TEMA 2. Determinantes
Problemas Resueltos

Cálculo de determinantes

1. Halla el valor de los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ c) $|C| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -7 & 2 \end{vmatrix}$

Solución:
a) Se desarrolla por la primera fila.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -4 - 15 + 3 \cdot (+8) = 5.$$

b) Se desarrolla por la primera fila.

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-3) + 2 \cdot (+2) + 3 \cdot 15 = 58.$$

c) $|C| = 0$, pues tiene dos columnas iguales.

2. Halla el valor del parámetro para que cada determinante tome el valor que se indica:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & m \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ c) $|C| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & k & 3 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = 1$

Solución:
a) Desarrollando por la primera columna:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & m \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \Rightarrow 4 - 3m = 7 \Rightarrow m = -1.$$

b) Desarrollando por la primera fila:

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2a + 6 = 0 \Rightarrow a = 3.$$

c) El valor de $|C|$ es el producto de los elementos de la diagonal principal, luego $4k^2 = 1$ y, por tanto, $k = \pm\dfrac{1}{2}$.

3. Sean $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 6\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$. Calcula $A\cdot B$, $|A|$, $|B|$, $|A|\cdot|B|$ y $|A\cdot B|$.

Solución:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -12 & 18\end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 6\end{vmatrix}=12\,;\ |B|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=3-2=1 \Rightarrow |A|\cdot|B| = 12\cdot 1 = 12.$$

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}4 & -5\\ -12 & 18\end{vmatrix}=4\cdot 18-(-5)\cdot(-12)=72-60=12\,.$$

Como puede observarse, $|A|\cdot|B| = |A\cdot B|$.

4. Sean $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 6\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

a) Calcula $A\cdot B$, $B\cdot A$, $A^t\cdot B^t$, $B^t\cdot A^t$.

b) Comprueba que $|A|=|A^t|$, $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$. ¿Se cumple también que $|A^t\cdot B^t|=|A^t|\cdot|B^t|$?

Solución:

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -12 & 18\end{pmatrix}$; $\quad B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -7\\ -4 & 20\end{pmatrix}$.

$A^t\cdot B^t=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -7 & 20\end{pmatrix}$; $\quad B^t\cdot A^t=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -12\\ -5 & 18\end{pmatrix}$.

Puede observarse que se cumplen las propiedades: $(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$ y $(B\cdot A)^t = A^t\cdot B^t$.

b) $|A^t|=\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 6\end{vmatrix}=12=|A|$. También se cumple que $|B^t|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=3-2=1=|B|$.

En el problema anterior se ha observado que, efectivamente, $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$.

También se cumple que $|A^t\cdot B^t|=|A^t|\cdot|B^t|$, pues se trata de una propiedad general.

En efecto: $|A^t\cdot B^t|=\begin{vmatrix}2 & -4\\ -7 & 20\end{vmatrix}=2\cdot 20-(-4)\cdot(-7)=40-28=12$; y $|A^t|\cdot|B^t|=12\cdot 1=12$.

5. Halla el valor de los siguientes determinantes (pregúntate si es necesario desarrollarlos):

a) $|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & -3\end{vmatrix}$ $\quad$ b) $|B|=\begin{vmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\end{vmatrix}$ $\quad$ c) $|C|=\begin{vmatrix}-4 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -5 & 1 & -2\end{vmatrix}$

Solución:

Como las matrices *A* y *C* son diagonales, sus determinantes se obtienen multiplicando los elementos de la diagonal:

$$|A|=1\cdot 4\cdot(-3)=-12\,;\quad |C|=(-4)\cdot 2\cdot 1\cdot(-2)=16\,.$$

Para calcular $|B|$ puede aplicarse la regla de Sarrus: $|B|=-(-3\cdot 1\cdot 3)=9$.

6. Halla, desarrollándolo por la fila 2ª y por la columna 4ª, el valor del determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comprueba que el resultado es el mismo.

Solución:

Por la fila 2ª:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ \boxed{-2} & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\boxed{(-2)}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}\boxed{-1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

= [2 · (–6) · (–6)] – [(–6) · 18] = 180.

Por la columna 4ª:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & \boxed{6} \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{-6}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6\cdot\big(3\cdot(-4)+2\cdot(-5)+1\cdot(-8)\big) = -6\cdot(-30) = 180\,.$$

<u>**Uso de las propiedades de los determinantes**</u>

7. Utilizando las propiedades de los determinantes, calcula $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & 2x+5 & 2x+6 \end{vmatrix}$.

Solución:

Restando la primera fila a las otras dos, queda:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & 2x+5 & 2x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & x+4 & x+4 \end{vmatrix} = 0,$$ pues tiene dos filas proporcionales.

8. Utilizando trasformaciones de Gauss, halla el valor del determinante de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Haciendo transformaciones que se indican, se tiene.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ F2+2F1 \\ F3-2F1 \\ F4-3F1 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Se ha desarrollado por $C1$.

9. Calcula el valor $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \end{vmatrix}$.

Solución:
Hay diferentes formas de hacerlo, pero en todas deben aplicarse algunas transformaciones de Gauss. Aquí, si se resta la cuarta columna a las otras tres, queda:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = \text{(Por } F1\text{)} = -1\cdot\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2 b .$$

10. Demuestra, sin desarrollarlos, pero haciendo las transformaciones de Gauss necesarias, que el valor de cada uno de los siguientes determinantes es cero.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 2 & b & a+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+b \\ b & 1 & a \\ a-b & a-b & a^2-b^2 \end{vmatrix}$

Solución:
En cada caso se hace lo que se indica.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F2-2F1 \\ F3-3F1 \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 0$, pues tiene dos filas proporcionales.

b) $\begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 2 & b & a+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F2-F1 \\ F3-F1 \end{matrix}\begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 0 & b-a & a-b \\ 0 & c-a & a-c \end{vmatrix} = 0$, pues tiene dos filas proporcionales.

Se puede ver que $(b-a)F3 = (c-a)F2$.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+b \\ b & 1 & a \\ a-b & a-b & a^2-b^2 \end{vmatrix}$ = (se extrae el factor $a-b$ de $F3$) = $(a-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+b \\ b & 1 & a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$ = 0, pues tiene dos filas iguales.

11. Sean A y B matrices cuadradas de orden 3 tales que $|A| = 4$ y $|B| = -1$. Halla cuando sea posible el valor de los siguientes determinantes:

$|A\cdot B|$, $|2A|$, $|A^2|$, $|A^{-1}|$, $|B^{-1}|$, $-5|B|$, $|-5B|$, $|A|+|B|$, $|A+B|$.

Solución:
Aplicando las propiedades:

$|A\cdot B| = |A|\cdot|B| = 4\cdot(-1) = -4$; $|2A| = 2^3\cdot|A| = 8\cdot 4 = 32$; $|A^2| = (|A|)^2 = 4^2 = 16$.

Como $|I| = |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$.

Igualmente: $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{-1} = -1$.

$\to -5|B| = -5 \cdot (-1) = 5$; $|-5B| = (-5)^3 \cdot |B| = -125 \cdot (-1) = 125$.

$\to |A| + |B| = 4 + (-1) = 3$.

El valor de $|A+B|$ no puede saberse. No hay ninguna propiedad que facilite su cálculo

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Como se puede comprobar de manera inmediata se cumple que: $|A| = 4$; $|B| = -1$;

$|A+B| = 0$.

El lector interesado puede buscar otras dos matrices *A* y *B* que cumplan que $|A| = 4$, $|B| = -1$ y den un resultado distinto para $|A+B|$.

12. Sabiendo que el determinante de una matriz cuadrada *A* vale 3 y que el determinante de la matriz 2 · *A* vale 48. ¿Cuál es el orden de la matriz *A*?

Solución:

Se sabe que $|k \cdot A| = k^n |A|$, para *A* una matriz de orden *n*. Por tanto, como:

$|2 \cdot A| = 2^n |A| = 48 = 2^4 \cdot 3 \Rightarrow n = 4$.

La matriz será de orden 4.

13. Si *A* es una matriz de orden 2 tal que su determinante vale 5: $|A| = 5$, cuánto vale:

a) $|A^{-1}|$ b) $|3 \cdot A|$ c) $3|A|$

Solución:

a) Se sabe que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, para *A* y *B* matrices del mismo orden.

Por tanto, como:

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow 5 \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{5}.$$

b) $|3 \cdot A| = 3^2 |A| = 3^2 \cdot 5 = 45$.

c) $3 \cdot |A| = 3 \cdot 5 = 15$.

14. Supuesto que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & -5 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$, calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2a & -2b & 2c \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -5 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 7 & 14 & 7 \\ -10 & 20 & 20 \\ 3b & 6a & 3c \end{vmatrix}$

Solución:
El objetivo es escribir cada determinante en función del supuesto dado, que es el *modelo* dado. Para ello se utilizan las propiedades de los determinantes, y se comparando en cada paso el determinante obtenido con el dado.

a) $\begin{vmatrix} 2a & -2b & 2c \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -5 & 5 \end{vmatrix}$ = (se extraen los factores, 2 de $F1$ y 5 de $F3$) = $2·5·\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$\to$ Se observa que, en el modelo dado, en $F2$ aparece 5, –5, 10 $\to$

= (se introduce el factor 5 en $F2$) = $2·\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 5 & 5 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$\to$ Se observa que, en el modelo dado, en $C2$ los signos están cambiados $\to$

= (se extrae el factor –1 de $C2$) = $-2·\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & -5 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2·\dfrac{3}{4} = -\dfrac{3}{2}$.

b) $\begin{vmatrix} 7 & 14 & 7 \\ -10 & 20 & 20 \\ 3b & 6a & 3c \end{vmatrix}$ = (se extrae: 7 de $F1$, 2 de $F2$ y 3 de $F3$) = $7·2·3·\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & 10 & 10 \\ b & 2a & c \end{vmatrix} =$

= (se cambian de orden las filas: $F1$ por $F3$) = $-7·2·3·\begin{vmatrix} b & 2a & c \\ -5 & 10 & 10 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$

= (se cambian de orden las columnas: $C1$ por $C2$) = $+7·2·3·\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 10 & -5 & 10 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

= (se extrae el factor 2 de $C1$) = $+7·2·3·2·\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & -5 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7·2·3·2·\dfrac{3}{4} = 63$.

Rango de una matriz

15. Determina, por menores, el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:
a) Como el menor $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow$ Rango de $A \geq 2$.

Sea hace el determinante de A: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 14 + 12 = 0$. Como vale 0, el rango no puede ser 3. Por consiguiente, rango de A = 2.

b) $|B| = 0 \Rightarrow$ rango(B) < 3.

Como el menor $|B_1| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow$ Rango de B = 2.

c) Es evidente que rango de $C \geq 2$. Hay varios menores de orden 2 distintos de 0.
En la matriz dada se pueden considerar 4 menores de orden 3: uno por cada columna que se excluya.

El menor $|C_1| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0 \to$ Con este menor el rango no aumenta.

Si ese menor vale 0 $\Rightarrow$ existe una combinación lineal de columnas. Por tanto, puede suprimirse una de ellas a efectos del cálculo del rango. (En este caso, hay que suprimir la 1ª o la 3ª, pues son proporcionales).

Si se suprime la 3ª, queda el menor $|C_2| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$.

Por tanto, el rango de C = 3.

16. Determina el rango de las siguientes matrices en función del parámetro.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a+1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{pmatrix}$

<u>Solución</u>:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a - 6 \to |A| = 0$ si a = 6; $|A| \neq 0$ cuando $a \neq 6$.

Por tanto: rango(A) = 1 si a = 6; rango(A) = 2 si $a \neq 6$.

b) $|B| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ a+1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - a - 1 = a - 1 \to |B| = 0$ si a = 1; $|B| \neq 0$ cuando $a \neq 1$.

Por tanto: rango(B) = 1 si a = 1; rango(A) = 2 si $a \neq 1$.

c) $|C| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 2 \to |A| \neq 0$ independientemente del valor que tome cuando a.

Por tanto, el rango(A) siempre es 2.

d) $|D| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{vmatrix} = a^2 - 4 \to |D| = 0$ si a = ±2; $|A| \neq 0$ cuando $a \neq \pm 2$.

Por tanto: rango(D) = 1 si a = ±2; rango(D) = 2 si $a \neq -2$ y $a \neq 2$.

17. Determina el rango de las siguientes matrices en función del parámetro.

a) $A=\begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ 3 & k & 0 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} k & 1-k & 2-k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Solución</u>:

a) $|A|=\begin{vmatrix} k & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ 3 & k & 0 \end{vmatrix}=k\left(k^2-9\right) \Rightarrow |A|\neq 0$ cuando $k\neq 0$, -3 y 3; $|A|=0$ si $k = 0$, -3 o 3.

Por tanto:

- Si $k\neq 0$, -3 y 3, el rango de A será 3. Para k = 0, -3 o 3 el rango será menor que 3.
- Si $k = 0$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & \cancel{0} \\ 3 & 2 & \cancel{0} \\ 3 & 0 & \cancel{0} \end{pmatrix} \to$ su rango es 2. El menor $|A_1|=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=-9\neq 0$.
- Si $k = -3$, $A=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ \cancel{3} & \cancel{-3} & \cancel{0} \end{pmatrix} \to$ su rango es 2. El menor $|A_2|=\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-15\neq 0$.
- Si $k = 3$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{0} \end{pmatrix} \to$ su rango es 2. El menor $|A_3|=\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-3\neq 0$.

a) $|A|=\begin{vmatrix} k & 1-k & 2-k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & k \end{vmatrix} \overset{(F1+F2)}{=} \begin{vmatrix} 2k & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & k \end{vmatrix}=2k(k-1)+2(1-k)=2(k-1)^2$.

Por tanto:

- Si $k\neq 1$, el rango de A será 3, pues $|A|\neq 0$.
- Si $k = 1$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix} \to$ su rango es 2. El menor $|A_1|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$.

c) El rango de A es como máximo igual a 3: la matriz A tiene 3 filas.

Se considera el menor, $|A_1|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2-2k$. Su valor es 0 si k = 1.

Para ese valor de k = 1, la matriz será: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como tiene dos filas iguales, su rango será 2.

Por tanto: si $k\neq 1$, rango(A) = 3; si k = 1, rango(A) = 2.

18. Calcula el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{pmatrix}$.

Solución:
El rango de una matriz es el número de filas linealmente independientes de esa matriz.
También es igual al orden del mayor menor no nulo.
Haciendo las transformaciones de Gauss que se indican, se tiene:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{pmatrix} \to \begin{matrix} \\ F2-2F1\\ F3-3F1\\ F4-4F1\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 0\\ 6 & 4 & 2 & 0\\ 9 & 6 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Como las filas 2ª, 3ª y 4ª son proporcionales, el rango de A es 2. (Todos los menores de orden 3 serán nulos. El menor $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-4\neq 0$).

Matriz inversa

19. Aplicando la fórmula $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\left(A_{ij}\right)^t$ calcula la inversa de las siguientes matrices, si existe.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=5-6=-1$. Adjunta: $\left(A_{ij}\right)=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}5 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

b) $|B|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}=6+2=8$. Adjunta: $\left(B_{ij}\right)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/4 & -1/8\\ 1/4 & 3/8\end{pmatrix}$.

c) $|C|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=6-6=0 \Rightarrow$ la matriz C no es invertible.

20. Aplicando la fórmula $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\left(A_{ij}\right)^t$ calcula la inversa de las siguientes matrices, si existe.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$. Adjunta: $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = (A_{ij})^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Puede comprobarse que $A \cdot A^{-1} = I$.

En efecto: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1-1 & -1+1 & -1+1 \\ 1-1 & 1 & -1+1 \\ 1+1-2 & -1+1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 3 = -4$. Adjunta: $(B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

c) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 - 2 = 0 \Rightarrow$ la matriz C no tiene inversa.

21. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$, halla:

a) Los valores de a para los que la matriz A posea inversa.
b) La inversa de A para $a = 2$.

<u>Solución</u>:

a) La matriz A posee inversa cuando su determinante sea distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 4a - 3 = 0 \Rightarrow a = 1,\ a = 3$$

Por tanto, la matriz A posee inversa cuando $a \neq 1$ y $a \neq 3$.

b) Para $a = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $|A| = 1$.

La matriz inversa viene dada por $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de A.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

22. a) Despeja la matriz *X* en función de *A* e *I* en la ecuación $(X+A)^2 = X^2 + X\cdot A + I$, siendo *X*, *A* e *I* matrices cuadradas del mismo orden dos, e *I* la matriz identidad.

b) Resuelve la ecuación $A\cdot X + A^2 = I$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; *X* e *I* de orden 2.

Solución:

a) Operando se tiene:

$$(X+A)^2 = X^2 + X\cdot A + I \Rightarrow (X+A)\cdot(X+A) = X^2 + X\cdot A + I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cancel{X^2} + A\cdot X + \cancel{X\cdot A} + A^2 = \cancel{X^2} + \cancel{X\cdot A} + I \Rightarrow A\cdot X + A^2 = I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A\cdot X = I - A^2 \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\left(I - A^2\right) \Rightarrow X = A^{-1} - A$$

b) De $A\cdot X + A^2 = I \Rightarrow A\cdot X = I - A^2 \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\left(I - A^2\right) \Rightarrow X = A^{-1} - A$

La inversa de *A* es, $A^{-1} = \dfrac{\left(A_{ij}\right)^t}{|A|}$, siendo $\left(A_{ij}\right)$ la matriz de los adjuntos de *A*.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ y $\left(A_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

23. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores del parámetro *k* para los que *A* tiene inversa.

b) Para *k* = 0, calcula la matriz *X* que verifica $X\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) La matriz *A* tiene inversa cuando su determinante es distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = k^2 - 1 \Rightarrow |A| = 0 \text{ si } k = -1 \text{ o } +1$$

Por tanto, la matriz *A* tendrá inversa cuando $k \neq \pm 1$.

b) Si *k* = 0, la matriz tundra inversa, luego $X\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot A^{-1}$

Si *k* = 0, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Su inversa es $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo $\left(A_{ij}\right)$la matriz de los adjuntos de *A*: $|A| = -1$; $\left(A_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Luego,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

24. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$, encuentra una matriz simétrica *P* no singular tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Solución:

Si *P* es simétrica y no singular significa que $P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ y que $|P| \neq 0$.

De $B = P^{-1} \cdot A \cdot P \Rightarrow$ (multiplicando por la izquierda por *P*) $\Rightarrow P \cdot B = A \cdot P$.

Por tanto, debe cumplirse que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4a+6b & -3a-5b \\ 4b+6d & -3b-5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a-6b & 4b-6d \\ 3a-5b & 3b-5d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a+6b = 4a-6b \\ -3a-5b = 4b-6d \\ 4b+6d = 3a-5b \\ -3b-5d = 3b-5d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b = -3b \to b = 0 \\ a = 2d \end{cases} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ con } a \neq 0.$$

25. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ x & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$:

a) ¿Existe algún valor de $x \in \mathbf{R}$ para el que *A* no tenga inversa?

b) Calcula, en caso de que sea posible, la matriz inversa de A^2 para $x = 0$.

Solución:

a) La matriz *A* no tendrá inversa cuando su determinante valga 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ x & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - x^2 \Rightarrow |A| \neq 0 \text{ para todo } x \in \mathbf{R}.$$

Por tanto, la matriz *A* tendrá inversa siempre.

b) Para $x = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -1$.

Su inversa es $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^t$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de *A*.

La matriz de los adjuntos es:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz inversa de A^2 será $\left(A^{-1}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Otra alternativa es calcular A^2 y hacer la inversa después.

Otros problemas

26. Sea la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & t & t \\ -1 & t & -1 \end{pmatrix}$.

a) Halla su rango en función del valor de t.
b) Calcula su inversa para el valor o valores de t para los que el determinante de esa matriz vale 1.
Solución:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & t & t \\ -1 & t & -1 \end{vmatrix} = -t - t^2 - t = -t(t+2) \Rightarrow$ Si $t \neq 0$ y $t \neq -2$, el determinante es distinto de 0.

Por tanto:

- Si $t \neq 0$ y $t \neq -2 \Rightarrow$ su rango es 3.
- Si $t = 0$ la matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: su rango es 2, pues la fila 1ª y 3ª son l.i.
- S $t = -2$ la matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. También con rango 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

b) El determinante vale 1 cuando $-t^2 - 2t = 1 \Rightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t+1)^2 = 0 \Rightarrow t = -1$.

Para $t = -1$, la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Su inversa será: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

27. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = A - kI$, donde k es una constante e I es la matriz identidad de orden 2.

a) Determina los valores de k para los que B no tiene inversa.
b) Calcula B^{-1} para $k = -1$.
Solución:

a) $B = A - kI = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-k & 1 \\ 2 & -1-k \end{pmatrix}$.

La matriz no tendrá inversa cuando su determinante valga 0.

$$\begin{vmatrix} -3-k & 1 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix} = (-3-k)(-1-k)-2=0 \Rightarrow k^2+4k+1=0 \Rightarrow k=-2+\sqrt{3} \text{ o } k=-2-\sqrt{3}$$

b) Si k = –1, la matriz es $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; que tiene inversa, pues $|B|=-2$.

Su inversa es $B^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

28. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde λ es un número real.

Encuentra los valores de λ para los que la matriz *AB* tiene inversa.
<u>Solución</u>:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Para que tenga inversa es necesario que $|AB|\neq 0$.

Como $\begin{vmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix}=2\lambda^2+3\lambda-2=0$ si $\lambda=\frac{1}{2}$ o $\lambda=-2 \Rightarrow$ la matriz *AB* tendrá inversa cuando $\lambda\neq -2$ y $\lambda\neq 1/2$.

29. Una matriz *A* es ortogonal cuando $A\cdot A^t=I$. Demuestra que el determinante de una matriz ortogonal vale 1 o –1.
<u>Solución</u>:
Se sabe que para un par de matrices A y B, multiplicables, se cumple que $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$. Por tanto, si $A\cdot A^t=I \Rightarrow |A\cdot A^t|=|A|\cdot|A^t|=|I|=1$.

Como, además, $|A|=|A^t| \Rightarrow |A|^2=1 \Rightarrow |A|=\sqrt{1}=\pm 1$.

30. a) ¿Para qué valores de *x* tiene inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ x & 1 \end{pmatrix}$?

b) Para *x* = –1, calcula la matriz *X* que cumple la ecuación matricial $A\cdot X-2\cdot I=O$, donde *I* es la matriz unidad y *O* la matriz nula de orden 2.
<u>Solución</u>:

a) La matriz $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ tendrá inversa cuando su determinante sea distinto de 0.

$$|A|=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ x & 1 \end{vmatrix}=-2-3x \Rightarrow -2-3x=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3} \rightarrow \text{La matriz tiene inversa si } x\neq -\frac{2}{3}.$$

b) Para *x* = –1 la matriz es $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; y tiene inversa: $|A|=-2+3=1$.

Por tanto:

$A\cdot X-2\cdot I=O \Rightarrow A\cdot X=2\cdot I \Rightarrow X=A^{-1}\cdot(2I) \Rightarrow X=2A^{-1}$.

Cálculo de la inversa.

$$A^{-1}=\frac{(A_{ij})^t}{|A|} \to (A_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow (A_{ij})^t=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Luego:

$$X=2A^{-1} \Rightarrow X=2\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 2 & -4\end{pmatrix}.$$

31. Determina el rango de $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 1\\ k & k & 3 & -1\\ -1 & 3 & 3 & 0\end{pmatrix}$ dependiendo de los valores del parámetro *k*.

Solución:

Inicialmente no se ven combinaciones lineales entre filas o columnas: la aparición del parámetro lo complica.

Si se desea, y es factible, puede convenir transformar la matriz dada. Aquí se resta la columna 4ª a las demás, como se indica.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 1\\ k & k & 3 & -1\\ -1 & 3 & 3 & 0\end{pmatrix} \to \begin{matrix}C1-C4\\ C2-3C4\\ C3-3C4\end{matrix} \to \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ k+1 & k+3 & 6 & -1\\ -1 & 3 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Obviamente hay menores de orden 2 que son distintos de cero. Por ejemplo $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 6 & -1\end{vmatrix}$.

Menores de orden 3:

$\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ k+1 & 6 & -1\\ -1 & 3 & 0\end{vmatrix}=3k+9$, que es nulo si $k=-3$; $\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ k+3 & 6 & -1\\ 3 & 3 & 0\end{vmatrix}=3k-9$, que vale 0 si $k=3$

Por tanto, el rango de *A* siempre será 3, pues para cualquier valor de *k* siempre va a existir un menor de orden 3 distinto de 0. (Si $k=-3$, el 2º menor es distinto de cero; si $k=3$, el primer menor es distinto de cero; si $k\neq\pm3$, ambos menores son no nulos).

32. a) Demuestra que si *A* es una matriz cuadrada tal que $A^2=2A-I$, entonces *A* es invertible. ¿Cuál es la expresión de A^{-1}?

b) Demuestra que la matriz $A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 4 & -1\end{pmatrix}$ verifica la relación $A^2=2A-I$. Utilizando el resultado anterior halla su inversa A^{-1}.

Solución:

a) Si $A^2=2A-I \Rightarrow I=2A-A^2 \Rightarrow I=2\cdot I\cdot A-A\cdot A \Rightarrow I=(2I-A)\cdot A$.

Por tanto, existe una matriz, $2I-A$, que multiplicada por *A* da la identidad. Esa matriz es la inversa de *A*: $A^{-1}=2I-A$.

Para asegurarse que *A* posee inversa hay que comprobar que su determinante es distinto de 0. En efecto: $I=(2I-A)\cdot A \Rightarrow |I|=|(2I-A)|\cdot|A| \Rightarrow 1=|(2I-A)|\cdot|A| \Rightarrow |A|\neq 0$.

b) Comprobación de que $A^2 = 2A - I$.
Por una parte:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Por otra:

$$2A - I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Efectivamente, $A^2 = 2A - I$. Por tanto, $A^{-1} = 2I - A$.
Luego,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

33. Sea *A* una matriz cuadrada que verifica que $A^2 + 2A = I$ e *I* la matriz identidad correspondiente. Demuestra que existe A^{-1} y determínala en función de *A* y de *I*.
Solución:
La matriz *A* es inversible si $|A| \neq 0$.
De $A^2 + 2A = I \Rightarrow A(A + 2I) = I$.
Haciendo el determinante de las matrices de ambos miembros:
$|A(A + 2I)| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |A + 2I| = 1 \to$ Por tanto, $|A| \neq 0$. (Si $|A| = 0$ el producto anterior valdría 0).
Si en $A(A + 2I) = I$ se multiplican ambos miembros por A^{-1}, por la izquierda, se tiene:

$$A^{-1}A(A + 2I) = A^{-1}I \Rightarrow I(A + 2I) = A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = A + 2I.$$

34. Se dice que dos matrices cuadradas, *A* y *B*, de orden n, son semejantes si existe una matriz invertible, *P*, tal que $B = P^{-1}AP$, donde P^{-1} denota la matriz inversa de *P*. Determina si son semejantes las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Solución:
Si las matrices *A* y *B* fuesen semejantes, de $B = P^{-1}AP \Rightarrow PB = AP$ (basta con multiplicar por *P* por la izquierda).
Luego, si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, debe cumplirse que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Multiplicando e igualando:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = a + 2c \\ c = c \end{cases} \to c = 0; \begin{cases} -b = b + 2d \\ -d = d \end{cases} \to d = 0; b = 0.$$

Luego, $P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como esta matriz no es inversible, las matrices *A* y *B* no son semejantes.