TEMA 3. Sistemas de ecuaciones lineales
Problemas Resueltos

Clasificación y resolución de sistemas por métodos elementales

1. Resuelve utilizando el método de de reducción de Gauss, los sistemas:

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=4 \\ -2x+y+4z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+3z=-4 \\ x+y+z=2 \\ x+2y-z=6 \end{cases}$

Solución:
Se transforma el sistema como se irá indicando.

$$\text{a) } \begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=4 \\ -2x+y+4z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-3E1 \\ E3+2E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=2 \\ -y-4z=-2 \\ 3y+6z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3+3E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=2 \\ -y-4z=-2 \\ -6z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}.$$

Observación: Para cerciorarse de que la solución es correcta es conveniente su comprobación, sustituyendo los valores hallados en las ecuaciones iniciales, y viendo que se cumplen.

$$\text{b) } \begin{cases} x-y+3z=-4 \\ x+y+z=2 \\ x+2y-z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x-y+3z=-4 \\ 2y-2z=6 \\ 3y-4z=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-2E2 \end{matrix} \begin{cases} x-y+3z=-4 \\ 2y-2z=6 \\ -y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases}.$$

2. Resuelve utilizando el método de Gauss los sistemas:

a) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=7 \end{cases}$

Solución:

a) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x=2 \\ 2x=2 \end{cases} \to$ (Dos ecuaciones repetidas). Resulta un sistema compatible indeterminado, equivalente a $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=5 \\ x=1 \end{cases}$.

Si se hace $z = t$, la solución puede escribirse como sigue: $\begin{cases} x=1 \\ y=5-t \\ z=t \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x=2 \\ 2x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x=2 \\ 0=-1 \end{cases} \to$ (Una ecuación absurda). El sistema es incompatible.

3. Aplicando el método de Gauss discute, en función de los valores del parámetro *m*, los sistemas:

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=4 \\ -2x+y+mz=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+2z=m \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y-z=6 \end{cases}$

Solución:
Se transforma el sistema como se irá indicando.

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=4 \\ -2x+y+mz=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-3E1 \\ E3+2E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=2 \\ -y-4z=-2 \\ 3y+(m+2)z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3+3E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=2 \\ -y-4z=-2 \\ (m-10)z=0 \end{cases}.$

A partir de la tercera ecuación: $E3 \equiv (m-10)z=0$, puede deducirse:

- Si $m = 10$, queda $E3 \equiv 0 \cdot z = 0$ → Esta ecuación se cumple para cualquier valor de *z*.

El sistema resultante es compatible indeterminado. Para hallar su solución puede hacerse $z = t$ y llevar ese valor a las demás ecuaciones.
Resulta:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -y-4z=-2 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+t=2 \\ -y-4t=-2 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3t \\ y=2-4t \\ z=t \end{cases}.$$

- Si $m \neq 10$, de $E3 \equiv (m-10)z=0 \Rightarrow z=0$ → Observa que, despejando $z = \dfrac{0}{m-10} = 0$.

El sistema resultante es compatible determinado. Para hallar su solución se sustituye $z = 0$ en las demás ecuaciones, resultando:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -y-4z=-2 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+0=2 \\ -y-0=-2 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}.$$

b) $\begin{cases} x-y+2z=m \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y-z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-2E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x-y+2z=m \\ 3y-3z=2-2m \\ 3y-3z=6-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} x-y+2z=m \\ 3y-3z=2-2m \\ 0=4+m \end{cases}.$

La tercera ecuación: $E3 \equiv 0 = 4+m$, sólo tiene sentido si $m = -4$, resultando $0 = 0$. Se pierde una ecuación: el sistema será compatible indeterminado, equivalente a $\begin{cases} x-y+2z=-4 \\ 3y-3z=10 \\ m=-4 \end{cases}$.

Su solución puede darse en función de alguna de las incógnitas. Así, si se hace $z = t$, el sistema queda $\begin{cases} x-y+2t=-4 \\ 3y-3t=10 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4+y-2t \\ y=10/3+t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2/3-t \\ y=10/3+t \\ z=t \end{cases}.$

Como se ha dicho, para $m \neq -4$, el sistema será incompatible.

4. Aplicando el método de Gauss discute, en función de los valores del parámetro *m*, los sistemas:

a) $\begin{cases} x \quad +z=1 \\ y+z=2 \\ 3x+my+4z=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \quad +2z=1 \\ y+z=2 \\ 2x+my+4z=3 \end{cases}$

<u>Solución</u>:
Se transforma el sistema como se irá indicando.

a) $\begin{cases} x \quad +z=1 \\ y+z=2 \\ 3x+my+4z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-3E1 \end{matrix} \begin{cases} x \quad +z=1 \\ y+z=2 \\ my+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} x \quad +z=1 \\ y+z=2 \\ (m-1)y=-2 \end{cases}.$

A partir de la tercera ecuación: $E3 \equiv (m-1)y = -2$, puede deducirse:

- Si $m = 1$, queda $E3 \equiv 0 \cdot y = -2$ → Esta ecuación es absurda. El sistema resultante es incompatible.
- Si $m \neq 1$, el sistema es compatible determinado. Observa que de $E3 \equiv (m-1)y = -2$, despejando $\Rightarrow y = \dfrac{-2}{m-1}$.

El valor de las demás incógnitas se halla sustituyendo:

$$\begin{cases} x \quad +z=1 \\ y+z=2 \\ y=-2/(m-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=1 \to x=1-z \to x=1-\dfrac{2m}{m-1}=\dfrac{-m-1}{m-1} \\ z=2-y \to z=2+\dfrac{2}{m-1}=\dfrac{2m}{m-1} \\ y=-\dfrac{2}{m-1} \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x \quad +2z=1 \\ y+z=2 \\ 2x+my+4z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} x \quad +2z=1 \\ y+z=2 \\ my=1 \end{cases}.$

A partir de la tercera ecuación: $E3 \equiv my = 1$, puede deducirse:

- Si $m = 0$, queda $E3 \equiv 0 \cdot y = 1$ → La ecuación es absurda. El sistema resultante es incompatible.
- Si $m \neq 0$, el sistema es compatible determinado. Observa que de $E3 \equiv my = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{m}$.

El valor de las demás incógnitas se halla sustituyendo:

$$\begin{cases} x \quad +2z=1 \\ y+z=2 \\ my=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2z=1 \to x=1-2z \to x=1-\dfrac{4m-2}{m}=\dfrac{-3m+2}{m} \\ z=2-y \to z=2-\dfrac{1}{m}=\dfrac{2m-1}{m} \\ y=\dfrac{1}{m} \end{cases}$$

5. Aplicando la regla de Cramer halla la solución general, en función del parámetro *m*, del sistema $\begin{cases} x \quad\; + z = 1 \\ \quad y + z = 2 \\ 3x + my + 4z = 3 \end{cases}$.

Solución:

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & m & 4 \end{pmatrix}$. Su determinante vale $|A| = 1 - m$.

Como para poder aplicar la regla de Cramer hay que exigir que $|A| = 1 - m \neq 0$, *m* no puede tomar el valor 1. Con esto:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & m & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1+m}{1-m}\ ;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2}{1-m}\ ;\ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & m & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2m}{1-m}.$$

Puede observarse que estas soluciones carecen de sentido cuando *m* = 1. Esto significa que para *m* = 1 el sistema es incompatible. (Compara este método y resultado con lo hecho en el problema anterior).

6. Estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas. Cuando exista, da su solución.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

Solución:

Son sistemas de 3 ecuaciones con 2 incógnitas. Para estudiar su compatibilidad basta con aplicar transformaciones de Gauss. El sistema será compatible cuando aparezca una ecuación repetida; en caso contrario, será incompatible.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2 + E1 \\ E3 + E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x = 4 \\ 3x = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \to y = 3 \\ x = 2 \\ x = 2 \end{cases}$. Compatible.

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2 + E1 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x = 4 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \to y = 3 \\ x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$. Incompatible.

De otra manera. El sistema tendrá solución cuando la solución obtenida a partir de dos de las ecuaciones valga en la otra.

a) Se toman *E*1 y *E*2. La solución del sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$ es *x* = 2 e *y* = 3.

¿Esos valores verifican la tercera ecuación: $E3 \equiv 2x - y = 1$?

Sí, pues 2 · 2 – 3 = 1.

En consecuencia, el sistema es compatible y su solución es *x* = 2 e *y* = 3.

Observación: La solución es la misma si se toman las ecuaciones *E*1 y *E*3 o *E*2 y *E*3.

b) Se toman $E1$ y $E2$. La solución del sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$ es $x = 2$ e $y = 3$.

¿Esos valores verifican la tercera ecuación: $E3 \equiv 2x+y=1$?

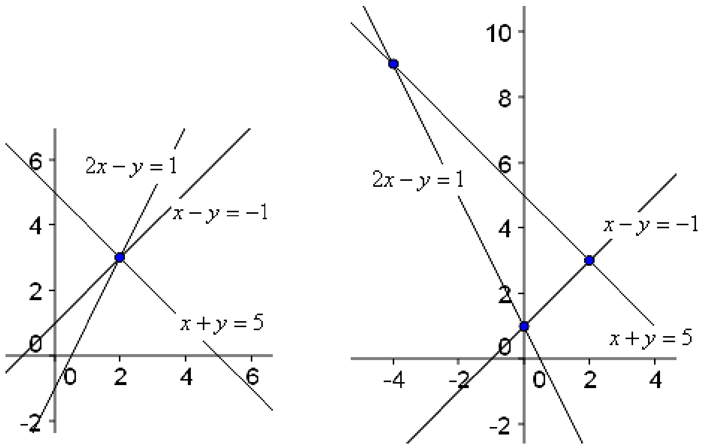
No, pues $2 \cdot 2 + 3 = 7 \neq 1$.

En consecuencia, el sistema es incompatible: no tiene solución.

Observaciones:

1) La solución obtenida a partir de las ecuaciones $E1$ y $E3$, $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ es $x = -4$ e $y = 9$.

2) El lector sabrá que las ecuaciones del tipo $ax+by=c$ se representan como rectas en el plano. Si las tres rectas se cortan en el mismo punto, el sistema asociado es compatible. Si esas tres rectas no tienen ningún punto en común significa que el sistema asociado es incompatible. En la siguiente figura se representan las rectas asociadas a ambos sistemas.



7. Para qué valor de m tendrá solución el sistema:

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \\ mx-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \\ 2x+y=m \end{cases}$

Solución:

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \\ mx-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \\ E3+E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y=5 \\ 2x=4 \\ (m+1)x=6 \end{cases} \Rightarrow x=2.$

Como $x = 2$ debe cumplir las tres ecuaciones, sustituyendo en $E3$ se tendrá:

$(m+1)\cdot 2=6 \Rightarrow 2m+2=6 \Rightarrow m=2$.

b) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \\ 2x+y=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y=5 \\ 2x=4 \\ x=m-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x=2 \\ x=m-5 \end{cases}$. Será compatible cuando $2 = m - 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 7$.

8. Expresa en la forma matricial $AX = B$ el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \frac{1}{3}x - 2y = 1 \\ x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$.

Resuélvelo calculado la matriz inversa de *A* y despejando *X*.

Solución:

El sistema dado es equivalente a $\begin{cases} x - 6y = 3 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La matriz *A* es invertible, pues $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3$.

Su inversa es: $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

La solución de la ecuación $AX = B$ es $X = A^{-1}B$.

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 1; y = -\frac{1}{3}.$$

9. Resuelve el sistema $(AB)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -8 & -10 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(AB)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -8 & -10 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 4z = 2 \\ -3x - 8y - 10z = 5 \\ 2x + 7y = 0 \end{cases}.$$

Transformaciones de Gauss:

$$\begin{cases} y - 4z = 2 \\ -3x - 8y - 10z = 5 \\ 2x + 7y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2 + 8E1 \\ E3 - 7E1 \end{matrix}\begin{cases} y - 4z = 2 \\ -3x - 42z = 21 \\ 2x + 28z = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2/(-3) \\ E3/2 \end{matrix}\begin{cases} y - 4z = 2 \\ x + 14z = -7 \\ x + 14z = -7 \end{cases}.$$

Como aparecen dos ecuaciones repetidas, el sistema es compatible indeterminado, equivalente a: $\begin{cases} y - 4z = 2 \\ x + 14z = -7 \end{cases}$.

Haciendo *z* = *t* se obtiene la solución: $\begin{cases} x = -7 - 14t \\ y = 2 + 4t \\ z = t \end{cases}$.

Sistemas con un parámetro. Aplicación del teorema de Rouché

10. Estudia, en función del valor de *m*, la compatibilidad del sistema $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x+3y+2z=5 \\ x+my+3z=7 \end{cases}$.

Resuélvelo cuando tenga infinitas soluciones, y da un par de esas soluciones.

Solución:

Sean las matrices de coeficientes y ampliada: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & m & 3 & 7 \end{array}\right)=M$

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}=4-m \Rightarrow |A|=0$ si $m = 4$; $|A|\neq 0$ cuando $m \neq 4$.

Con esto:

- Si $m \neq 4 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $m = 4$, se tiene $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right)=M$. Como $|A_1|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow$ r(A) = 2.

Como $C4 = C2 + C3$, el rango de M también es 2: r(M) = 2.

Luego si $m = 4$, r(A) = r(M) = 2. El sistema será compatible indeterminado, equivalente a:

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x+3y+2z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=3-z \\ x+3y=5-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \end{matrix}\begin{cases} x+2y=3-z \\ y=2-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-z-2y \\ y=2-z \end{cases}$$

Haciendo $z = t$, se obtiene la solución $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases}$.

Para cada valor de t se obtiene una solución distinta. Por ejemplo, si $t = 0$ se obtiene $x = -1$, $y = 2$, $z = 0$; si $t = 1$, la solución es $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$.

11. Resuelve el sistema $\begin{cases} kx+y+(k+1)z=0 \\ ky+(k+1)z=0 \\ x+2z=1 \end{cases}$ para los valores de k que lo hagan compatible.

Solución:

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema tendrá solución cuando r(A) = r(M).

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & k+1 & 0 \\ 0 & k & k+1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)=M \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} k & 1 & k+1 \\ 0 & k & k+1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2k^2+k+1-k^2-k=k^2+1.$$

Como $|A|\neq 0$ para todo k, r(A) = 3 = r(M) $\Rightarrow$ El sistema es compatible determinado para todo valor de k.

Su solución, aplicando la regla de Cramer, es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1 & k+1\\ 0 & k & k+1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1-k^2}{k^2+1};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}k & 0 & k+1\\ 0 & 0 & k+1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-k^2-k}{k^2+1};\quad z=\frac{\begin{vmatrix}k & 1 & 0\\ 0 & k & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{k^2}{k^2+1}.$$

12. Discute, según los valores del parámetro *k*, el sistema $\begin{cases} kx \quad +2z=0\\ \quad ky-z=k\\ x+3y+z=5\end{cases}$.

Resuélvelo para el valor de $k = 2$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 2 & 0\\ 0 & k & -1 & k\\ 1 & 3 & 1 & 5\end{array}\right)=M$.

$$|A|=\begin{vmatrix}k & 0 & 2\\ 0 & k & -1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=k(k+3)-2k=k^2+k=k(k+1)\Rightarrow |A|=0 \text{ si } k=0 \text{ o } k=-1.$$

Por tanto:

- Si $k \neq 0, -1$, el r(*A*) = 3 y el sistema será compatible determinado.
- Si $k = 0$, se tiene:

$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 1 & 5\end{array}\right)=M$, siendo r(*A*) = 2 = r(*M*), pues *C*1, *C*2 y *C*4 son proporcionales.

El sistema será compatible indeterminado.

- Si $k = -1$, se tiene:

$A=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1 & 5\end{array}\right)=M$, con r(*A*) = 2 y r(*M*) = 3, pues el menor $\begin{vmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ 3 & 1 & 5\end{vmatrix}$ = 4.

Luego, el sistema será incompatible.

Para $k = 2$, el sistema queda:

$$\begin{cases} 2x \quad +2z=0\\ \quad 2y-z=2\\ x+3y+z=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x \quad +z=0\\ \quad 2y-z=2\\ x+3y+z=5\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}\\ \\ E3-E1\end{matrix}\begin{cases} x \quad +z=0\\ \quad 2y-z=2\\ 3y=5\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=-z\to x=-4/3\\ z=2y-2\to z=4/3.\\ y=5/3\end{cases}$$

13. a) Discute en función de los valores de a el sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (1+a)y - az = 2a \\ x + ay + (1+a)z = 1 \end{cases}$.

b) Si es el posible, resuélvelo cuando a = –1 y cuando a = 1.

Solución:

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+a & -a & 2a \\ 1 & a & 1+a & 1 \end{array}\right) = M$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+a & -a \\ 1 & a & 1+a \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F2-F1 \\ F3-F1 \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & a-1 & -a+1 \\ 0 & a-2 & a+2 \end{vmatrix} = (a-1)(a+2) - (-a+1)(a-2) = 2a(a-1).$$

Por tanto: $|A| = 0$ si a = 0 o a = 1 ⇒ r(A) = 2; $|A| \neq 0$ si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ ⇒ r(A) = 3.

En consecuencia:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, r(A) 3 = r(M) → Sistema compatible determinado.
- Si a = 0, se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$. Es evidente que r(A) = 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Por otra parte, como el menor $|M_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow$ el rango de M es 3.

En este caso, el sistema será incompatible.

- Si a = 1, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) = M$. Como $F1$ = $F2$ ⇒ r(A) = r(M) = 2.

En este caso el sistema es compatible indeterminado.

b) Para a = –1, el sistema es compatible determinado. Su solución puede hallarse por sustitución.

Si a = –1, queda: $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + z = -2 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 \to x + 2(x-1) - (-2-x) = 2 \\ z = -2 - x \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 2 \\ z = -2 - x \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = -1/2 \\ z = -5/2 \end{cases}.$$

Para a = 1, el sistema es compatible indeterminado, equivalente a:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 2 + z \\ x + y = 1 - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1-E2 \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} y = 1 + 3z \\ x + y = 1 - 2z \end{cases}.$$

Si se hace $z = t$, su solución es $\begin{cases} x = -5t \\ y = 1 + 3t \\ z = t \end{cases}$.

14. a) Halla, si existen, los valores del parámetro a para que el sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 4y = -a \\ 4x + 10y = a^2 \end{cases}$ sea compatible determinado.
b) Resuélvelo, si es posible, para $a = -2$ y para $a = 2$.
Solución:
a) Se trata de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas.
Para que tenga solución única (SCD) es necesario que r(A) = r(M) = 2, siendo A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. Si r(M) = 3, el sistema será incompatible.

Las matrices son: $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -a \\ 4 & 10 & a^2 \end{array}\right) = M$

El determinante de M vale

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -a \\ 4 & 10 & a^2 \end{vmatrix} = -4a^2 + 10a - (2a^2 + 4a) + 20 + 16 = -6a^2 + 6a + 36 = -6(a+2)(a-3).$$

Este determinante vale 0 si $a = -2$ o $a = 3$.
Por tanto:

- Si $a \neq -1$ y $3 \Rightarrow$ r(M) = 3. El sistema será incompatible.
- Si $a = -2$ o $a = 3$, r(A) = r(M) = 2. El sistema será compatible determinado.

b) Si $a = -2$ el sistema es: $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 4y = 2 \\ 4x + 10y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 4\cdot E1 \\ \end{matrix} \begin{cases} 4x + 4y = 4 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$.

Sumando ambas ecuaciones se obtiene: $x = 1 \Rightarrow y = 0$.

Si $a = 2$ el sistema es incompatible.

15. a) Discute en función de los valores de a el sistema $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$.

b) Resuélvelo para el caso $a = 0$**.**
Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a-1)(a^2 + a - 2) = (a-1)(a-1)(a+2)$.

La descomposición factorial se hace aplicando el teorema del resto: viendo que una raíz es a = 1, dividiendo por Ruffini y resolviendo la ecuación de segundo grado.
Para estudiar la compatibilidad del sistema hay que estudiar los rangos de las matrices A y M,

de coeficientes y ampliada, respectivamente.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right)=M$$

Como se ha visto, $|A|=(a-1)(a-1)(a+2) \Rightarrow |A|=0$ si a = 1 (raíz doble) o a = –2.

Luego:

- Si $a \neq 1$ y –2 $\Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si a = 1 se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=M \Rightarrow$ r(A) = r(M) = 1.

El sistema será compatible indeterminado con dos grados de libertad.
El sistema inicial quedará reducido a $\{x+y+z=1$.

- Si $a=-2$ se tendrá: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)=M$.

El rango de A es 2; pero el rango de M es 3, pues el menor de M,

$|M_1|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=0+10-5\neq 0$. En este caso el sistema es incompatible.

b) Para a = 0, el sistema es:

$$\begin{cases} y+z=1 \\ x \quad +z=0 \\ x+y \quad =0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{(Por Gauss)} \quad \begin{array}{r} \\ \\ E3-E1 \end{array}\begin{cases} y+z=1 \\ x \quad +z=0 \\ x \quad -z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ E3+E2 \end{array}\begin{cases} y+z=1 \\ x \quad +z=0 \\ 2x=-1 \end{cases}.$$

La solución es: x = –1/2; y = 1/2; z = 1/2.

16. (Propuesto en Selectividad 1999, Madrid)
Estudia el siguiente sistema lineal, según los diferentes valores del parámetro real a. En los casos en que sea compatible, resuélvelo.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>:

Las marices de coeficientes y ampliada son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -1 & a \\ -1 & -1 & 2 & a \end{array}\right)=M$

$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$. Luego, r($A$) = 2.

El menor $|M_1| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & a \\ 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = 9a \Rightarrow |M_1| = 0$ si $a = 0$; $|M_1| \neq 0$ si $a \neq 0$.

Por tanto, r(M) = 2 si a = 0; y r(M) = 3, si $a \neq 0$.
Luego:

- Si a = 0, r(A) = 2 = r(M). El sistema es compatible indeterminado.
- Si $a \neq 0$, r(M) = 3 y r(A) = 2. El sistema será incompatible.

Para a = 0, el sistema dado es equivalente a:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - z = y \\ x + z = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2 + E1 \end{matrix} \begin{cases} 2x - z = y \\ 3x = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}.$$

17. (Propuesto en Selectividad 2001, La Rioja)
Estudia, según los valores de m, y resuelve cuando sea posible el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + my + 3z = 3 \\ y - 6z = 0 \\ 3y - z = 2 \end{cases}$$

<u>Solución</u>:
Es un sistema con 4 ecuaciones y 3 incógnitas. Necesariamente sobra una ecuación, al menos. Como siempre, tendrá solución cuando el rango de la matriz de coeficientes sea igual al de la matriz ampliada.

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & m & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) = M$

El rango de A es 3, pues el menor $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 17 \neq 0$.

Para que el rango de M también sea 3 es necesario que su determinante (4 × 4) sea 0:

$$|M| = \begin{vmatrix} m & 3 & 3 \\ 1 & -6 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -12m + 45 + 13 = -12m + 58 \Rightarrow |M| = 0 \text{ si } m = \frac{29}{6}.$$

Por tanto:

- Si $m \neq \frac{29}{6}$, r(A) = 3 y r(M) = 4. El sistema será incompatible.
- Si $m = \frac{29}{6}$, r(A) = 3 = r(M). El sistema es compatible determinado.

Para $m = \frac{29}{6}$ el sistema es equivalente a $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ y - 6z = 0 \\ 3y - z = 2 \end{cases}$ (Se ha suprimido $E2$).

Aplicando el método de reducción de Gauss:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ y-6z=0 \\ 3y-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-3E2 \end{matrix} \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ y-6z=0 \\ 17z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=1 & \to x=1-2y-3z=-13/17 \\ y-6z=0 & \to y=6z=12/17 \\ z=2/17 \end{cases}$$

Luego, para $m=\dfrac{29}{6}$, la solución es: $x=\dfrac{-13}{17}$; $y=\dfrac{12}{17}$; $z=\dfrac{2}{17}$.

<u>Sistemas homogéneos</u>

18. Halla el valor de *k* para que el sistema $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y+kz=0 \end{cases}$ tenga solución distinta de la trivial. Para dicho valor de *k*, calcula sus soluciones.

<u>Solución</u>:

Como el sistema es homogéneo siempre será compatible. Si el rango de la matriz de coeficientes es 3, solo tendrá la solución trivial. Por tanto, hay que hallar el valor de *k* que anule el determinante de la matriz de coeficientes, para que su rango sea menor que 3.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}=k+1+2k+1+1=0 \Rightarrow 3k+3=0 \Rightarrow k=-1.$$

Para $k=-1$, el sistema queda:

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-z \\ x+y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \end{matrix} \begin{cases} x-y=-z \\ 2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}.$$

Haciendo $z=t \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=t \end{cases}$.

19. Dado el sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$.

a) Halla sus soluciones.

b) Añade otra ecuación para que el sistema siga siendo homogéneo y tenga solución única.

c) Añade otra ecuación para que el sistema siga siendo compatible indeterminado.

<u>Solución</u>:

a) Por tratarse de un sistema homogéneo es compatible. Como tiene 3 incógnitas y sólo 2 ecuaciones, será indeterminado. Su solución puede hacerse despejando, para ello aplicando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-z \\ x+2y=-3z \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ E2-E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y=-z \\ y=-2z \end{cases}.$$

Haciendo $z = t$, su solución es: $\begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$.

b) Debe añadirse una ecuación que no dependa de las dos dadas. Por ejemplo $x+y=0$.

El sistema sería $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$; que por ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1-2=-1\neq 0$, solo tiene la solución trivial: $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

c) Debe añadirse una ecuación que dependa de las dos dadas.
Por ejemplo $E3 \equiv E2-E1 \to y+2z=0$.

El sistema sería $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$; que por ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1-1=0$, es compatible indeterminado, y equivalente al dado.

20. Discute y resuelve, en función de los valores de k, el sistema $\begin{cases} kx+(1-k)y+(2-k)z=0 \\ x+y+z=0 \\ kx+y+kz=0 \end{cases}$.

Solución:
Es un sistema homogéneo; por tanto, siempre tiene solución. Para que tenga infinitas soluciones, el rango de la matriz de coeficientes, A, debe ser 2 $\Rightarrow |A|=0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1-k & 2-k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & k \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ = C2-C1 \\ C3-C1 \end{matrix} \begin{vmatrix} k & 1-2k & 2-2k \\ 1 & 0 & 0 \\ k & 1-k & 0 \end{vmatrix} = -(2-2k)(1-k) = 2(k-1)^2$$

Con esto:

- Si $k \neq 1$, $|A| \neq 0 \to$ el sistema será compatible determinado; y su solución: $x = y = z = 0$.
- Si $k = 1$, la matriz de coeficiente queda $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 2. Por tanto, el sistema

inicial es equivalente a $\begin{cases} x+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$. (Debe suprimirse la 2ª o 3ª ecuación; nunca la 1ª).

Su solución es $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$.

21. Discute, según los valores del parámetro k, el sistema: $\begin{cases} (1+k)x-2y+4z=0 \\ x-(1-k)y+z=0 \\ x+ky+z=0 \end{cases}$.

Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

Como el sistema es homogéneo siempre será compatible. Si el rango de la matriz de coeficientes es 3, será compatible determinado; si vale menos que 3, compatible indeterminado.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1+k & -2 & 4 \\ 1 & -1+k & 1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} \underset{F3-F2}{=} \begin{vmatrix} 1+k & -2 & 4 \\ 1 & -1+k & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(1+k-4) = -k+3.$$

Por tanto:

- Si $k \neq 3 \Rightarrow$ r(A) = 3, pues $|A| \neq 0$. El sistema será compatible determinado; y su solución: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
- Para $k = 3$, la matriz A queda: $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2, pues el menor

$M_1=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=10 \neq 0$. Por tanto, el sistema será compatible indeterminado con un grado de indeterminación.

- Para ese valor de $k = 3$, el sistema queda:

$$\begin{cases} 4x-2y+4z=0 \\ x+2y+z=0 \\ x+3y+z=0 \end{cases} \to \text{(sobra una ecuación)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+3y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=-z \\ x+3y=-z \end{cases}.$$

Por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -z & 2 \\ -z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{-z}{1}=-z;\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{0}{1}=0.$$ Si se hace $z = t$, la solución es: $\begin{cases} x=-t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$.

22. Discute, según los valores del parámetro a, el sistema $\begin{cases} x+2z=0 \\ x-3y+az=0 \\ ax+z=0 \end{cases}$.

Resuélvelo en los casos en que sea compatible, resolverlo.

Solución:

Es un sistema homogéneo. Siempre es compatible.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & a \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=3-6a=0$$ cuando $a = 1/2$; y $|A| \neq 0$ si $a \neq 1/2$.

Luego:

- Si $a \neq 1/2$, r(A) = 3. El sistema es compatible determinado.

- Si a = 1/2, r(A) = 2. El sistema será compatible indeterminado.

Soluciones en ambos casos:
Para $a \neq 1/2$, la solución es la trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Para a = 1/2, el sistema es equivalente a $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x - 3y + z/2 = 0 \\ x/2 + z = 0 \end{cases}$ → (sobra una ecuación) →

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2x - 6y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ 2x - 6y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ -4z - 6y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ -6y = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -z/2 \end{cases}$$

Si se hace $z = -2t$, la solución es: $\begin{cases} x = 4t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$.

<u>Problemas con enunciado</u>

23. (Propuesto en Selectividad 2009, Castilla y León)
El dueño de un supermercado ha comprado embutido, bebidas y conservas, por un importe total de 4600 €. El valor de las conservas es el mismo que el de las bebidas y embutidos juntos. Si vende todos estos productos, añadiendo un beneficio del 10% en el embutido, el 20% en las bebidas y el 15% en las conservas, obtendrá un importe total de 5305 €. Calcula lo que pagó por cada uno de ellos.
<u>Solución</u>:
Sea x el importe del embutido; y el de las bebidas y z el de las conservas.
Se debe cumplir:

$$\begin{cases} x + y + z = 4600 \\ z = x + y \\ 1,10x + 1,20y + 1,15z = 5305 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 4600 \\ x + y - z = 0 \\ 1,10x + 1,20y + 1,15z = 5305 \end{cases}.$$

Por Gauss:

$$\begin{array}{r} \\ E2 - E1 \\ E3 - 1,1E1 \end{array} \begin{cases} x + y + z = 4600 \\ -2z = -4600 \\ 0,1y + +0,05z = 245 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1300 + 2300 = 4600 \to x = 1000 \\ z = 2300 \\ 0,1y + 0,05 \cdot 2300 = 245 \to y = 1300 \end{cases}.$$

24. (Propuesto en Selectividad 2010, País Vasco)
En la exposición de un establecimiento de material de oficina hay 400 unidades, entre lámparas, sillas y mesas, con un valor total de 15000 €. Si el valor de una lámpara es de 16 €, el de una silla 50 € y el de una mesa 80 €, y, además, hay tantas lámparas como sillas y mesas juntas, ¿cuántas lámparas, sillas y mesas hay en la exposición?
<u>Solución</u>:
Sean x, y, z el número de lámparas, sillas y meas, respectivamente.
Debe cumplirse que:

$$\begin{cases} x + y + z = 400 \\ 16x + 50y + 80z = 15000 \\ x = y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 400 \\ 16x + 50y + 80z = 15000 \\ x - y - z = 0 \end{cases}.$$

Transformando el sistema:

$$\begin{matrix} \\ E2-50E1 \\ E3+E1 \end{matrix}\left\{\begin{array}{c} x+y+z=400 \\ -34x+30z=-5000 \\ 2x=400 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 200+y+60=400 \to y=140 \\ -34\cdot 200+30z=-5000 \to z=60 \\ x=200 \end{array}\right. .$$

25. Halla las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 9 años la edad de la madre era 4 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 18 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Solución:

En la siguiente tabla se resumen los datos y las relaciones existentes:

Edades	Madre	Hijo 1º	Hijo 2º	Relación entre edades
Actualmente	x	y	z	
Hace 9 años	$x-9$	$y-9$	$z-9$	$x-9=4(y-9+z-9)$
Dentro de 18 años	$x+18$	$y+18$	$z+18$	$x+18=y+18+z+18$
Dentro de $x-y$ (*)		x	$z+x-y$	$z+x-y=42$

(*) Puede observarse que el hijo mayor, que tiene y años, tendrá la edad de la madre (x años) dentro de $x-y$ años.

Se obtiene el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x-4y-4z=-63 \\ x-y-z=18 \\ x-y+z=42 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{matrix} E1-E2 \\ \\ E3-E2 \end{matrix}\left\{\begin{array}{l} -3y-3z=-81 \\ x-y-z=18 \\ 2z=24 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{matrix} E1:(-3) \\ \\ \\ \end{matrix}\left\{\begin{array}{l} y+z=27 \to y=15 \\ x-y-z=18 \\ z=12 \end{array}\right.$$

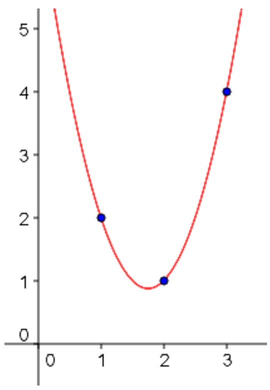
Luego: $z = 12$; $y = 15$; $x = 45$.

La madre tiene 45 años; los hijos, 15 el mayor y 12 el menor.

26. Encuentra la ecuación de la parábola de ecuación $y=ax^2+bx+c$, cuya gráfica pasa por los puntos (1, 2), (2, 1) y (3, 4).

Solución:

Si un punto pertenece a una parábola, se deduce que cumple su ecuación. Por tanto:



Si (1, 2) es de la parábola: $2=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c \Rightarrow a+b+c=2$.

Si (2, 1) es de la parábola: $1=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c \Rightarrow 4a+2b+c=1$.

Si (3, 4) es de la parábola: $4=a\cdot 3^2+b\cdot 3+c \Rightarrow 9a+3b+c=4$.

Esto es: $\left\{\begin{array}{l} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=1 \\ 9a+3b+c=4 \end{array}\right.$.

Por Gauss:

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=1 \\ 9a+3b+c=4 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-E1 \end{matrix}\left\{\begin{array}{l} a+b+c=2 \\ 3a+b=-1 \\ 8a+2b=2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-2E2 \end{matrix}\left\{\begin{array}{l} a+b+c=2 \\ 3a+b=-1 \\ 2a=4 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} c=7 \\ b=-7 \\ a=2 \end{array}.$$

La ecuación de la parábola es: $y=2x^2-7x+7$.

27. Se desea preparar una dieta a base de tres alimentos básicos, [1], [2] y [3]. La dieta debe incluir exactamente 340 unidades de calcio, 180 unidades de hierro y 220 unidades de vitamina A. El número de unidades de cada ingrediente por cada paquete de alimentos se indica en la tabla adjunta. ¿Cuántos paquetes de cada alimento deben emplearse para conseguir la dieta requerida?

	Unidades por paquete		
Alimento	[1]	[2]	[3]
Calcio	30	10	20
Hierro	10	10	20
Vitamina A	10	30	20

Solución:
Sean *x*, *y*, *z* el número de paquetes necesarios de los alimentos [1], [2] y [3], respectivamente.
Debe cumplirse que:

$$\begin{cases} 30x+10y+20z=340 \\ 10x+10y+20z=180 \\ 10x+30y+20z=220 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} 30x+10y+20z=340 \\ -20x=-160 \\ -20x+20y=-120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=4 \\ x=8 \\ y=2 \end{cases}.$$

Deben emplearse 8 paquetes del [1], 2 paquetes del [2] y 4 paquetes del [3].

28. Una persona dispone de 21000 euros para invertir en bonos, fondos de inversión y acciones. La rentabilidad media de esos activos es de un 5, 6 y 10 %, respectivamente. El inversor quiere invertir en acciones el doble que en bonos, y conseguir una rentabilidad media del 7 %. ¿Cuánto ha de invertir en cada uno de esos bienes?
Solución:
Sean *x*, *y*, *z* las cantidades a invertir en bonos, fondos y acciones, respectivamente.
Debe cumplirse que:

Total de dinero: $x+y+z=21000$.

Rentabilidad prevista y deseada: $0{,}05x+0{,}06y+0{,}10z=0{,}07\cdot 21000$.

Inversión en acciones: $z=2x$.

Las tres ecuaciones originan un sistema que, resuelto por Gauss, proporciona la cantidad a invertir en cada bien:

$$\begin{cases} x+y+z=21000 \\ 0{,}05x+0{,}06y+0{,}10z=1470 \\ 2x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=21000 \\ 5x+6y+10z=147000 \\ 2x-z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-5E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=21000 \\ y+5z=42000 \\ -2y-3z=-42000 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3+2E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=21000 \\ y+5z=42000 \\ 7z=42000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3000 \\ y=12000 \\ z=6000 \end{cases}.$$

Hay que invertir: 3000 € en bonos; 12000 € en fondos; 6000 € en acciones.

29. Una persona decide invertir una cantidad de 12000 € en bolsa, comprando acciones de tres empresas distintas A, B y C. Invierte en A el doble que en B y C juntas. Transcurrido un año, las acciones de la empresa A se han revalorizado un 4 %, las de B un 5 % y las de C han perdido un 2 % de su valor original. Como resultado de todo ello, Juan ha obtenido un beneficio de 432,5 €. Determina cuánto invirtió en cada una de las empresas.
Solución:
Sean *x*, *y*, *z* la cantidad invertida en acciones de las empresas A, B y C, respectivamente.
Debe cumplirse que:

$$\begin{cases} x+y+z=12000 \\ x=2(y+z) \\ 0,04x+0,05y-0,02z=432,5 \end{cases}.$$

Puede resolverse por sustitución (la x de la segunda ecuación se sustituye en las otras dos).

$$\begin{cases} 2(y+z)+y+z=12000 \\ 0,04\cdot 2(y+z)+0,05y-0,02z=432,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=4000 \\ 13y+6z=43250 \end{cases} \underset{E2-6E1}{\Rightarrow} \begin{cases} y+z=4000 \\ 7y=19250 \end{cases}.$$

Despejando:

y = 2750 €; z = 1250 €; x = 8000 €.

30. (Propuesto en Selectividad 2015, Asturias). Luis tiene ahora mismo m veces la edad de Javier. Dentro de m años, Luis tendría el triple de años que Javier.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean la edad de Luis y de Javier, respectivamente. Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que Luis tenga ahora mismo el triple de años que Javier?

b) Resuelve el sistema para m = 5. ¿Cuántos años tiene Luis en este caso?

Solución:

a) En la siguiente tabla se resumen los datos y las relaciones existentes:

Edades	Luis	Javier	Relación entre edades
Ahora	x	y	$x=my$
Dentro de m años	$x + m$	$y + m$	$x+m=3(y+m)$

Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x=my \\ x+m=3(y+m) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-my=0 \\ x-3y=2m \end{cases}.$$

Restando las ecuaciones: $(m-3)y=2m \Rightarrow y=\dfrac{2m}{m-3}$, que solo tiene sentido si $m \neq 3$. Por tanto, Luis no puede tener ahora mismo el triple de años que Javier.

b) Si m = 5 $\Rightarrow$ $y=\dfrac{2\cdot 5}{5-3}=5$ $\Rightarrow x$ = 25.

31. (Propuesto en Selectividad, Cataluña, septiembre 16)

María tiene el doble de dinero que Pol y Júlia juntos. Pol tiene la sexta parte de dinero que María. Júlia tiene el doble de dinero que Pol. María tiene el triple de dinero que Júlia.

a) Con estos datos, ¿podemos saber cuánto dinero tiene cada uno de ellos? Halle el conjunto de soluciones posibles.

b) Si Pol tiene 35 €, ¿cuánto dinero tienen María y Júlia?

Solución:

a) Si María tiene x euros, Pol, y euros, y Júlia, z euros, con los datos del problema debe cumplirse las ecuaciones:

$$\begin{cases} x=2(y+z) \\ z=2y \\ x=3z \end{cases}$$ → Sustituyendo las ecuaciones 2ª y 3ªb en la primera se tiene que:

$x=2(y+z) \Rightarrow x=2y+2z \rightarrow 3z=z+2z$, que resulta una identidad: se cumple para cualquier valor de z.

También podría verse que el sistema es indeterminado, pues:

$$\begin{cases} x = 2(y+z) \\ z = 2y \\ x = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=0 \\ 2y-z=0 \\ x-3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x-2y-2z=0 \\ 2y-z=0 \\ 2y-z=0 \end{cases} \to \text{hay dos ecuaciones}$$

repetidas.
b) Conociendo que Pol tiene 35 €, Júlia tendrá 70 €; y María, 210 €.

32. (Propuesto en Selectividad, Castilla La Mancha, septiembre 16). He comprado 5 kg de almendras, 3 kg de avellanas y 2 kg de cacahuetes, y he pagado por todo ello 98 euros. La diferencia entre el precio por kg de las avellanas y de los cacahuetes, es igual al precio por kg de las almendras. Si hubiera comprado 1 kg de cada fruto seco, hubieras pagado 32 euros.
a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio por kg de cada fruto seco.
b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.
Solución:
a) Sean *x*, *y* y *z*, los precios por kilo de almendras, avellanas y cacahuetes, respectivamente. Deben cumplirse las ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x+3y+2z=98 \\ y-z=x \\ x+y+z=32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+3y+2z=98 \\ x-y+z=0 \\ x+y+z=32 \end{cases}.$$

b) Puede resolverse aplicando transformaciones de Gauss.

$$\begin{cases} 5x+3y+2z=98 \\ x-y+z=0 \\ x+y+z=32 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1-2E2 \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} 3x+5y=98 \\ x-y+z=0 \\ 2y=32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+5\cdot 16=98 \to x=6 \\ x-16+z=0 \to z=10 \\ y=16 \end{cases}.$$

33. (Propuesto en Selectividad en 2000, Andalucía). Dado un número de tres cifras *ABC*, se sabe que la suma de sus cifras es 16. Por otra parte, si se permutan las centenas con las unidades, se obtiene el número inicial incrementado en 198. Si en el número inicial se permutan decenas con unidades, se obtiene el inicial disminuido en 27. Plantea el sistema de ecuaciones lineales que conduzca a la obtención de las cifras del citado número.
Solución:
El número *ABC* = *A* centenas + *B* decenas + *C* unidades = 100*A* + 10*B* + C.
Se sabe que la suma de sus cifras es 16: *A* + *B* + *C* = 16.
Si se permutan las centenas con las unidades: $ABC \to CBA$: el número se incrementa el 198.
Se cumple: *CBA* = *ABC* + 198.
Luego, $100C + 10B + A = 100A + 10B + C + 198 \Rightarrow 99C - 99A = 198 \Leftrightarrow C - A = 2$.
Si se permutan las decenas con las unidades: $ABC \to ACB$: el número disminuye en 27.
Se cumple: *ACB* = *ABC* – 27.
Por tanto, $100A + 10C + B = 100A + 10B + C - 27 \Rightarrow 9C - 9B = -27 \Leftrightarrow C - B = -3$.
Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} A+B+C=16 \\ 99C-99A=198 \\ 9C-9B=-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=16 \\ C-A=2 \\ C-B=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=16 \\ A=C-2 \\ B=C+3 \end{cases}.$$

Sustituyendo los valores de *A* y *B* en la primera ecuación se tiene:

$C-2+C+3+C=16 \Rightarrow 3C=15 \Rightarrow C = 5$; $A = 3$; $B = 8$.

El número dado es el 385.