f(x) = \ln(x-3)$ en el punto $x = 4$.

Solución:
La ecuación de la recta tangente a la curva asociada a la función $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ viene dada por la expresión: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

a) La recta tangente a la función $f(x) = -x^2 + 4x$ en el punto de abscisa $x = 3$, será:

$y' - f(3) = f'(3)(x-3)$.

Como $f(3) = 3$ y $f'(3) = -2$, se obtiene: $y - 3 = -2(x-3) \Rightarrow y = -2x+9$.

b) $y = \frac{2}{x+3} \Rightarrow y = \frac{-2}{(x+3)^2} \to y(1) = 1/2;\ y'(1) = -1/8$.

La ecuación de la tangente es: $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{1}{8}x + \frac{5}{8}$.

c) $f(x) = \frac{4}{x} \Rightarrow f(2) = 2;\ f'(x) = -\frac{4}{x^2} \Rightarrow f'(2) = -1$.

Por tanto, la recta tangente es: $y - 2 = -(x-2) \Rightarrow y = -x+4$.

d) $f(x) = \frac{6x}{4x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{6(1-4x^2)}{(4x^2+1)^2} \to (f(1) = 6/5;\ f'(1) = -18/25)$.

La tangente es: $y-\frac{6}{5}=-\frac{18}{25}(x-1) \Leftrightarrow y=-\frac{18}{25}x+\frac{48}{25}$.

e) $f(x)=e^{-x+2} \Rightarrow f(2)=e^0=1$; $f´(x)=-e^{-x+2} \Rightarrow f´(2)=-e^0=-1$.

La tangente es: $y-1=-(x-2) \Rightarrow y=-x+3$.

f) $f(x)=\ln(x-3) \Rightarrow f(4)=\ln 1=0$; $f´(x)=\frac{1}{x-3} \Rightarrow f´(x)=\frac{1}{4-3}=1$.

La tangente es: $y-0=(x-4) \Rightarrow y=x-4$.

41. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ en el punto (0, f(0)).

Solución:

La ecuación de la recta pedida es: $y-f(0)=f´(0)(x-0)$.

$$f(x)=x\sqrt{4-x^2} \Rightarrow f´(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f(0)=0;\ f´(0)=2.$$

La recta tangente será: $y-0=2(x-0) \Rightarrow y=2x$.

42. La curva de ecuación $y=3x^2-1$ y la recta $y=4x+b$ son tangentes en el punto $x=\frac{2}{3}$.

¿Cuál debe ser el valor de b?

Solución:

En el punto de tangencia la derivada debe valer 4, que es el valor de la pendiente de la recta tangente.

$$y´=6x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Para $x=\frac{2}{3}$, $y=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-1=\frac{1}{3}$. El punto de tangencia es $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Como ese punto debe cumplir la ecuación de la recta $y=4x+b$:

$$\frac{1}{3}=4\cdot\frac{2}{3}+b \Rightarrow b=-\frac{7}{3}.$$

43. Halla la ecuación de la parábola $y=x^2+bx+c$ que es tangente a la recta $y=x$ en el punto (1, 1).

Solución:

La parábola debe pasar por el punto (1, 1) $\Rightarrow 1=1+b+c \Rightarrow c=-b$.

La derivada en el punto de abscisa x = 1 debe valer 1, que es el valor de la pendiente de la recta tangente.

Como $y´=2x+b \Rightarrow 2+b=1 \Rightarrow b=-1 \to c=1$.

La parábola buscada es $y=x^2-x+1$.

44. Determina los puntos de la curva $y=x^3-3x^2+2$ en los cuales la recta tangente es paralela $y=9x+5$. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes en esos puntos.

Solución:

La derivada en los puntos buscados debe valer 9, que es el valor de la pendiente de la recta dada.

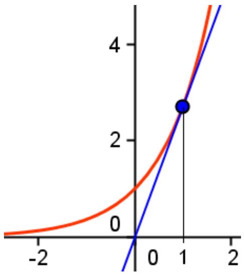
Como $y´=3x^2-6x$, debe cumplirse que $3x^2-6x=9 \Rightarrow 3x^2-6x-9=0 \Rightarrow x=-1$ o $x=3$.

Para esos valores, los puntos de la curva son: (–1, –2) y (3, 2).
La tangente en (–1, –2) es: $y+2=9(x+1) \Rightarrow y=9x+7$.
La tangente en (3, 2) es: $y-2=9(x-3) \Rightarrow y=9x-25$.

45. Determina el valor de p para que la recta tangente a la curva $y=e^{px}$, en el punto de abscisa x = 1, pase por el origen de coordenadas.
Solución:

$y=e^{px} \to y'=pe^{px}$.

En x = 1: $y(1)=e^{p}$; $y'(1)=pe^{p}$.
La tangente en ese punto es: $y-e^{p}=pe^{p}(x-1)$.
Para que pase por (0, 0): $0-e^{P}=pe^{P}(0-1) \Rightarrow (p-1)e^{p}=0 \Rightarrow p=1$.
La situación sería la dibujada a la derecha.



46. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ en el punto de abscisa x = e.

Solución:
La ecuación de la recta tangente en x = e es $y-f(e)=f'(e)\cdot(x-e)$.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow f'(e)=\frac{1-\ln e}{e^2}=0.$$

Como $f(e)=\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1}{e}$, la recta tangente en x = e es: $y-\dfrac{1}{e}=0\cdot(x-e) \Rightarrow y=\dfrac{1}{e}$.

47. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x-e^{-3x}$ en el punto de abscisa x = 0.
Solución:
Derivando:

$f'(x)=1-(-3)e^{-3x}=1+3e^{-3x}$

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa x = a es:
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$
En este caso: x = 0; $f(0)=-1$; $f'(0)=4$.
La ecuación de la tangente es: $y+1=4x \Rightarrow y=4x-1$.

48. Halla el valor de n para que la recta de ecuación $y=5x+n$ es tangente a $f(x)=x^2-x+4$ en el punto de abscisa 3.
Solución:
La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada en el punto de tangencia. Como se desea que la recta tangente sea $y=5x+n \Rightarrow$ su pendiente debe valer 5.
Por tanto: $f'(x)=2x-1=5 \Rightarrow x=3$. Para x = 3, $f(3)=9-3+4=10$.
El punto de tangencia es (3, 10). Sustituyendo en $y=5x+n \to 10=5\cdot3+n \Rightarrow n=-5$.
O también:
La ecuación de dicha recta tangente es $y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3) \Rightarrow y=5x-5$.

49. La recta tangente a la curva $y = x^3$ tiene pendiente 3 y pasa por el punto (0, –2). ¿Cuál es el punto de tangencia?

Solución:

Si (x_0, y_0) es el punto de tangencia, la ecuación de la tangente será

$$y - y_0 = f'(y_0)(x - x_0).$$

La pendiente $f'(y_0) = 3 \Rightarrow 3 = 3x_0^2 \Rightarrow x_0 = \pm 1$.

• Para x_0 = 1, y_0 = 1; el punto de tangencia sería P_1 = (1, 1).

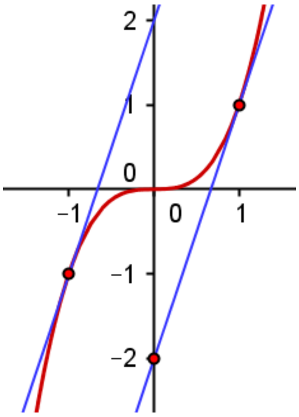
La tangente: $y - 1 = 3(x-1) \Leftrightarrow y = 3x - 2$

• Para x_0 = –1, y_0 = –1; el punto de tangencia sería P_2 = (–1, –1).

La tangente: $y + 1 = 3(x+1) \Leftrightarrow y = 3x + 2$

De estas dos rectas, la única que pasa por el punto dado, (0, –2), es la primera, $y = 3x - 2$. Luego, la solución pedida es P_1(1, 1).

Gráficamente, la situación se muestra en la figura adjunta.



Diferencial de una función

50. Halla la diferencial de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ b) $y = e^{-x}$ c) $u = \cos^2 x$ d) $u = \sqrt{x+1}$

Solución:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow dy = (6x^2 - 6x)dx$. b) $y = e^{-x} \Rightarrow dy = -e^{-x}dx$.

c) $u = \cos^2 x \Rightarrow du = 2\cos x \cdot (-\sin x)dx$. d) $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow du = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}dx$.

51. ¿Cuál es el incremento (la variación aproximada) de cada una de las siguientes funciones cuando, partiendo de x = 2, la variable x se incrementa en 0,2?

a) $f(x) = \ln(x-1)$ b) $f(x) = xe^{2-x}$ c) $f(x) = \sqrt{x-1}$

Solución:

El incremento de la función es aproximadamente igual al valor de $df(2)$ con $dx = 0{,}2$.

a) Para $f(x) = \ln(x-1) \Rightarrow df(x) = \dfrac{1}{x-1}dx \to df(2) = \dfrac{1}{2-1}\cdot 0{,}2 = 0{,}2$.

b) Para $f(x) = xe^{2-x} \Rightarrow df(x) = (e^{2-x} - xe^{2-x})dx \to df(2) = (e^{2-2} - 2\cdot e^{2-2})0{,}2 = -0{,}2$.

c) Para $f(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow df(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}dx \to df(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2-1}}\cdot 0{,}2 = 0{,}1$.

52. Teniendo en cuenta que $\sqrt{64} = 8$, utilizando la diferencial de la función $f(x) = \sqrt{x}$, halla el valor aproximado de $\sqrt{65}$.

Solución:

Si $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow df(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$.

Para x = 64 y dx = 1 se tiene: $df(64) = \dfrac{1}{2\sqrt{64}}\cdot 1 = \dfrac{1}{16} = 0{,}0625$.

Por tanto, $f(65) \approx f(64) + df(64) = 8 + 0{,}0625 = 8{,}0625$.

Observación: Utilizando la recta tangente en $x = 64$, que es $y - f(64) = f´(64)(x-64) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 8 = \dfrac{1}{2\sqrt{64}}(x-64) \Rightarrow y = \dfrac{1}{16}x + 4 \rightarrow$ Para $x = 65$, $f(65) \approx \dfrac{1}{16}\cdot 65 + 4 = 8{,}0625$.

Con la calculadora se obtiene $\sqrt{65} = 8{,}062257748$. El error que se comete al aproximar ese valor con la diferencial es inferior a 0,0003.

Aplicaciones a la economía

53. El coste de fabricación de x unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x) = 0{,}1x^2 + 3x + 100$ unidades monetarias (u.m.). Si todas las unidades producidas se venden a un precio (en u.m.) dado por $p(x) = 25 - 0{,}3x$, calcula:

a) El coste marginal por la producción de la décima unidad.
b) El incremento exacto por la producción de la décima unidad.
c) La función de ingresos y de beneficios.
d) El ingreso y beneficio marginal por la venta de la décima unidad.

Solución:

a) Coste marginal: $C´(x) = 0{,}2x + 3$.
Como $x + 1 = 10$, $x = 9$, luego $C´(9) = 0{,}2\cdot 9 + 3 = 4{,}8$ u.m.

b) Pasar de producir 9 a 10 unidades incrementa los costes en $C(10) - C(9) = 140 - 135{,}1 = 4{,}9$ u.m. La aproximación dada por $C´(x)$ es buena.

c) Los ingresos, $I(x)$ = (número de unidad vendidas) · (precio por unidad).
Por tanto, $I(x) = x\cdot p(x) = x\left(25 - 0{,}3x\right) = 25x - 0{,}3x^2$
Los beneficios, $B(x)$ = (ingresos) – (costes)

$$B(x) = I(x) - C(x) = 25x - 0{,}3x^2 - \left(0{,}1x^2 + 3x + 100\right) = -0{,}4x^2 + 22x - 100.$$

d) $I´(x) = 25 - 0{,}6x \Rightarrow I´(9) = 25 - 5{,}4 = 19{,}6$ u.m.
$B´(x) = -0{,}8x + 22 \Rightarrow B´(9) = -7{,}2 + 22 = 14{,}8$ u.m.

54. La ganancia anual de una empresa es $G(t) = \sqrt{144 + 2t + 4t^2} - 12$, t en años, contado desde el 1 de enero de 2010.

a) ¿A qué ritmo estaba aumentando la ganancia a principios de 2015?
b) ¿En qué porcentaje?

Solución:

a) $G(t) = \sqrt{144 + 2t + 4t^2} - 12 \Rightarrow G´(t) = \dfrac{2 + 8t}{2\sqrt{144 + 2t + 4t^2}} \rightarrow G´(5) = \dfrac{42}{2\sqrt{254}} \approx 1{,}32$.

b) A comienzos del año 2015 la ganancia era de $G(5) = \sqrt{254} - 12 \approx 3{,}94$.
Si crece a un ritmo anual de 1,32, en porcentaje ese crecimiento es de

$$\frac{G´(5)}{G(5)}\cdot 100 = \frac{1{,}32}{3{,}94}\cdot 100 = 33{,}5\ \%$$

Observación: el crecimiento real a lo largo del año 2015 será $G(6) - G(5) = 5{,}32 - 3{,}94 = 1{,}38$, algo mayor que el experimento al principio de año.

55. El beneficio de una multinacional viene dado por la expresión $B(x) = -0,1x^2 + 1,8x - 2,1$ millones de euros; siendo *x* los años trascurridos desde comienzos de 2010. Se pide:
a) ¿Cuánto fue la tasa de crecimiento medio del beneficio durante los años 2014 y 2015?
b) ¿Cuánto valía esa tasa al comenzar el año 2017? ¿Qué porcentaje de crecimiento supuso?
c) ¿En qué momento el beneficio deja de crecer?
<u>Solución</u>:
a) A comienzos de 2010, $x = 0$. A comienzos de 2014, $x = 4$; a finales de 2015, $x = 6$ (justo en el momento de cambio de año). Por tanto, el intervalo será [4, 6] → (si se quiere precisar, sería (4, 6).

$Tvm[4,\ 6] = \dfrac{B(6) - B(4)}{6-4} = \dfrac{5,1 - 3,5}{2} = 0,8$ → el beneficio creció a razón de 0,8 millones de euros al año.

b) $B'(x) = -0,2x + 1,8 \Rightarrow B'(7) = 0,4$.

En términos relativos: $\dfrac{B'(7)}{B(7)} = \dfrac{0,4}{5,6} = 0,071 \to 7,1\ \%$

c) El beneficio deja de crecer cuando $B'(x) = -0,2x + 1,8 = 0 \Rightarrow x = 9$.
A principios del 9º año el beneficio es 0; después la tasa de crecimiento es negativa. Los beneficios, aunque positivos, comienza a disminuir.

56. La función de coste total de un determinado producto es
$C(x) = 5000 + 3x - 0,05x^2 + 0,001x^3$ (unidades monetarias: u.m.).
Halla:
a) La función de coste medio unitario. ¿Cuánto cuesta fabricar 100 piezas? ¿A cuánto sale cada una?
b) La función de coste marginal.
c) El coste marginal de la unidad número 101. Compara el resultado con el coste unitario cuanto se fabrican 100 piezas; comenta la diferencia.
<u>Solución</u>:
a) $c(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{5000}{x} + 3 - 0,05x + 0,001x^2$.
$C(100) = 5000 + 3\cdot 100 - 0,05\cdot 100^2 + 0,001\cdot 100^3 = 5800$ → cada pieza sale a 58 u.m..

b) Es la derivada de $C(x) = 5000 + 3x - 0,05x^2 + 0,001x^3 \Rightarrow C'(x) = 3 - 0,1x + 0,003x^2$.

c) La unidad número 101 es la siguiente a la 100 ⇒ el coste marginal será
$C'(100) = 3 - 0,1\cdot 100 + 0,003\cdot 100^2 = 23$ u.m.
El coste unitario cuando se fabrican 100 piezas es de 58 u.m, pero la fabricación de la unidad número 101 cuesta 23 u.m. (bastante menos que el coste unitario). Esto significa que a medida que se fabrican más piezas el coste medio va disminuyendo (al menos hasta cierto nivel de producción).

57. Contesta a las mismas preguntas para la función $C(x) = 4x - 2\sqrt{x+100}$.
Solución:
a) $c(x) = \dfrac{C(x)}{x} = 4 - \dfrac{2\sqrt{x+100}}{x}$.
$C(100) = 400 - 2\sqrt{200} = 371,7$ $\to$ cada pieza sale a 3,717 u.m..

b) $C´(x) = 4 - \dfrac{1}{\sqrt{x+100}}$.

c) $C´(100) = 4 - \dfrac{1}{\sqrt{200}} = 3,93$.
En este caso puede observarse que el coste marginal tiende a 4 u.m., lo mismo que el coste unitario.

58. La función de ingreso total por la venta de *x* unidades de un determinado producto es $I(x) = \dfrac{500x}{x+4}$.
Halla:
a) La función de ingreso marginal.
b) El ingreso marginal por la unidad 51.
Solución:
a) $I(x) = \dfrac{500x}{x+4} \Rightarrow I´(x) = \dfrac{500\left(x+4\right) - 500x}{\left(x+4\right)^2} = \dfrac{2000}{\left(x+4\right)^2}$.

b) $I´(50) = \dfrac{2000}{54^2} = 0,69$.

59. El coste de fabricación de un determinado producto viene dado por la función $C(x) = 0,2x^2 + 4x + 57$ (en u.m.). Si todas las unidades producidas se venden a un precio (también en u.m.) dado por $p(x) = 9 - 0,05x$, calcula:
a) El coste marginal por la producción de la unidad veintiuna.
b) La función de ingresos y de beneficios.
c) El ingreso y beneficio marginal por la venta de la unidad veintiuna.
Solución:
a) $C´(x) = 0,4x + 4 \Rightarrow C´(20) = 0,4·20 + 4 = 12$ u.m.

b) $I(x) = x·p(x) = 9x - 0,05x^2$.
$B(x) = I(x) - C(x) = 9x - 0,05x^2 - \left(0,2x^2 + 4x + 57\right) = -0,25x^2 + 5x - 57$.

c) $I´(x) = 9 - 0,10x \Rightarrow I´(20) = 9 - 0,10·20 = 7$.
$B´(x) = -0,50x + 5 \Rightarrow B´(20) = -0,50·20 + 5 = -5$.
Observa que el beneficio marginal es negativo (los costes marginales superan a los ingresos marginales: 12 los primeros; 7 los segundos). La fabricación de la unidad 21 no es rentable. ¿Hasta qué cantidad será rentable?

60. Contesta a las mismas preguntas del problema anterior, siendo:
1) $C(x)=0,25x^2+3x+67$ e $I(x)=90x-0,2x^2$. Unidad vigésimo quinta.
2) $C(x)=0,1x^3-5x^2+500x+200$ y $p(x)=3000-0,5x$. Unidad 101.
<u>Solución</u>:
1) $C(x)=0,25x^2+3x+67$.
a) $C´(x)=0,5x+3 \Rightarrow C´(24)=15$ u.m.
b) $I(x)=90x-0,2x^2$

$$B(x)=I(x)-C(x)=90x-0,2x^2-\left(0,25x^2+3x+67\right)=-0,45x^2+87x-67.$$

c) $I´(x)=90-0,4x \Rightarrow I´(24)=80,4$.

$$B´(x)=-0,9x+87 \Rightarrow B´(24)=-0,9\cdot24+87=65,4.$$

2) $C(x)=0,1x^3-5x^2+500x+200$.
a) $C´(x)=0,3x^2-10x+500 \Rightarrow C´(100)=2500$ u.m.
b) $I(x)=3000x-0,5x^2$.

$$B(x)=I(x)-C(x)=3000x-0,5x^2-\left(0,1x^3-5x^2+500x+200\right)=-0,1x^3+4,5x^2+2500x-200$$

c) $I´(x)=3000-x \Rightarrow I´(100)=2900$.

$$B´(x)=-0,3x^2+9x+2500 \Rightarrow B´(100)=-3000+900+2500=400.$$

61. A interés continuo, un capital C_0 se convierte al cabo de t años en $C(t)=C_0e^{rt}$, siendo r la tasa de interés anual (en tanto por 1). Si se considera un capital inicial de 50000 euros a un interés del 3%, halla la tasa de cambio instantáneo de $C(t)$. ¿A qué ritmo está creciendo el capital a los 6 años, y a los 10 años?
<u>Solución</u>:
En este caso, $C(t)=50000e^{0,03t}$.
Derivando:

$$C´(t)=50000\cdot0,03e^{0,03t}=1500e^{0,03t}$$

Para t = 6, $C´(6)=1500e^{0,03\cdot6}=1795,83$ €/año.
Para t = 10, $C´(10)=1500e^{0,03\cdot10}=2024,79$ €/año.

<u>Otros problemas</u>

62. Aplicando las propiedades de los logaritmos, halla y simplifica la derivada de las funciones:

a) $y=\ln\left(x^2+5x\right)^3$ b) $f(x)=\ln\sqrt{2x^2-2x}$ c) $y=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

<u>Solución</u>:
a) $y=\ln\left(x^2+5x\right)^3=3\ln\left(x^2+5x\right)$.
Derivando ahora: $y´=3\cdot\dfrac{2x+5}{x^2+5x}=\dfrac{6x+15}{x^2+5x}$.
b) $f(x)=\ln\sqrt{2x^2-2x} \Rightarrow f(x)=\ln\left(2x^2-2x\right)^{1/2}=\dfrac{1}{2}\ln\left(2x^2-2x\right)\Rightarrow$

$$\Rightarrow f´(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4x-2}{2x^2-2x} = \frac{2x-1}{2x^2-2x}.$$

c) $y = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = \ln(x^2+1) - \ln(x^2-1) \Rightarrow y´ = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{-4x}{x^4-1}$.

63. Halla la derivada *n*-ésima de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln x$ b) $f(x) = \ln(2x-1)$ c) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

Solución:

a) De $f(x) = \ln x \Rightarrow f´(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f´´(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f´´´(x) = \frac{+2}{x^3} \Rightarrow f^{4)}(x) = \frac{-2\cdot 3}{x^4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f^{5)}(x) = \frac{+2\cdot 3\cdot 4}{x^5} \Rightarrow \ldots\ f^{n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}.$$

Observación: Si se escribe $f´(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, las sucesivas derivadas se obtienen con mayor facilidad, pues: $f´´(x) = -1\cdot x^{-2} \Rightarrow f´´´(x) = -1\cdot(-2)x^{-3} \Rightarrow f^{4)}(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4} \Rightarrow \ldots$

b) $f(x) = \ln(2x-1) \Rightarrow f´(x) = \frac{2}{2x-1} = 2(2x-1)^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow f´´(x) = -2(-1)\cdot 2(2x-1)^{-2} = +2^2(2x-1)^{-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f´´´(x) = -2\cdot 2^2\cdot 2(2x-1)^{-3} = -2\cdot 2^3\cdot(2x-1)^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{4)}(x) = -2\cdot(-3)\cdot 2^3\cdot 2(2x-1)^{-4} = +2\cdot 3\cdot 2^4(2x-1)^{-4} \Rightarrow f^{4)}(x) = +(3!)\cdot 2^4(2x-1)^{-4}$

$\Rightarrow f^{5)}(x) = -2\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot 2^4\cdot 2(2x-1)^{-5} = -2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^5(2x-1)^{-5} \Rightarrow f^{5)}(x) = -(4!)\cdot 2^5(2x-1)^{-5}$

$\ldots$

Por tanto:

$$f^{n)}(x) = (-1)^n((n-1)!)\cdot 2^n(2x-1)^{-n} \Leftrightarrow f^{n)}(x) = \frac{(-1)^n\cdot((n-1)!)\cdot 2^n}{(2x-1)^n}.$$

c) $f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f(x) = (1-x)^{-1} \Rightarrow f´(x) = -1\cdot(-1)(1-x)^{-2} = (1-x)^{-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f´´(x) = -2\cdot(-1)\cdot(1-x)^{-3} = 2\cdot(2x-1)^{-3} \Rightarrow f´´´(x) = -3\cdot 2\cdot(-1)\cdot(1-x)^{-4} = 3!\cdot(2x-1)^{-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{4)}(x) = -4\cdot 3!\cdot(-1)\cdot(1-x)^{-5} = 4!\cdot(1-x)^{-5} \Rightarrow \ldots$

Por tanto:

$$f^{n)}(x) = (n!)\cdot(1-x)^{-n-1} \Leftrightarrow f^{n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

64. En determinadas condiciones una población de mosquitos crece ajustándose a la función $f(x) = 2 + 0,5e^{0,4x}$, donde $f(x)$ es el número de mosquitos en miles y *x* el tiempo en días desde el momento presente. Calcula:

a) La tasa de crecimiento al terminar el 2º, 4º y 6º día.

b) ¿En qué momento la población está creciendo a un ritmo de dos mil mosquitos por día?

Solución:

a) La tasa de crecimiento en un instante dado viene dada por la derivada.

$$f(x) = 2 + 0,5e^{0,4x} \Rightarrow f´(x) = 0,2e^{0,4x}.$$

Por tanto:

$f'(2) = 0,2e^{0,8} \approx 0,45$ miles: 450 mosquitos/día.

$f'(4) = 0,2e^{1,6} \approx 0,99$, $f'(6) = 0,2e^{2,6} \approx 2,2 \to 2200$ mosquitos/día

b) Hay que resolver la ecuación $f'(x) = 0,2e^{0,4x} = 2 \Rightarrow e^{0,4x} = 10 \Rightarrow 0,4x = \ln 10 \Rightarrow x = 5,758$, (Poco después de las 6 de la tarde del 6º día).

65. Una población de conejos se ajusta al número dado por la función $P(t) = \dfrac{20000}{1+199e^{-0,42t}}$, t en años desde el momento presente.

a) ¿Cuántos conejos hay actualmente? ¿Y dentro de 10 años?

b) ¿A cuánto tiende su número?

c) ¿Cuál es la tasa de crecimiento ahora y dentro de 10 años? ¿Qué porcentaje de crecimiento representan dichas tasas?

Solución:

a) Actualmente t = 0: $P(0) = \dfrac{20000}{1+199e^{0}} = \dfrac{20000}{200} = 100$.

Si t = 10: $P(10) = \dfrac{20000}{1+199e^{-4,2}} \approx 5200$.

b) El límite cuando $t \to +\infty$ vale: $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{20000}{1+199e^{-0,42t}} = 20000$.

c) Derivando:

$$P'(t) = \frac{-20000\cdot(-0,42)\cdot 199e^{-0,42t}}{\left(1+199e^{-0,42t}\right)^2} \Rightarrow$$

$$P'(0) = \frac{8400\cdot 199}{(200)^2} = 41,79\text{ ; . } P'(10) = \frac{-20000\cdot(-0,42)\cdot 199e^{-4,2}}{\left(1+199e^{-4,2}\right)^2} \approx 1579.$$

En porcentajes relativos:

$$\frac{P'(0)}{P(0)} = \frac{41,79}{200} \approx 0,209 \to 20,9\%;\quad \frac{P'(10)}{P(10)} = \frac{1579}{5020} \approx 0,3145 \to 31,45\ \%$$

66. Una población de 100000 bacterias se introduce en un cultivo, siendo su número al cabo de t horas $f(t) = 10^5\left(1+\ln\left(t^2+1\right)\right)$.

a) ¿Cuántas bacterias hay al cabo de 4 horas? ¿Cuál es su tasa de crecimiento en ese instante?

b) ¿En qué instante la velocidad de crecimiento es de 70000 bacterias/hora?

Solución:

a) $f(4) = 10^5\left(1+\ln\left(4^2+1\right)\right) = 383321$.

La tasa de crecimiento es:

$$f'(t) = 10^5\cdot\frac{2t}{t^2+1} \to f'(4) = 10^5\cdot\frac{8}{17} = 47059 \text{ bacterias/hora.}$$

b) Si $f'(t) = 70000 \Rightarrow 10^5\cdot\dfrac{2t}{t^2+1} = 70000 \Rightarrow 7t^2 - 20t + 7 = 0 \Rightarrow t$ = 0,41 h; t = 2,45 h.

67. La eficacia de un analgésico *t* horas después de ser administrado viene dada por la expresión $E(t)=1-\cos^2 t$, $(0\le t\le \pi)$

Halla:

a) La variación de la eficacia (mejoría) cuando *t* = 1, *t* = 2 y *t* = 3.

b) El instante en el que la mejoría vale 1.

Solución:

a) La variación viene dada por la derivada: $E'(t)=-2\cos t\cdot(-\sin t)=2\sin t\cos t$.

$$E'(1)=2(\sin 1)(\cos 1)=0,91;\quad E'(2)=2(\sin 2)(\cos 2)=-0,76;$$

$$E'(3)=2(\sin 3)(\cos 3)=-0,28.$$

El signo negativo indica una eficacia decreciente.

b) $2\sin t\cos t=1\Rightarrow \sin(2t)=1\Rightarrow t=\pi/4$. (La igualdad $2\sin t\cos t=\sin(2t)$ es una fórmula trigonométrica muy usual. Su conocimiento no es imprescindible en Ciencias Sociales).

68. (Propuesto en Selectividad, 2011)

Estudios realizados han permitido determinar que el nivel medio diario de monóxido de carbono, CO_2, en el aire en partes por millón (ppm), en una ciudad está relacionado con la población *p* expresada en miles de habitantes, por la siguiente expresión $C(p)=\sqrt{\dfrac{p^2}{2}+17}$.

La evolución del tamaño de población en esta ciudad en *t* años se estima que está dado por la relación, $p(t)=3{,}1+0{,}1t^2$ en miles de habitantes. ¿Con qué rapidez estará variando la concentración de CO_2 en esta ciudad dentro de 3 años?

Solución:

La tasa de variación (la rapidez con la que varía) de $C(p)$ viene dada por la derivada con respecto a *t*.

Sustituyendo $p(t)=3{,}1+0{,}1t^2$ en $C(p)$ se tiene:

$$C(t)=\sqrt{\frac{\left(3{,}1+0{,}1t^2\right)^2}{2}+17}=\sqrt{\frac{\left(3{,}1+0{,}1t^2\right)^2+34}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\left(3{,}1+0{,}1t^2\right)^2+34}.$$

Su derivada es: $C'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2\left(3{,}1+0{,}1t^2\right)\cdot 0{,}2t}{2\sqrt{\left(3{,}1+0{,}1t^2\right)^2+34}}$.

Para *t* = 3, $C'(3)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{(3{,}1+0{,}9)\cdot 0{,}2\cdot 3}{\sqrt{(3{,}1+0{,}9)^2+34}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{4\cdot 0{,}2\cdot 3}{\sqrt{16+34}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2{,}4}{5\sqrt{2}}=0{,}24$ ppm.

69. El radio se descompone radiactivamente de acuerdo con la función $r(t)=n\cdot e^{-0{,}0004t}$, siendo *n* la cantidad inicial de radio y *t* el tiempo en años. Calcula la velocidad de descomposición de 10 gramos de radio a los 50, 500 y 5000 años.

Solución:

La velocidad de descomposición viene dada por la derivada de $r(t)=10e^{-0{,}0004t}$:

$$r'(t)=10\cdot(-0{,}0004)e^{-0{,}0004t}=-0{,}004e^{-0{,}0004t}.$$

Para *t* = 50, *t* = 500 y *t* = 5000, se tiene:

$r'(50)=-0{,}004e^{-0{,}0004\cdot 50}=-0{,}00392$ g/año. $r'(500)=-0{,}004e^{-0{,}0004\cdot 500}=-0{,}00327$ g/año.

$r'(5000)=-0{,}004e^{-0{,}0004\cdot 5000}=-0{,}00054$ g/año.