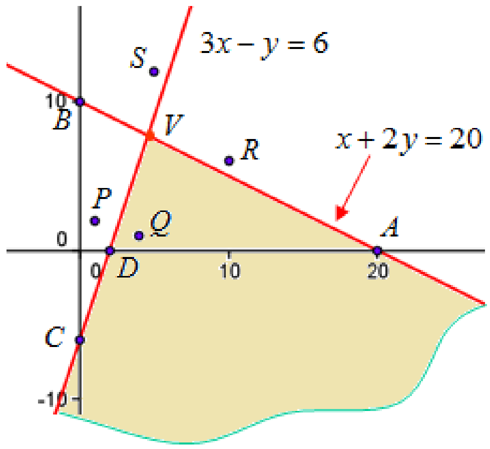
TEMA 4. Programación Lineal
Problemas Resueltos

Regiones factibles

1. a) Representa gráficamente el conjunto de soluciones correspondiente al sistema:
$$\begin{cases} x+2y\le 20 \\ 3x-y\ge 6 \end{cases}$$
Halla el vértice de la región de soluciones.
b) De los puntos P(1, 2), Q(4, 1), R(10, 6) y S(5, 12) indica los que no pertenezcan al conjunto de soluciones, explicando el porqué.

Solución:
a) La inecuación $x+2y\le 20$ determina el semiplano que está por debajo de la recta $x+2y=20$ (incluidos los puntos de ella). Dos de sus puntos son A(20, 0) y B(0, 10).
→ La inecuación $3x-y\ge 6$ determina el semiplano que está a la derecha de la recta $3x-y=6$ (incluidos los puntos de ella). Dos de sus puntos son C(0, –6) y D(2, 0).

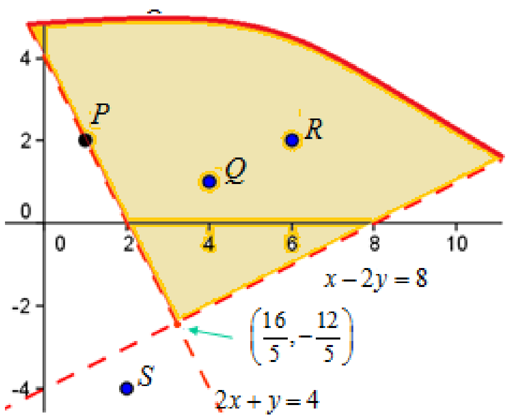


Las coordenadas del vértice se calculan resolviendo el sistema $\begin{cases} x+2y=20 \\ 3x-y=6 \end{cases}$. Su solución es $V\left(\dfrac{32}{7},\dfrac{54}{7}\right)$.

b) El único punto que cumple las dos inecuaciones es Q(4, 1); los otros tres no son de la región de soluciones.
→ P(1, 2) no cumple la inecuación $3x-y\ge 6$.
→ R(10, 6) no cumple la inecuación $x+2y\le 20$.
→ S(5, 12) no cumple ninguna de las inecuaciones dadas.

2. a) Halla la solución gráfica del sistema $\begin{cases} 2x+y>4 \\ x-2y<8 \end{cases}$. Halla el vértice de la región de soluciones.
b) De los puntos P(1, 2), Q(4, 1), R(6, 2) y S(2, –4) indica los que no pertenezcan al conjunto de soluciones.

Solución:
a) La inecuación $2x+y>4$ tiene por solución los puntos del semiplano situado a la derecha de la recta $2x+y=4$.
La inecuación $x-2y<8$ determina los puntos del plano que están a la izquierda de la recta $x-2y=8$.
La solución del sistema es la parte coloreada en la figura adjunta. Los puntos de las semirrectas no forman parte de la solución (tampoco el vértice).

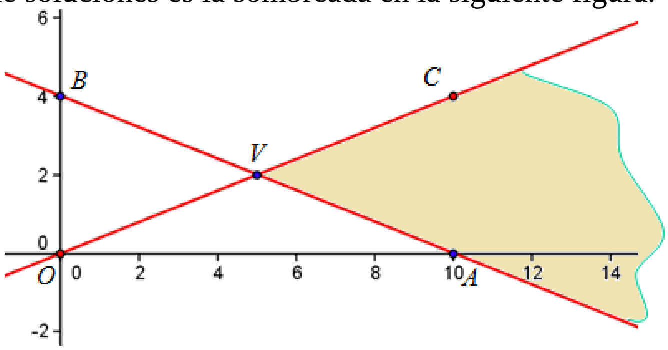


El vértice es el punto de corte de las rectas, que es la solución del sistema $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-2y=8 \end{cases}$.

Se obtiene: $\left(\frac{16}{5}, -\frac{12}{5}\right)$.

b) Los puntos *P* y *S* no forman parte del conjunto de soluciones; *R* y *Q* sí son soluciones.

3. Representa gráficamente el conjunto de soluciones correspondiente al sistema:
$$\begin{cases} 2x+5y \geq 20 \\ 4x-10y \geq 0 \end{cases}$$
Indica el vértice de la región de soluciones.
Solución:
La inecuación $2x+5y \geq 20$ determina el semiplano que está por encima de la recta $2x+5y=20$ (incluidos los puntos de ella). Dos de sus puntos son *A*(10, 0) y *B*(0, 4)
La inecuación $4x-10y \geq 0$ determina el semiplano que está por debajo de la recta $4x-10y=0$ (incluidos los puntos de ella). Dos de sus puntos son *O*(0, 0) y *C*(10, 4).
Por tanto, la región de soluciones es la sombreada en la siguiente figura.



Las coordenadas del vértice se calculan resolviendo el sistema $\begin{cases} 2x+5y=20 \\ 4x-10y=0 \end{cases}$.

Su solución es *V*(5, 2).

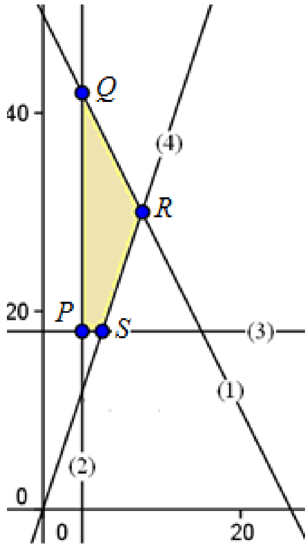
4. Representa gráficamente la región de soluciones determinada por las restricciones:
$4x+2y \leq 100$; $x \geq 4$; $y \geq 18$; $y \geq 3x$
Halla sus vértices e indica en cuál de ellos la expresión $3x-2y$ es máxima.
Solución:
Las restricciones generan el conjunto de soluciones sombreado en la siguiente figura.
$4x+2y \leq 100 \rightarrow$ Puntos situados a la izquierda que la recta (1), que pasa por los puntos (0, 50) y (25, 0).
$x \geq 4 \rightarrow$ Semiplano a la derecha de la recta (2); $x=4$.
$y \geq 18 \rightarrow$ Semiplano por encima de la recta (3); $y=18$.
$y \geq 3x \rightarrow$ Puntos situados a la izquierda que la recta (4), que pasa por los puntos (0, 0) y (6, 18).

Los vértices son los puntos de corte de las rectas asociadas a las restricciones:

P (4, 18); Q: $\begin{cases} x = 4 \\ 4x + 2y = 100 \end{cases} \Rightarrow Q(4, 42)$;

R: $\begin{cases} 4x + 2y = 100 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow R(10, 30)$;

S: $\begin{cases} y = 18 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow S(6, 18)$.



El valor de la expresión $3x - 2y$ en esos puntos es:

En P $\to$ 12 – 36 = = –24.

En Q $\to$ 12 – 84 = –72.

En R $\to$ 30 – 60 = –30.

En S $\to$ 18 – 36 = –18.

El máximo se da en S(6, 18).

5. Representa gráficamente la región de soluciones determinada por las restricciones:

$0 \le x - y + 2$; $\quad 2 + y \ge 2x$; $\quad x + 2y + 1 \ge 0$; $\quad 2 \ge x$

Halla sus vértices e indica en cuál de ellos la expresión $2x + 4y$ es mínima.

<u>Solución</u>:

Las restricciones pueden transformarse para escribirlas en la forma estándar.

$0 \le x - y + 2 \Rightarrow x - y \ge -2$ $\to$ Puntos situados por debajo de la recta (1), que pasa por los puntos (0, 2) y (2, 4).

$2 + y \ge 2x \Rightarrow 2x - y \le 2$ $\to$ Semiplano a la derecha de la recta (2), que pasa por (0, –2) y (1, 0).

$x + 2y + 1 \ge 0 \Rightarrow x + 2y \ge -1$ $\to$ Semiplano por encima de la recta (3), que pasa por (–1, 0) y (0, –1/2).

$2 \ge x$ $\to$ Puntos situados a la izquierda que la recta (4): $x = 2$.

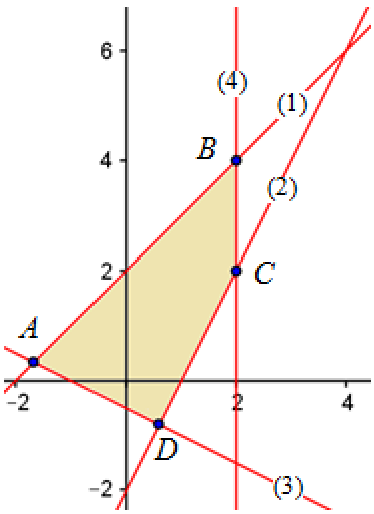
La región de soluciones es la representada en la figura adjunta.

Los vértices son:

A: $\begin{cases} x - y = -2 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow A\left(-\dfrac{5}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$;

B: $\begin{cases} x - y = -2 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow B(2, 4)$; C: $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow C(2, 2)$;

D: $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow D\left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$.



El valor de la expresión $2x + 4y$ en esos puntos es:

En A $\to$ $-\dfrac{10}{3} + \dfrac{4}{3} = -2$.

En B $\to$ 8 + 16 = 24.

En C $\to$ 4 + 8 = 12.

En D $\to$ $\dfrac{6}{5} - \dfrac{16}{5} = -2$.

El mínimo se da en cualquier punto del segmento AD.

6. a) Representa gráficamente, indicando de qué tipo es la región obtenida, el conjunto de puntos del plano que satisfacen las inecuaciones lineales siguientes:

$x+y\geq 14$ (1); $2x+3y\geq 36$ (2); $4x+y\geq 16$ (3); $x-3y\leq 0$ (4)

b) Da un punto que no cumpla solo la inecuación (2); otro que cumpla solo las restricciones (3) y (4); y otro que no cumpla ninguna de las cuatro restricciones.

Solución:

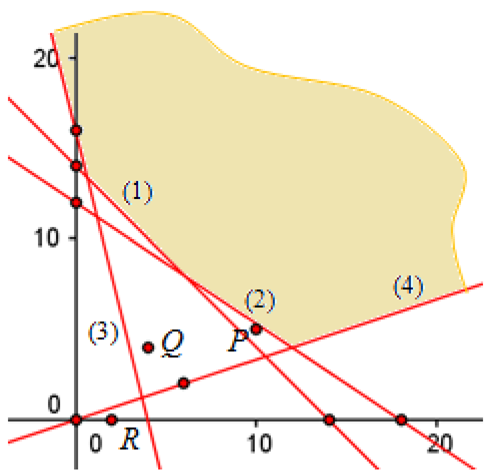
a) Representación de cada una de las inecuaciones:

(1) $x+y\geq 14$. Puntos (0, 14) y (14, 0); cumplen la inecuación los puntos situados a la derecha de la recta que determinan, incluida la recta.

(2) $2x+3y\geq 36$. Puntos (0, 12) y (18, 0); semiplano situado a la derecha.

(3) $4x+y\geq 16$. Puntos (0, 16) y (4, 0); semiplano de la derecha.

(4) $x-3y\leq 0$. La recta $x-3y=0$ pasa por los puntos (0, 0) y (6, 2).Las soluciones de $x-3y\leq 0$ son los puntos situados por encima de la recta.



La región obtenida es abierta, no acotada.

b) El punto $P(10, 5)$ cumple todas las inecuaciones salvo la (2).
El punto $Q(4, 4)$ cumple (3) y (4), pero no (1) y (2).
El punto $R(2, 0)$ no cumple ninguna de las cuatro restricciones.
Desde el punto de vista gráfico las afirmaciones anteriores son evidentes. Para comprobarlo algebraicamente basta con sustituir en las inecuaciones.

Rectas de nivel

7. Para la región representada en el problema anterior, determina sus vértices y halla el valor que toman en cada uno de ellos las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=3x+4y$ b) $g(x,y)=10x-30y+300$ c) $h(x,y)=12x-3y$

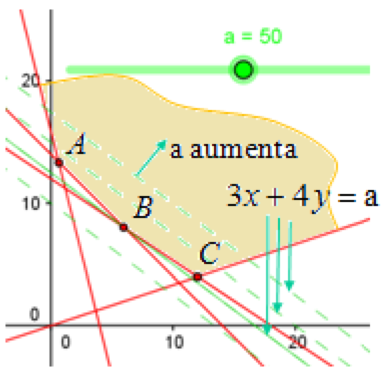
Con ayuda de las rectas de nivel asociadas a esas funciones, determina sus valores máximos o mínimos en la región indicada.

Solución:

Los vértices de la región factible se hallan así:

• Corte de (1) y (3): $\begin{cases} x+y=14 \\ 4x+y=16 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{2}{3},\frac{40}{3}\right)$.

• Corte de (1) y (2): $B(6, 8)$.
• Corte de (2) y (4): $C(12, 4)$.



En cada uno de esos puntos las funciones *f*, *g* y *h* toman los valores:

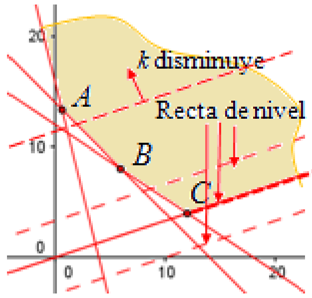
a) $f(A)=\frac{166}{3}$; $f(B)=50$; $f(C)=52$.

Las rectas de nivel asociadas a *f* son $3x+4y=k$. El mínimo nivel para *k* se da en *B*, luego el valor mínimo que toma *f* es 50.

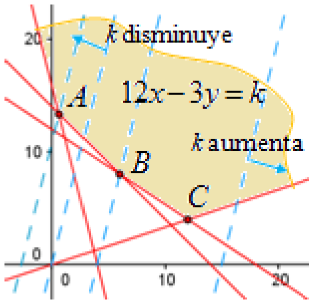
Esta función no tiene máximo para esa región, pues las rectas de nivel pueden ir aumentado su valor indefinidamente.

(Utilizando GeoGebra se define el "deslizador 3x+4y=a". En "Propiedades" se concreta el intervalo de a entre 0 y 100, por ejemplo. Al "deslizar" hacia la derecha, el valor de a aumenta de manera indefinida dentro de la región factible; y deslizando hacia la izquierda, disminuyendo el valor de a, la última recta en contacto con la región factible es la que pasa por el punto *B*).

b) $g(A) = -\dfrac{280}{3}$; $g(B) = 120$; $g(C) = 300$.



Las rectas de nivel asociadas a *g* son $10x - 30y + 300 = k$. El máximo nivel para *k* se da en *C*, y en cualquiera de los puntos de la semirrecta $10x - 30y + 300 = 300 \Leftrightarrow x - 3y = 0$ que define la región factible, luego el máximo valor que toma *g* es 300.
Sin embargo, $g(x, y) = 10x - 30y + 300$ no tiene mínimo en esa región, pues las rectas de nivel se pueden desplazar indefinidamente hacia la izquierda disminuyendo su valor.

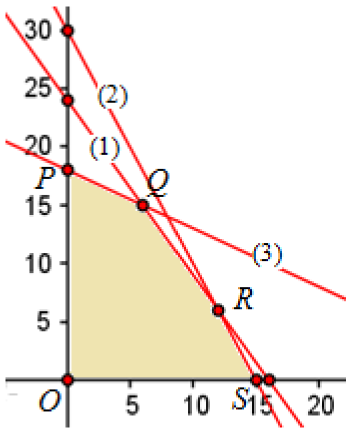


c) $h(A) = -32$; $h(B) = 48$; $h(C) = 132$.
Las rectas de nivel de *h* son $12x - 3y = k$. Trasladándola a izquierda o derecha siempre tienen puntos en contacto con la región factible, luego *h* no tiene máximo ni mínimo en esa región.

8. Representa gráficamente la región del plano determinada por las restricciones.

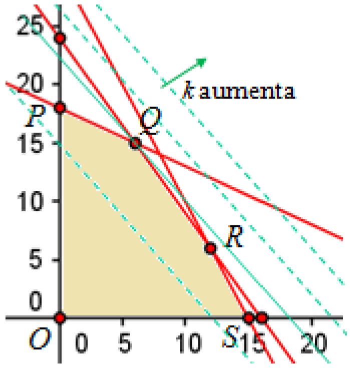
$3x + 2y \le 48$; $2x + y \le 30$; $x + 2y \le 36$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

a) ¿En qué punto de esa región alcanza la función $f(x, y) = 6x + 5y$ su valor máximo?
b) Traza las rectas de nivel asociadas a *f* y comprueba que la solución algébrica coincide con la gráfica.
Solución:



La recta $3x + 2y = 48$ (1) pasa por los puntos (0, 24) y (16, 0).
Los puntos que verifican la inecuación $3x + 2y \le 48$ son los que están la izquierda de la recta.
La recta $2x + y = 30$ (2) pasa por los puntos (0, 30) y (15, 0).
Los puntos que verifican la inecuación $2x + y \le 30$ son los que están la izquierda de la recta.
La recta $x + 2y = 36$ (3) pasa por los puntos (0, 18) y (36, 0).
Los puntos que verifican la inecuación $x + 2y \le 36$ son los que están la izquierda de la recta.
Las inecuaciones $x \ge 0$ e $y \ge 0$ determinan los puntos del primer cuadrante.
Los vértices de la región factible son:

$O(0, 0)$; $P(0, 18)$; Q: $\begin{cases} 3x + 2y = 48 \\ x + 2y = 36 \end{cases} \Rightarrow Q(6, 15)$; R: $\begin{cases} 3x + 2y = 48 \\ 2x + y = 30 \end{cases} \Rightarrow R(12, 6)$; $S(15, 0)$.



a) El valor de la función $f(x, y) = 6x + 5y$ en esos vértices es:
En O, $f(0, 0) = 0$; en P, $f(0, 18) = 90$; en Q, $f(6, 15) = 111$; en R, $f(12, 6) = 102$; en S, $f(15, 0) = 90$.
El máximo de $f(x, y) = 6x + 5y$ se da en el punto Q y vale 111.

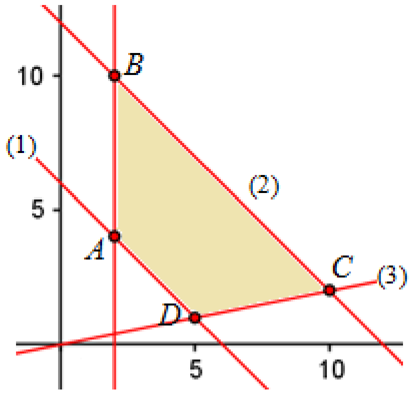
b) Las rectas de nivel son $6x + 5y = k$. Al trasladarlas a la derecha su nivel aumenta. El punto de la región factible por el que pasa la recta de mayor nivel es Q. Es la recta de ecuación $6x + 5y = 111$.

9. a) Representa gráficamente la región del plano definida por las inecuaciones:

$x \ge 2$, $\quad x + y \ge 6$, $\quad x + y \le 12$, $x - 5y \le 0$,

b) Halla los valores máximos y mínimos de las funciones $f(x, y) = 2x + 3y$, $g(x, y) = x + y$ y $h(x, y) = x + 3y$ en dicha región y los puntos en los que se alcanzan.
c) Traza las rectas de nivel asociadas a h y comprueba que la solución algébrica coincide con la gráfica.
Solución:
a) En todos los casos el conjunto de soluciones de cada inecuación está formado por un semiplano.

- $x \ge 2 \to$ Son los puntos situados a la derecha de la recta $x = 2$.
- $x + y \ge 6 \to$ Son los puntos situados a la derecha de la recta $x + y = 6$ (1)
- $x + y \le 12 \to$ Son los puntos situados a la izquierda de la recta $x + y = 12$ (2)
- $-x + 15y \ge 10 \to$ Son los puntos situados por encima de la recta $-x + 15y = 10$ (3)



Estas inecuaciones generan la región (cerrada) sombreada en la figura adjunta. Son los puntos interiores o de los lados del cuadrilátero de vértices:

A: $\begin{cases} x = 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow A(2, 4)$; B: $\begin{cases} x = 2 \\ x + y = 12 \end{cases} \Rightarrow B(2, 10)$;

C: $\begin{cases} x + y = 12 \\ -x + 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(10, 2)$; D: $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow D(5, 1)$.

b) Los valores máximo y mínimo de una función lineal en una región cerrada del plano se encuentran en los bordes de la región, en los vértices o en los lados. Para determinarlos basta con evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices.

Para la función $f(x, y) = 2x + 3y$ se tiene:

$f(2,\ 4) = 16$; $\quad f(2,\ 10) = 34$; $\quad f(10,\ 2) = 26$; $\quad f(5,\ 1) = 13$.

El máximo vale 34; se obtiene en el punto A(2, 4).
El mínimo vale 13, y se obtiene en D(5, 1).

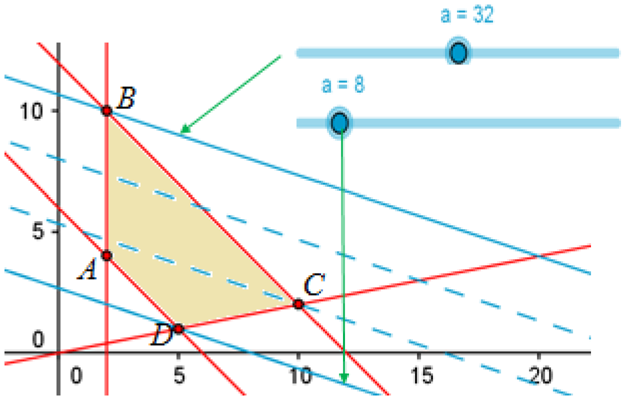
Para la función $g(x, y) = x + y$ se tiene:

$g(2,\ 4) = 6$; $\quad g(2,\ 10) = 12$; $g(10,\ 2) = 12$; $g(5,\ 1) = 6$.

El máximo vale 12. Se obtiene en los vértices *B* y *C*; en consecuencia, también son válidos cualquiera de los puntos del segmento de extremos *B* y *C*
El mínimo vale 6 y se obtiene en cualquier punto del segmento *AD*.

Para la función $h(x, y) = x + 3y$ se tiene:
$h(2,\ 4) = 14$; $h(2,\ 10) = 32$;
$h(10,\ 2) = 16$; $h(5,\ 1) = 8$.
El máximo vale 32; se obtiene en el punto *B*(2, 10).
El mínimo vale 8; se obtiene en el punto *D*(5, 1).

c) Las rectas de nivel son $x + 3y = k$ (Si se recurre a GeoGebra, x + 3y = a permite crear un deslizador, tal y como se muestra en la figura). El nivel aumenta si se desliza a la derecha, siendo el punto *B* el último punto de contacto con la región factible; el nivel disminuye si se desliza a la izquierda, y puede hacerse en contacto con la región factible hasta el punto *D*.

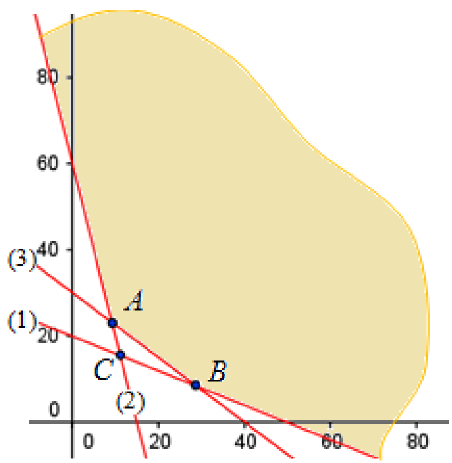


10. Representa gráficamente la región de soluciones determinada por las restricciones:
$2x + 5y \geq 100$; $4x + y \geq 60$; $3x + 4y \geq 120$
a) ¿Puede determinarse algebraicamente el mínimo de $f(x, y) = 5x + y$ en esa región? ¿Y su máximo? Justifica la respuesta.
b) ¿Tiene la función $g(x, y) = 5x + 4y$ algún óptimo en esa región?
Solución:
La región de soluciones es abierta: la sombreada en la figura adjunta.
La restricción $2x + 5y \geq 100$ está asociada a la recta (1): puntos de la derecha.
La restricción $4x + y \geq 60$ está asociada a la recta (2): puntos de la derecha.
La restricción $3x + 4y \geq 120$ está asociada a la recta (3): puntos de la derecha.
Los vértices son:

$$A: \begin{cases} 4x + y = 60 \\ 3x + 4y = 120 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{120}{13}, \frac{300}{13}\right);$$

$$B: \begin{cases} 2x + 5y = 100 \\ 3x + 4y = 120 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{200}{7}, \frac{60}{7}\right);$$

El punto $C\left(\frac{100}{9}, \frac{140}{9}\right)$ no es de la región factible.

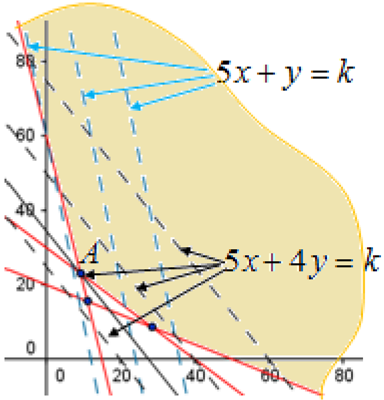


a) El valor de $f(x, y) = 5x + y$ en los puntos *A* y *B* es:

$$f\left(\frac{120}{13}, \frac{300}{13}\right) = \frac{900}{13} \approx 69,23; \quad f(B) = \frac{1060}{7} \approx 151,43.$$

No puede saberse el mínimo ni el máximo con estos valores: Por ejemplo:
→ en el punto (0, 60), que es de la región factible, la función vale $f(0, 60) = 60 < f(A)$,
→ en el punto (60, 60), que también es de la región factible, $f(60, 60) = 360 > f(B)$.

Para regiones abiertas hay que representar las rectas de nivel. En este caso, las rectas de nivel $5x+y=k$ pueden trasladarse, en contacto con la región factible tanto a izquierda como a derecha de manera indefinida.



b) Las rectas de nivel asociadas a $g(x,y)=5x+4y$ son $5x+4y=k$. El valor mínimo para k se da en A: k = 138,46.

Optimización

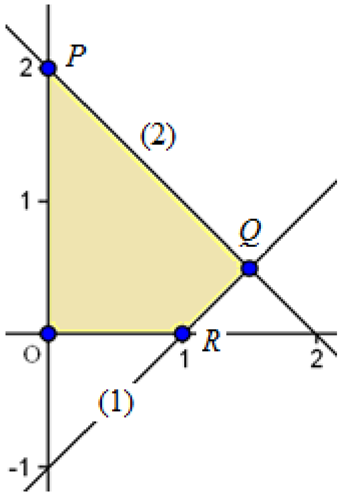
11. Halla los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y)=3x+y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$x-y\le 1$; $x+y\le 2$; $x\ge 0$; $y\ge 0$

Solución:

La región factible es la sombreada en la figura adjunta.
Se obtiene representando las rectas asociadas a cada inecuación y determinando el semiplano solución en cada caso.

(1) $x-y=1$; (2) $x+y=2$



Los vértices son:

O(0, 0); P(0, 2); Q: $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow Q(3/2,\ 1/2)$; R(1, 0).

Como la región factible es cerrada, el máximo de la función objetivo $f(x,y)=3x+y$, se da en alguno de los vértices de esa región.
Esos valores son:

En O, $f(0,0)=0$. En P, $f(0,2)=2$. En Q, $f\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)=2\cdot\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$. En R, $f(1,0)=3$.

Por tanto, el máximo, que vale 7/2, se obtiene en el punto Q; el mínimo, 0, en O.

12. Halla los valores máximos y mínimos de la función $f(x,y)=5x+2y+30$, sujeta a las siguientes restricciones:

$6x + 5y \le 700$, $2x + 3y \le 300$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

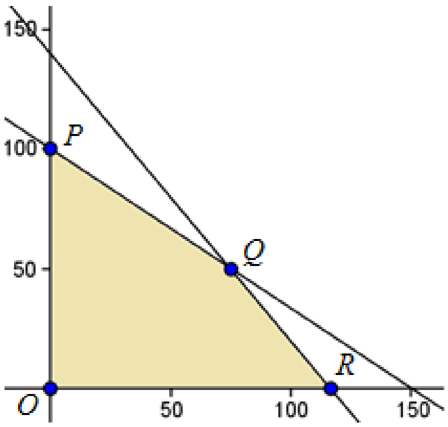
Solución:

La región factible es la sombreada en la figura adjunta.
Se obtiene representando las rectas asociadas a las inecuaciones:

$6x + 5y = 700 \to$ pasa por (0, 140) y (700/6, 0)

$2x + 3y = 300 \to$ pasa por (0, 100) y (150, 0).

$x \ge 0$, $y \ge 0 \to$ determinan el primer cuadrante.



Los vértices son:

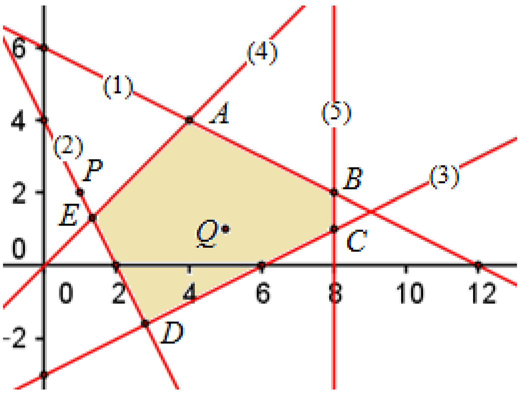
O(0, 0); P(0, 100);

Q: $\begin{cases} 6x+5y=700 \\ 2x+3y=300 \end{cases} \Rightarrow Q(75,\ 50)$;

R (700/6, 0) = (116,7, 0).

El máximo de la función $f(x, y) = 5x + 2y + 30$ se da en alguno de los vértices de la región factible.
Los valores que toma en cada uno de esos vértices son:
En O, $f(0,0) = 0$. En P, $f(0, 100) = 230$. En Q, $f(75, 50) = 505$. En R, $f(700/6, 0) = 613,3$.
El máximo se obtiene en el punto R. El mínimo en O.

13. a) Representa gráficamente, indicando de qué tipo es la región obtenida, el conjunto de puntos del plano que satisfacen las inecuaciones lineales siguientes:
$x + 2y \leq 12$; $2x + y \geq 4$; $x - 2y \leq 6$; $x - y \geq 0$; $x \leq 8$
b) Indica la posición de los puntos $P(1, 2)$ y $Q(5, 1)$ en relación con la región hallada. En el caso de que el punto sea exterior, di qué desigualdades no cumple.
Solución:
a) Se representan cada una de las restricciones dadas.
La recta (1) $x + 2y = 12$ corta a los ejes en (0, 6) y (12, 0). Cumplen la inecuación $x + 2y \leq 12$ los puntos situados a la izquierda de esa recta.
(2) $2x + y \geq 4$. Puntos (0, 4) y (2, 0); semiplano situado a la derecha.
(3) $x - 2y \leq 6$. Puntos situados por encima de la recta que pasa por (0, –3) y (6, 0).
(4) $x - y \geq 0$. Puntos situados a la derecha de la recta que pasa por (0, 0) y (4, 4).
(5) $x \leq 8$. Semiplano a la izquierda de la recta vertical $x = 8$



La región pedida es cerrada. Son todos los puntos del pentágono de vértices A, B, C, D y E, incluidos los lados.

b) El punto $P(1, 2)$ es exterior. No cumple la restricción $x - y \geq 0$, pues $1 - 2 = -1$.
El punto $Q(5, 1)$ es interior: cumple todas las inecuaciones.

14. Para la región representada en el problema anterior, halla en qué puntos toman valores máximos y mínimos las funciones:
a) $f(x, y) = 3x + 2y$; b) $g(x, y) = 2x - 3y$, c) $h(x, y) = x + 2y + 20$
Solución:
Como la región de soluciones es cerrada, los máximos y mínimos de cualquier función lineal se dan en los vértices de la región factible, el pentágono $ABCDE$.
Esos puntos son los de corte de algunas de las rectas representadas.
El corte de (1) con (2), de (1) con (3), de (5) con (5)…, no es necesario conocerlo, pues son puntos ajenos a la región factible.
$\rightarrow$ De (1) y (4) se obtiene $A(4, 4)$. $\rightarrow$ De (1) y (5), $B(8, 2)$. $\rightarrow$ De (3) y (5), $C(8, 1)$.
$\rightarrow$ De (2) y (3), $D\left(\frac{14}{5}, -\frac{8}{5}\right)$. $\rightarrow$ De (2) y (4), $E\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.
El valor de cada una de las funciones dadas en esos puntos es:
a) $f(x, y) = 3x + 2y$:

$$f(4,4) = 20;\ f(8,2) = 28;\ f(8,1) = 26;\ f\left(\frac{14}{5}, -\frac{8}{5}\right) = \frac{26}{5};\ f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{20}{3}.$$

El máximo de $f(x, y) = 3x + 2y$ se da en *B*; el mínimo en *D*.

b) $g(x, y) = 2x - 3y$:

$$g(4,4) = -4;\ g(8,2) = 10;\ f(8,1) = 13;\ g\left(\frac{14}{5}, -\frac{8}{5}\right) = \frac{52}{5};\ g\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3}.$$

El máximo se da en *C*; el mínimo en *A*.

c) $h(x, y) = x + 2y + 20$:

$$h(4,4) = 32;\ h(8,2) = 32;\ h(8,1) = 30;\ h\left(\frac{14}{5}, -\frac{8}{5}\right) = \frac{98}{5};\ h\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = 24.$$

El máximo de $h(x, y) = x + 2y + 20$ se da en *A* y *B* y, por tanto, en cualquiera de los puntos del segmento *AB*. El mínimo se da en el punto *D*.

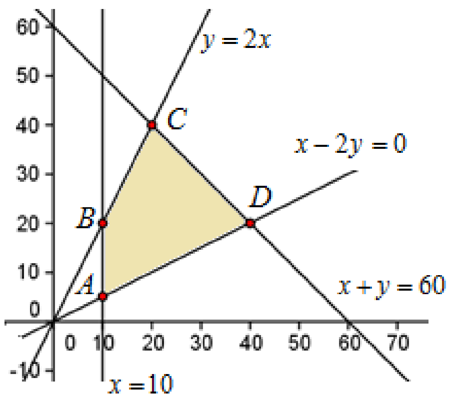
15. Halla el máximo de la función $f(x, y) = 2x + 3y$ restringida por las inecuaciones:

$x + y \le 60$; $x \ge 10$; $x - 2y \le 0$, $y \le 2x$

Solución:

Representando las rectas asociadas a las inecuaciones se obtiene la región factible sombreada en la figura adjunta. Está formada por los puntos interiores del cuadrilátero *ABCD*, incluidos los lados.

Las coordenadas de los vértices, que se obtienen resolviendo los sistemas:



A: $\begin{cases} x = 10 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (10, 5)$;

B: $\begin{cases} x = 10 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow B = (10, 20)$;

C: $\begin{cases} x + y = 60 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow C = (20, 40)$; *D*: $\begin{cases} x + y = 60 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow D = (40, 20)$

Como la región de soluciones es cerrada, el máximo de $f(x, y) = 2x + 3y$ se da en alguno de los vértices de la región factible. El valor que toma en cada uno de esos vértices es:

En *A*, $f(10,\ 5) = 35$; en *B*, $f(10,\ 20) = 80$; en *C*, $f(20,\ 40) = 160$; en *D*, $f(40,\ 20) = 140$.

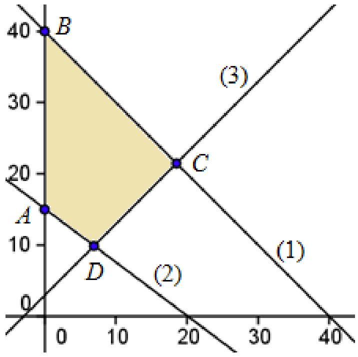
El máximo se obtiene en el punto *C*(20, 40). El valor de $f(x, y) = 2x + 3y$ es 160.

16. Minimiza la función $f(x, y) = 45x + 50y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$x + y \le 40$; $3x + 4y \ge 60$; $y \ge x + 3$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

Solución:

Las restricciones (1) $x + y \le 40$, (2) $3x + 4y \ge 60$, (3) $y \ge x + 3$ y $x \ge 0$ e $y \ge 0$ generan la región factible sombreada en la siguiente figura.



Se trata de una región cerrada, cuyos vértices son:

A = (0, 15); B = (0, 40);

C: $\begin{cases} x + y = 40 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow C = (37/2, 43/2)$;

D: $\begin{cases} 3x + 4y = 60 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow D = (48/7, 69/7)$.

El mínimo de $f(x, y) = 45x + 50y$ se consigue en alguno de los vértices de esa región factible. Evaluando dicha función en cada uno de ellos se tiene:

$f(0,15) = 45\cdot 0 + 50\cdot 15 = 750$; $f(0,40) = 45\cdot 0 + 50\cdot 40 = 2000$;

$$f\left(\frac{37}{2}, \frac{43}{2}\right) = \frac{37}{2}\cdot 45 + \frac{43}{2}\cdot 50 = 1907,5;\ f\left(\frac{48}{7}, \frac{69}{7}\right) = \frac{48}{7}\cdot 45 + \frac{69}{7}\cdot 50 = 801,4.$$

El mínimo vale 750; se consigue en el punto A(0, 15).

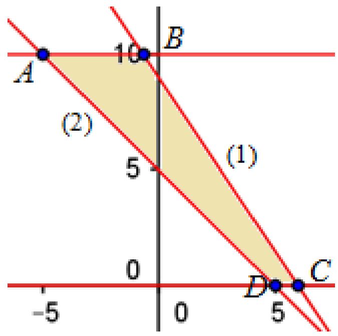
17. Representa gráficamente los puntos del recinto determinado por las siguientes desigualdades:

$3x + 2y \le 18$; $x + y \ge 5$; $0 \le y \le 10$

¿Qué puntos de ese recinto hacen mínima o máxima la función $f(x, y) = 3x + 2y$?

Solución:

Las restricciones pueden transformarse para escribirlas en la forma estándar.



$3x + 2y \le 18 \rightarrow$ Semiplano a la izquierda de la recta (1), que pasa por los puntos (0, 9) y (6, 0).

$x + y \ge 5 \rightarrow$ Semiplano a la derecha de la recta (2), que pasa por (0, 5) y (5, 0).

$0 \le y \le 10 \rightarrow$ Puntos situados por encima de la recta $y = 0$ y por debajo de $y = 10$.

Los vértices son:

A(–5, 10); B(–2/3, 10); C(6, 0); D(5, 0).

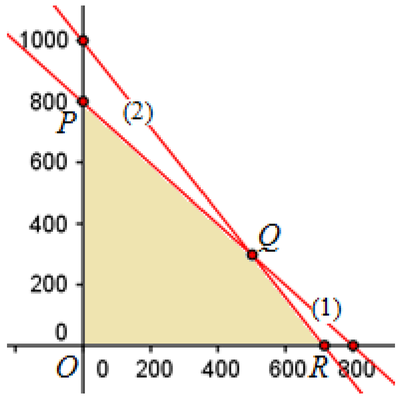
El valor $f(x, y) = 3x + 2y$ en esos puntos es:

En A, 5; en B, 18; en C, 18; en D, 15.

El mínimo se da en el punto A; el máximo en cualquier punto del segmento BC.

Problemas con enunciado

18. Un tendero dispone de una furgoneta en la que puede cargar hasta 800 kg y de 500 € para gastar. Va al mercado central a comprar fruta para su tienda. Encuentra manzanas a 0,70 €/kg y naranjas a 0,50 €/kg.
a) Venderá las manzanas a 0,90 €/kg y las naranjas a 0,60 €/kg. ¿Qué cantidad de manzanas y de naranjas le conviene comprar si quiere obtener el mayor beneficio posible?
b) ¿Cambiaría la solución si vende las manzanas a 0,90 €/kg y las naranjas a 0,65 €/kg?
Solución:
a) El beneficio por cada kg de manzanas es de 0,20 €; y por cada kg de naranjas, de 0,10 €. Por tanto, si compra *x* kg de manzanas e *y* de naranjas, el beneficio viene dado por la función $f(x, y) = 0,20x + 0,10y$



Las restricciones son:
$x + y \le 800$ $\rightarrow$ la furgoneta puede cargar hasta 800 kg
$0,70x + 0,50y \le 500$ $\rightarrow$ dispone de 500 euros.
La región factible es la sombreada en la figura adjunta.
Los vértices son:
O = (0, 0); *P* = (0, 800);
Q: $\begin{cases} x + y = 800 \\ 0,70x + 0,50y = 500 \end{cases} \Rightarrow Q(500, 300);$
R = (714,3, 0)

El máximo de la función objetivo, $f(x, y) = 0,20x + 0,10y$, se da en alguno de los vértices de la región factible.
El beneficio que se obtiene en cada caso es:
En *O*, *f*(0,0) = 0. En *P*, *f*(0, 800) = 80 €.
En *Q*, *f*(500, 300) = 130 €. En *R*, *f*(714,3, 0) = 142,86 €.
El máximo beneficio se obtiene comprando solo manzanas: 714,3 kg. Ese beneficio será de 142,86 euros.

b) Si vende las manzanas a 0,90 €/kg y las naranjas a 0,65 €/kg, la función de beneficios es $g(x, y) = 0,20x + 0,15y$. En este caso, el beneficio que se obtiene en cada vértice es:
En *O*, *g*(0,0) = 0. En *P*, *f*(0, 800) = 120 €.
En *Q*, *f*(500, 300) = 145 €. En *R*, *f*(714,3, 0) = 142,86 €.
El máximo beneficio, que es de 145 €, se obtiene comprando 500 kg de manzanas y 300 de naranjas.

19. Una empresa textil tiene en su almacén 4000 toallas de baño (grandes) y 3000 toallas de mano (pequeñas). Para favorecer su venta las distribuye en lotes de dos tipos, *A* y *B*. Cada lote del tipo *A* contiene 1 toalla de baño y 1 de manos. Cada lote del tipo *B* contiene 2 toallas de baño y 1 de manos. La empresa obtiene un beneficio de 2 euros por cada lote del tipo *A* y 3 euros por cada lote del tipo *B*.
Halla el número de lotes de cada tipo para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?
Solución:
Los datos del enunciado se resumen en la siguiente tabla:

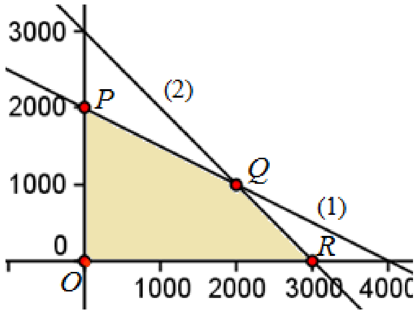
Lote	Cantidad	T. baño	T. manos	Beneficio
A	x	x	x	$2x$
B	y	$2y$	y	$3y$
Disponible		4000	3000	

El objetivo es maximizar los beneficios. Esto es:
Maximizar $B(x, y) = 2x + 3y$
restringido por:

$x + 2y \leq 4000$ (1)

$x + y \leq 3000$ (2)

$x \geq 0;\ y \geq 0$



Estas restricciones generan la región factible sombreada en la figura.
Los vértices son:

$$O = (0, 0);\ P = (0, 2000);\ Q: \begin{cases} x + 2y = 4000 \\ x + y = 3000 \end{cases} \Rightarrow Q = (2000, 1000);\ R = (3000, 0)$$

El beneficio máximo se obtiene en alguno de los vértices de la región factible. Ese beneficio es:
En O, $B(0, 0) = 0$ €.
En P, $B(0, 2000) = 6000$ €.
En Q, $B(2000, 1000) = 4000 + 3000 = 7000$ €.
En R, $B(3000, 0) = 6000$ €.

Para maximizar el beneficio deben venderse 2000 lotes del tipo A y 1000 del tipo B. El beneficio máximo será de 7000 euros.

20. Una empresa constructora dispone de 93000 m² de terreno urbanizable. Decide construir dos tipos de viviendas unifamiliares: una en parcelas de 400 m², que albergarán a familias de una media de cinco miembros, y cuyo precio de venta será de 200000 euros; otra, en parcelas de 300 m², en donde vivirán familias de una media de cuatro miembros, y costarán 160000 euros. Las autoridades del municipio le imponen dos condiciones:
1.ª El número de casas no puede superar las 275;
2.ª El número de habitantes esperado no puede ser superior a 1200 personas.
¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para maximizar los ingresos por venta?
Solución:
Construyendo x viviendas grandes (400 m^2) e y pequeñas, se tendrá:

Viviendas	Número	Superficie	Personas	Ingresos (miles)
Grandes	x	$400x$	$5x$	$200x$
Pequeñas	y	$300y$	$4y$	$160y$
Condiciones	275	93000	1200	

El problema consiste en:
Maximizar $I(x, y) = 200x + 160y$ (en miles de €)

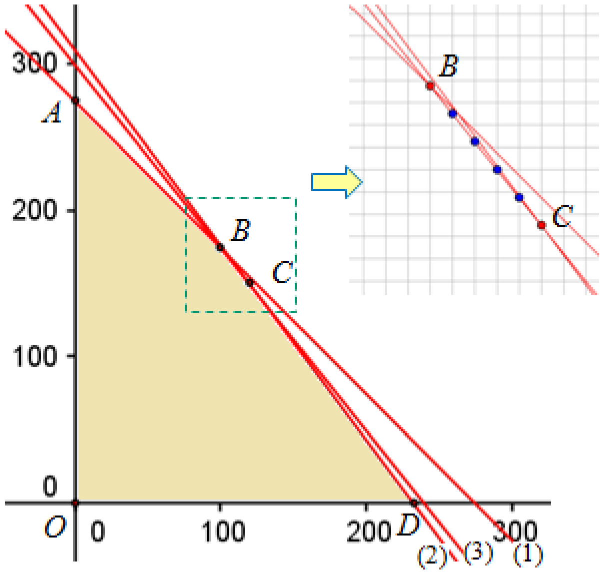
Restringido por:

$x + y \le 275$ (1)

$400x + 300y \le 93000$ (2)

$5x + 4y \le 1200$ (3)

$x \ge 0;\ \ y \ge 0$



La región factible es el pentágono de vértices: *O*(0, 0), *A*(0, 275), *B*(100, 175), *C*(120, 150) y *D*(232,5, 0)

Los ingresos en cada vértice son:

$I(0, 275) = 4320000$ €;

$I(100, 175) = 4800000$ €;

$I(120, 150) = 4800000$ €;

$I(232,5,\ 0) = 4650000$ €

El máximo se da en *B* y *C*, indistintamente. Por tanto, valen todos los pares de coordenadas enteras pertenecientes al segmento *BC*, que son: *B*(100, 175), (104, 170), (108, 165), (112, 160), (116, 155), *C*(120, 150). En cada caso, los ingresos ascenderán a 4800000 euros.

21. Una empresa conservera puede enlatar diariamente un máximo de 1000 kg de atún. Tiene dos tipos de envases (latas pequeñas y grandes), cuyo contenido neto es de 90 g y 400 g, respectivamente. Por razones de producción, el número de latas pequeñas no puede superar el doble de las grandes. Si la ganancia empresarial es de 0,30 € por lata pequeña y de 0,80 € por grande, ¿cómo debe planificarse la producción para que esa ganancia sea máxima?

Solución:

Sean *x* e *y*, respectivamente, el número de latas pequeñas y grandes que se envasan.

Objetivo: maximizar $f(x, y) = 0,30x + 0,80y$

Restricciones:

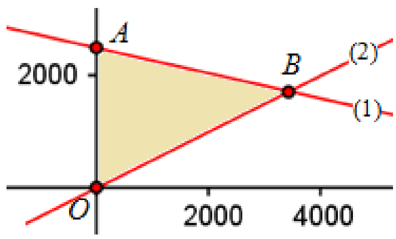
$0,09x + 0,4y \le 1000$ (1); $x \le 2y$ (2); $x \ge 0$; $y \ge 0$

La región factible es el triángulo de vértices:

O(0, 0), *A*(0, 2500) y

B: $\begin{cases} 0,09x + 0,4y = 1000 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ *B*(200000/58, 100000/58) ≈ (3448, 1724).



El máximo se da en *B*, y vale 2413,60 €.

22. Una fábrica de caramelos los produce de dos tipos, masticable y normal. La empresa debe fabricar, para cada tipo de caramelo, entre 300 kg y 3000 kg a la semana. El caramelo masticable se vende a 3 €/kg; el normal 2,5 €/kg. Sabiendo que la producción total no puede ser superior a 5100 kilos de caramelo a la semana, ¿cuántos debe producir de cada tipo para maximizar los ingresos?

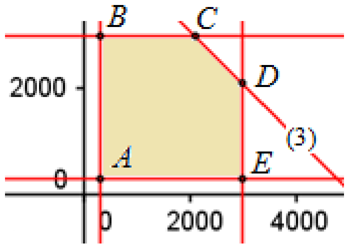
Solución:

Si se producen *x* kg de masticable e *y* kg de normal, el problema consiste en:

Maximizar $f(x, y) = 3x + 2,5y$

Restringida por:

$300 \le x \le 3000$; $300 \le y \le 3000$; $x + y \le 5100$



La región factible es el polígono de vértices:

A(300, 300); *B*(300, 3000); *C*(2100, 3000);
D(3000, 2100); *E*(2100, 300)

El máximo, que vale 14250 €, se da en *D*: cuando se fabrican 3000 kg de caramelo masticable y 2100 kg de caramelo normal.

23. Para abonar una finca se necesitan 400 kg de nitrógeno y 600 kg de fósforo. En el mercado hay dos marcas de abonos, *P* y *Q*. Cada paquete de abono *P* contiene 2 kg de nitrógeno y 6 de fósforo, mientras que cada paquete de *Q* contiene 4 kg de nitrógeno y otros 4 de fósforo. Si el abono *Q* es un 25 % más caro que el *P*, ¿cuántos paquetes hay que comprar de cada marca para abonar la finca con el menor coste posible?

Solución:

Si se compran *x* paquetes de la marca *P* (a un precio 1 u.m.) e *y* paquetes de la marca *Q* (cuyo pecio será 1,25 u.m.) la información se resume en la tabla:

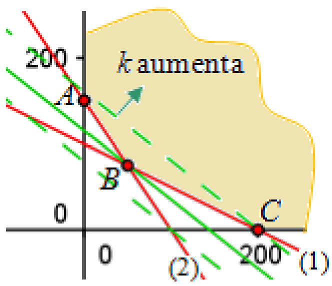
Marca	Cantidad	Nitrógeno	Fósforo	Precio
P	*x*	2*x*	6*x*	1 · *x*
Q	*y*	4*y*	4*y*	1,25 · *y*
Necesidades		400	600	

Con esto, el problema es:

Minimizar $f(x, y) = x + 1,25y$

Restringida por:

$2x + 4y \ge 400$; $6x + 4y \ge 600$; $x \ge 0$; $y \ge 0$



La región factible, no acotada, tiene vértices en *A*(0, 150), *B*(50, 75) y *C*(200, 0).

La ecuación de las rectas de nivel es $x + 1,25y = k$; su nivel aumenta cuando se desplazan hacia la derecha.

Por tanto, el mínimo se da en *B*.

Hay que comprar 50 paquetes de la marca *P* y 75 de la *Q*.

El precio a pagar es $f(50, 75) = 50 + 1,25 \cdot 75 = 143,75$ u.m.

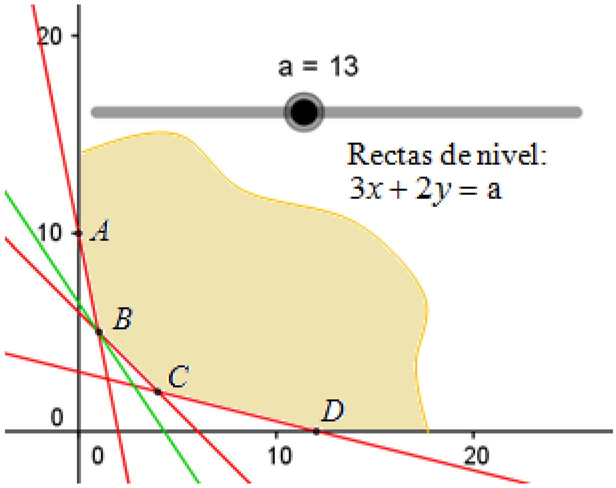
24. Para estar convenientemente alimentado, un caballo necesita 12 unidades de un alimento *A*1, otras 12 de *A*2 y 10 de *A*3. En el mercado hay dos tipos de piensos, *P*1 y *P*2, cuyos precios respectivos son 3 y 2 €/kg. El pienso *P*1 proporciona 1, 2 y 5 unidades de *A*1, *A*2 y *A*3; mientras que *P*2 suministra 4, 2 y 1 unidad de *A*1, *A*2 y *A*3, respectivamente en ambos casos.
¿Cuántos kg de cada pienso hay que comprar para alimentar a un caballo a un coste mínimo?
Solución:
La información se resume en la siguiente tabla:

Pienso	Cantidad	*A*1	*A*2	*A*3	Coste
*P*1	x	x	$2x$	$5x$	$3x$
*P*2	y	$4y$	$2y$	y	2y
Necesidad		12	12	10	

Con esto, el problema es:
Minimizar $f(x,y)=3x+2y$
Restringida por:
$x+4y\geq 12$; $2x+2y\geq 12$;
$5x+y\geq 10$; $x\geq 0$; $y\geq 0$

La región factible, no acotada, tiene vértices en *A*(0, 10), *B*(1, 5), *C*(4, 2) y *D*(12, 0).

La ecuación de las rectas de nivel es $3x+2y=\text{a}$; su nivel disminuye cuando se desplazan hacia la izquierda.
Por tanto, el mínimo se da en *B*. Hay que comprar 1 kg del tipo *P*1 y 5 kg del tipo *P*2.
El precio a pagar es $f(1,5)=3+2\cdot 5=13$ €.



Observación: En este problema he creado con GeoGebra el "deslizador" $3x+2y=\text{a}$. Moviendo el punto se desplaza la recta: la recta más a la izquierda en contacto con la región factible es la que pasa por el punto *B*, siendo a = 13.
(Puedes crearlo tecleando 2x+y=a intro Crea deslizadores …)

25. Una empresa tiene dos centros de producción (*C*1 y *C*2) en los que fabrica tres tipos de artículos *A*1, *A*2 y *A*3. Dicha empresa debe fabricar diariamente un mínimo de 360 unidades del artículo *A*1, 320 del *A*2 y 180 del *A*3. La producción por hora en cada centro viene dada en la siguiente tabla:

Producción	*A*1	*A*2	*A*3
En *C*1	25	30	10
En *C*2	30	20	18

Si cada hora de funcionamiento cuesta 800 euros en *C*1 y 1000 en *C*2, ¿cuántas horas debe funcionar cada centro para que, produciendo, al menos, lo necesario, se reduzcan al mínimo los costes de producción?

Solución:

La información se resume en la siguiente tabla:

Producción	Horas	*A*1	*A*2	*A*3
En *C*1	x	25x	30x	10x
En *C*2	y	30y	20y	18y
Necesidades		360	320	180

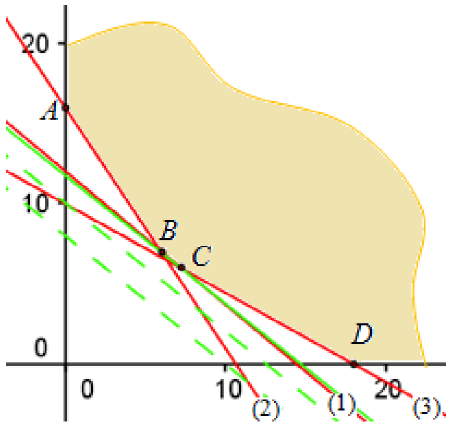
Si *C*1 y *C*2 funcionan x e y horas, respectivamente, el coste será de $f(x, y) = 800x + 1000y$.

El objetivo es minimizar esa suma.

Restricciones:

$25x + 30y \geq 360$; $30x + 20y \geq 320$;

$10x + 18y \geq 180$; $x \geq 0$; $y \geq 0$



Estas restricciones generan la región factible dada en la figura adjunta, cuyos vértices son:

A(0, 16), *B*(6, 7), *C*(7,2, 6) y *D*(18,0).

La función objetivo toma los valores:

$f(0,16) = 16000$; $f(6,7) = 11800$,

$f(7,2,\ 6) = 11760$; $f(18,0) = 14400$

La solución más económica es que el centro *C*1 funcione durante 7,2 horas y el centro *C*2, durante 6.

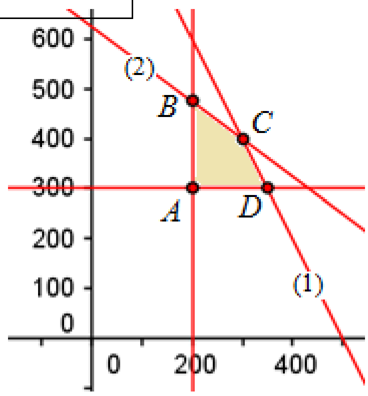
En la figura se trazan las rectas de nivel $800x + 1000y = k$.

26. (Propuesto en Selectividad). Una empresa fabrica pintura de dos tipos: mate y brillante. Para ello mezcla dos productos A y B en distintas proporciones. Cada kilo de pintura mate necesita 0,4 kilos de producto A y 0,6 kilos de producto B. Cada kilo de pintura brillante necesita 0,2 kilos de producto A y 0,8 kilos de producto B. La empresa no puede usar más de 200 kilos de producto A ni más de 500 kilos de producto B. Además, por razones comerciales, quiere fabricar al menos 200 kilos de pintura mate y al menos 300 kilos de pintura brillante. El beneficio por kilo de pintura mate es de 4 euros y el beneficio por kilo de pintura brillante es de 5 euros. ¿Qué cantidad de cada tipo de pintura debe fabricar la empresa para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá?

Solución:

La información se resume en la siguiente tabla:

Pintura	kilos	A	B	Beneficio
Mate	x	0,4x	0,6x	4x
Brillante	y	0,2y	0,8y	5y
Disponible		200	500	



Con esto, el problema es:

Maximizar $B(x, y) = 4x + 5y$

Restringida por:

$0,4x + 0,2y \leq 200$; $0,6x + 0,8y \leq 500$;

$x \geq 200$; $y \geq 300$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

La región factible, acotada, tiene vértices en:

A(200, 300), B(200, 475), C(300, 400) y D(350, 300).

El beneficio en cada vértice es: 2300, 3175, 3200 y 2900 euros, respectivamente.

El máximo es de 3200 €, y se da cuando se fabrican 300 kg de pintura mate y 400 kg de pintura brillante.

27. (Propuesto en Selectividad). Una pastelería dispone de 100 kg de masa, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de nata. Con estos ingredientes elabora dos tipos de tartas: la tarta de chocolate, que requiere para su elaboración 1 kg de masa y 2 kg de crema de chocolate, y la tarta de chocolate y nata, que requiere 2 kg de masa, 1 kg de crema de chocolate y 1 kg de nata. Por cada tarta de chocolate se obtiene un beneficio de 10 euros, y de 12 euros por cada una de chocolate y nata. Suponiendo que vende todas las tartas, ¿cuántas tartas de cada tipo debe preparar para maximizar su beneficio?, ¿cuál es el beneficio máximo?

Solución:

La información se resume en la siguiente tabla:

Tarta	Cantidad	Masa	Crema	Nata	Beneficio
Chocolate	x	x	2x		10x
Choc. y crema	y	2y	y	y	12y
Disponible		100	80	46	

Con esto, el problema es:

Maximizar $B(x, y) = 10x + 12y$

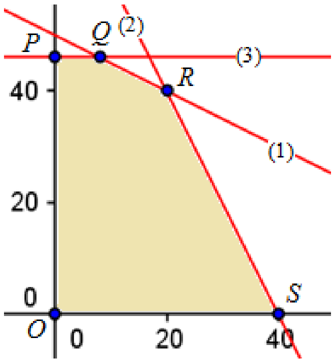
Restringida por:

$x + 2y \leq 100$; $2x + y \leq 80$;

$y \leq 46$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

Los vértices de la región factible son:
$O(0, 0)$, $P(0, 46)$, $Q(8, 46)$, $R(20, 40)$ y $S(40, 0)$.

El beneficio en cada vértice es: 0, 552, 632, 680 y 400 euros, respectivamente.
El máximo es de 680 €, y se da cuando se fabrican 20 tartas de chocolate y 20 de chocolate y nata.



28. Una empresa tiene dos plantas de producción ($P1$ y $P2$) de cierto artículo que vende en tres ciudades ($C1$, $C2$ y $C3$). En $P1$ produce 5000 unidades y en $P2$, 7000 unidades; estas 12000 unidades las vende así: 3500 en $C1$, 4000 en $C2$ y 4500 en $C3$. Los costes de transporte, en euros por unidad de producto, desde las plantas de producción a los centros de ventas son los siguientes:

	a $C1$	a $C2$	a $C3$
Desde P1	30	25	35
Desde P2	22,5	37,5	40

Determina qué número de artículos debe enviar la empresa desde cada planta a cada ciudad para que los costes de transporte sean mínimos.
Solución:
En los problemas de este tipo se exige que toda la producción sea distribuida a los centros de ventas en las cantidades que precisa cada uno; por tanto, no pueden generarse stock del producto ni en las fábricas ni en los centros de ventas. (La generación de stock añade problemas considerables a las empresas; piensa, por ejemplo, en las dificultades de almacenaje que implica el exceso de producción de coches a una empresa automovilística).
En consecuencia, los 5000 artículos producidos en $P1$ deben distribuirse en las cantidades x, y, z a $C1$, $C2$, y $C3$, de manera que $x+y+z=5000$. Pero, además, si desde $P1$ se envían x unidades a $C1$, el resto, hasta las 3500 necesarias en $C1$, deben ser enviadas desde $P2$; esto es, $3500-x$ unidades serán las enviadas desde $P2$ a $C1$.
Del mismo modo, si de $P1$ a $C2$ se envían y, el resto necesario, $4000-y$, deben enviarse desde $P2$. Y lo mismo para $C3$, que recibirá z desde $P1$ y $4500-z$ desde $P2$.
En la siguiente tabla se resume lo dicho.

Envíos	a $C1$ (3500)	a $C2$ (4000)	a $C3$ (4500)
Desde $P1$ (5000)	x	y	z
Desde P2 (7000)	$3500-x$	$4000-y$	$4500-z$

Como $x+y+z=5000$, se tiene que $z=5000-x-y \Rightarrow 4500-z=-500+x+y$
Ahora bien, todas las cantidades anteriores deben ser mayores o iguales que cero y menores o iguales que las cantidades demandadas. Por tanto, se obtiene las siguientes desigualdades:

$0 \le x \le 3500$ (1); $0 \le y \le 4000$ (2); $0 \le 5000 - x - y \le 4500$ (3)
$0 \le 3500 - x \le 3500$ (4); $0 \le 4000 - y \le 4000$ (5); $0 \le -500 + x + y \le 4.500$ (6)

Transformando esas seis restricciones y observando que se repiten, quedan:

$0 \le x \le 3.500$ (1) y (4)
$0 \le y \le 4.000$ (2) y (5)
$500 \le x + y \le 5000$ (3) y (6)

Recuerda que nuestro objetivo es abaratar, al máximo, los costes de transporte. Estos costes se hallan multiplicando las cantidades enviadas desde cada planta a cada ciudad por los respectivos costes de transporte unitario.

Se obtiene:

$$C(x,y)=30x+25y+35(5000-x-y)+22,5(3500-x)+37,5(4000-y)+40(-500+x+y)$$

$$C(x,y)=12,5x-7,5y+383750$$

En definitiva, el objetivo es:

Minimizar $C(x,y)=12,5x-7,5y+383750$

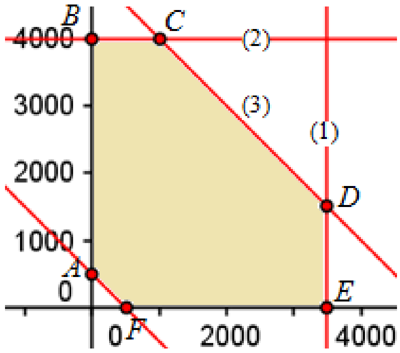
sujeta a: $0\le x\le 3500$ (1)

$0\le y\le 4000$ (2)

$500\le x+y\le 5000$ (3)

La región factible es la adjunta. Sus vértices son:

A(0, 500), *B*(0, 4.000), *C*(1.000, 4.000),
D(3.500, 1.500), *E*(3.500, 0) y *F*(500, 0).



El coste, el valor de $C(x,y)=12,5x-7,5y+383750$, en cada uno de esos puntos es:

→ en *A*, 380000; en *B*, 353750; en *C*, 366250; en *D*, 416250; en *E*, 427500; en *F*, 390000.

El mínimo se da en *B*; cuando $x = 0$ e $y = 4000$.

Luego, las cantidades a distribuir son:

Envíos	a *C*1 (3500)	a *C*2 (4000)	a *C*3 (4500)
Desde *P*1 (5000)	0	4000	1000
Desde P2 (7000)	3500	0	3500