TEMA 1. Matrices
Problemas Resueltos

Operaciones con matrices

1. Dadas $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 4 & -9\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-11 & 12\\ -14 & 41\end{pmatrix}$, halla dos números *a* y *b* para que se verifique que $a\cdot A+b\cdot B=C$.

Solución:

Escribiendo la ecuación extendida y operando, se tiene:

$$a\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 7\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}5 & -2\\ 4 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 12\\ -14 & 41\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2a & 3a\\ -a & 7a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5b & -2b\\ 4b & -9b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 12\\ -14 & 41\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2a+5b & 3a-2b\\ -a+4b & 7a-9b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 12\\ -14 & 41\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a+5b=-11 & 3a-2b=12\\ -a+4b=-14 & 7a-9b=41\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-3\end{cases}.$$

Puede comprobarse el resultado:

$$2\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 7\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}5 & -2\\ 4 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -2 & 14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}15 & -6\\ 12 & -27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 12\\ -14 & 41\end{pmatrix}.$$

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, halla otras dos matrices del mismo orden, *X* e *Y*, que cumplan: $\begin{cases}2X-Y=A\\ X+3Y=2B\end{cases}$.

Solución:

Primero conviene resolver el sistema en función de *A* y *B*; después se hacen los cálculos.

Por el método de reducción:

$$\begin{cases}2X-Y=A\\ X+3Y=2B\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}\\ 2E2\end{matrix}\begin{cases}2X-Y=A\\ 2X+6Y=4B\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}\\ E2-E1\end{matrix}\begin{cases}2X-Y=A\\ 7Y=4B-A\end{cases}\Rightarrow Y=\frac{1}{7}(4B-A).$$

Sustituyendo este valor de *Y* en la segunda ecuación inicial, se tiene:

$$X+\frac{3}{7}(4B-A)=2B\Rightarrow X=\frac{3}{7}A+\frac{2}{7}B.$$

Por tanto:

$$X=\frac{3}{7}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}+\frac{2}{7}\cdot\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -18/7\\ 8/7 & -18/7\end{pmatrix};$$

$$Y=\frac{1}{7}\cdot\left[4\cdot\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & -22/7\\ 2/7 & -8/7\end{pmatrix}.$$

3. Para las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, comprueba que se cumplen las siguientes propiedades:

a) $A+(B+C)=(A+B)+C$ b) $A(B+C)=AB+AC$

c) $(A-B)C=AC-BC$ d) $A(BC)=(AB)C$

Solución:

a) $A+(B+C)=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3\\0 & 5\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -2\\3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\5 & 2\end{pmatrix}$.

$(A+B)+C=\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}2 & -3\\0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\5 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3\\0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\5 & 2\end{pmatrix}$.

b) $A\cdot(B+C)=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3\\0 & 5\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\3 & -7\end{pmatrix}$.

$AB+AC=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3\\4 & -11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\3 & -7\end{pmatrix}$

c) $(A-B)C=\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -5\\-2 & 8\end{pmatrix}$.

$AC-BC=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\0 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\4 & -11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 2\\6 & -19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -5\\-2 & 8\end{pmatrix}$.

d) $A(BC)=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\0 & 5\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\6 & -19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\-2 & 23\end{pmatrix}$.

$(AB)C=\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\-2 & 23\end{pmatrix}$.

4. Calcula, si es posible, los productos *AB* y *BA* para las matrices siguientes:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\2 & 0\\4 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\4 & -1 & 3\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\4 & -1\end{pmatrix}$ d) $A=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2\\4 & 1\end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}$ f) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\4 & 0 & -1\\7 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\-1 & 0 & 4\\2 & 0 & -3\end{pmatrix}$

<u>Solución</u>:

a) $AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 4\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}$.

b) $AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\2 & 0\\4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\4 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 1 & 0\\-4 & 0 & 2\\-16 & 2 & -2\end{pmatrix}$;

$BA=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\4 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\2 & 0\\4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\22 & -10\end{pmatrix}$.

c) $AB=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

En este caso puede observarse que $AB = -BA$.

d) $AB=\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ → No puede realizarse. $BA=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ 5\end{pmatrix}$.

e) $AB=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 3\end{pmatrix}=-11$; $BA=\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -12 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 6 & 9 & -3\end{pmatrix}$.

f) $AB=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -1\\ 7 & -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 4\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -2 & -14\\ -2 & -8 & 15\\ 5 & -14 & 6\end{pmatrix}$;

$BA=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 4\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -1\\ 7 & -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -9 & 5\\ 27 & -10 & 1\\ -19 & 5 & 3\end{pmatrix}$.

5. Calcula todos los productos posibles de dos factores con las matrices:

$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\\ 3 & 4\\ -5 & 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

Solución:

Pueden hallarse los productos: $A\cdot C$, $C\cdot A$ y $B\cdot A$.

$A\cdot C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -7 & 6\end{pmatrix}$; $C\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6 & -4\\ -1 & 13 & -8\\ 2 & 7 & -6\end{pmatrix}$.

$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\\ 3 & 4\\ -5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -6 & 4\\ 3 & 9 & -8\\ -5 & 23 & -12\end{pmatrix}$.

6. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, halla los productos AB y BA. Además de que no se cumple la propiedad conmutativa, ¿qué otro comentario puede hacerse?

Solución:

$AB=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 20\\ -5 & 10\end{pmatrix}$.

Además de que no se cumple la propiedad conmutativa, puede observarse la propiedad relativa a divisores de cero: el producto de dos matrices no nulas da la matriz nula.

7. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, comprueba que *AB* = *AC*, y, sin embargo, $B \neq C$.

Solución:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 0 & 10\end{pmatrix}; \quad AC=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 5\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 0 & 10\end{pmatrix}.$$

En efecto, *AB* = *AC*, y, sin embargo, $B \neq C$. Esta advierte que en el cálculo matricial no puede simplificarse.

8. Para la matriz $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & -a\end{pmatrix}$, calcula el valor de *a* para que $A^2 - A=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix}$.

Solución:

$$A^2 - A=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix} \Leftrightarrow A(A-I)=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a-1 & 1\\ 0 & -a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a^2-a & -1\\ 0 & a^2+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a^2-a=12\\ a^2+a=20\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=4; \quad a=-3\\ a=4; \quad a=-5\end{cases}.$$

La única solución común es *a* = 4.

9. a) Halla las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}$ que cumplen que $A^3 = A$.

b) Para esas matrices y para el valor *a* = –2, calcula $A^{10}+A^{11}+A^{12}$.

Solución:

a) $A^2=\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab & 0\\ 0 & ab\end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A=\begin{pmatrix}ab & 0\\ 0 & ab\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a^2b\\ ab^2 & 0\end{pmatrix}$.

Para que $A^3 = A$ es necesario que $\begin{cases}a^2b=a\\ ab^2=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=0; \quad b=0\\ ab=1; \quad b=1/a\end{cases} \to$

La solución *a* = *b* = 0 no tiene interés, pues es evidente.

Por tanto, la matriz pedida es $A=\begin{pmatrix}0 & a\\ 1/a & 0\end{pmatrix}$.

b) Para *a* = –2, se tiene:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1/2 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = A;\ A^4 = I \ldots;\ A^{10} = I;\ A^{11} = A;\ A^{12} = I.$$

Por tanto:

$$A^{10}+A^{11}+A^{12}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1/2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1/2 & 2\end{pmatrix}.$$

10. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, encuentra la expresión general de A^n. ¿Cuál es la matriz $A^{10}-10A$?

Solución:

Segunda y tercera potencias:

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 0 & 1\end{pmatrix};\quad A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3a\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Puede hacerse la conjetura: $A^n=\begin{pmatrix}1 & na\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Es evidente que se cumple para n = 1 (también para n = 2 y n = 3). Supuesto que se cumple hasta n hay que ver que se cumple para el siguiente, para n + 1.

$$A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & na\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a+na\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & (n+1)a\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Por tanto, la conjetura es cierta y puede afirmarse que $A^n=\begin{pmatrix}1 & na\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

En consecuencia,

$$A^{10}-10A=\begin{pmatrix}1 & 10a\\ 0 & 1\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 10a\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10 & 10a\\ 0 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 0\\ 0 & -9\end{pmatrix}.$$

Comprobación de algunas propiedades

11. Una matriz A se llama nilpotente si $A\cdot A\cdot\ldots\cdot A=O$. Comprueba que la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}$ es nilpotente.

Solución:

Multiplicando tres veces se tiene que $A\cdot A\cdot A=A^3=O$.

En efecto:

$$A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 9\\ -1 & -1 & -3\end{pmatrix};$$

$$A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 9\\ -1 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

12. Una matriz A se llama involutiva si cumple que $A^2=A\cdot A=I$. Comprueba que la matriz $A=\begin{pmatrix}7 & 6\\ -8 & -7\end{pmatrix}$ es involutiva.

Solución:

En efecto:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49-48 & 42-42 \\ -56+56 & -48+49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

13. Una <u>matriz</u> A se llama <u>idempotente</u> si cumple que $A^2 = A{\cdot}A = A$. Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ es idempotente.

<u>Solución</u>:

$$A{\cdot}A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4-6 & -2-2+6 & 6+12-24 \\ -2-2+6 & 4+1-6 & -12-6+24 \\ -1-2+4 & 2+1-4 & -6-6+16 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = A.$$

14. Una <u>matriz</u> A se llama <u>periódica</u> de período p si $A^{p+1} = A$. Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es periódica de periodo 3.

<u>Solución</u>:

Hay que ver que se cumple que $A^4 = A$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = A^2{\cdot}A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\rightarrow$ Puede ser interesante comprobar que $A^3 = I$.

15. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula $A{\cdot}B$ y $B{\cdot}A$. ¿Se cumple que $A{\cdot}B = B{\cdot}A$?

b) Comprueba que $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

<u>Solución</u>:

a) $A{\cdot}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B{\cdot}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Es evidente que $A{\cdot}B \neq B{\cdot}A$.

b) Dado que $A{\cdot}B = -B{\cdot}A$ y que $(A+B)^2 = A^2 + A{\cdot}B + B{\cdot}A + B^2 = A^2 - B{\cdot}A + B{\cdot}A + B^2 \Rightarrow$ $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

También puede verse multiplicando.

16. Una <u>matriz</u> A es <u>ortogonal</u> si cumple que $A\cdot A^t = I$; esto es, cuando su inversa coincide con su traspuesta. Halla el valor de a para que sea ortogonal la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

<u>Solución</u>:

$$A\cdot A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

17. Para las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ comprueba las siguientes propiedades:

a) $\left(A^t\right)^t = A$ b) $(A+B)^t = A^t + B^t$ c) $(kA)^t = kA^t$

<u>Solución</u>:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^t\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

b) $A+B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^t = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

c) $kA=\begin{pmatrix} k & -2k \\ 3k & 0 \\ 4k & -5k \end{pmatrix} \Rightarrow (kA)^t = \begin{pmatrix} k & 3k & 4k \\ -2k & 0 & -5k \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = k\cdot A^t$.

18. Para las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ comprueba que $(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$.

<u>Solución</u>:

4) $(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 & -6 \\ 6 & -3 & 0 \\ 28 & 26 & -15 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^t = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 28 \\ 11 & -3 & 26 \\ -6 & 0 & -15 \end{pmatrix};$$

$$B^t A^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 28 \\ 11 & -3 & 26 \\ -6 & 0 & -15 \end{pmatrix}.$$

19. (Propuesto en Selectividad 2006, Castilla y León)

Halla las matrices *A* cuadradas de orden 2, que verifican la igualdad: $A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A$.

Solución:

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se desea que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=a \\ b=b \\ c+d=a+c \\ d=b+d \end{cases} \Rightarrow b=0;\ a=d;\ c=c.$$

La solución del sistema viene en función de dos indeterminadas, *a* y *c*. Luego, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$.

Una de las matrices es $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, que se obtiene dando los valores *a* = 3 y *c* = –2.

Rango de una matriz

20. Utilizando transformaciones de Gauss halla el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to A = \begin{array}{r} \\ F2+2F1 \\ F3-5F1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 \\ \cancel{0} & \cancel{8} & \cancel{-14} \end{pmatrix} \to$ rango = 2.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \to B = \begin{array}{r} \\ F2-2F1 \\ F3-F1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{6} \end{pmatrix} \to$ Su rango es 2.

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to C = \begin{array}{r} \\ F2-2F1 \\ F3+F1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix} \to$ Su rango es 2.

21. Determina, en función de los valores de a, el rango de las matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & a^2\end{pmatrix}$

<u>Solución</u>:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix} \to A=\begin{array}{r} \\ F2-2F1 \\ F3-F1\end{array}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{a-1}\end{pmatrix}$ → el rango es 2 para cualquier valor de a: en todos los casos, las filas 2 y 3 son proporcionales.

b) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix} \to A=\begin{array}{r} \\ F2-F1 \\ F3-F1\end{array}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a-1\end{pmatrix}$ → el rango es 2 si a = 1; es 3 en los demás casos.

c) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & a^2\end{pmatrix} \to A=\begin{array}{r} \\ \\ F3-F1\end{array}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & a^2-1\end{pmatrix}$ → el rango es 2 si $a = \pm 1$; es 3 en los demás casos.

22. Determina, en función de los valores de a, b y c, el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ b+c & a+c & a+b\end{pmatrix}.$$

<u>Solución</u>:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ b+c & a+c & a+b\end{pmatrix} \to A=\begin{array}{r} \\ \\ F3+F2\end{array}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a+b+c & a+b+c & a+b+c\end{pmatrix}$$

Por tanto:
Si a, b y c son iguales (cualquiera que sea su valor) el rango es 1: las tres filas serán proporcionales.
Si a, b y c no son iguales (cualquiera que sea su valor) el rango es 2: las filas 1ª y 3ª siempre son proporcionales.

Inversa de una matriz

23. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, comprueba que su inversa es ella misma; esto es, que $A^{-1}=A$.

<u>Solución</u>:

Para comprobarlo basta con ver que $A\cdot A^{-1}=I$. En efecto, si $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, multiplicando:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-3 & -6+6\\ 2-2 & -3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I\,.$$

24. Halla por dos métodos distintos (directamente y aplicando el método de Gaus–Jordan) la inversa de cada una de las siguientes matrices, si existe.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

Solución:

a) Directamente:

Sea $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3c & b+3d\\ 2a+5c & 2b+5d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+3c=1\\ 2a+5c=0\\ b+3d=0\\ 2b+5d=1\end{cases}\Rightarrow\ a=-5,\ c=2;\ b=3,\ d=-1\to\ A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Por el método de Gauss–Jordan:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 0 & 1\end{array}\right)\to\begin{matrix}\\ F2-2F1\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right)\to\begin{matrix}\\ -F2\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{array}\right)\to$$

$$\to\begin{matrix}F1-3F2\\ \\ \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$$

b) Directamente:

Sea $B^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow B\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+c & 3b+d\\ -2a+2c & -2b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}3a+c=1\\ -2a+2c=0\\ 3b+d=0\\ -2b+2d=1\end{cases}\Rightarrow\ a=1/4,\ c=1/4;\ b=-1/8,\ d=3/8\to\ B^{-1}=\begin{pmatrix}1/4 & -1/8\\ 1/4 & 3/8\end{pmatrix}.$$

Por el método de Gauss–Jordan:

$$(B|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\to\begin{matrix}F1+F2\\ \\ \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\to\begin{matrix}\\ F2+2F1\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 8 & 2 & 3\end{array}\right)\to$$

$$\to\begin{matrix}\\ F2/8\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2/8 & 3/8\end{array}\right)\to\begin{matrix}F1-3F2\\ \\ \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 6/8 & -1/8\\ 0 & 1 & 2/8 & 3/8\end{array}\right)\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1/4 & -1/8\\ 1/4 & 3/8\end{pmatrix}.$$

c) Directamente:

Sea $C^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow C\cdot C^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3c & b+3d\\ 2a+6c & 2b+6d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+3c=1\\ 2a+6c=0\\ b+3d=0\\ 2b+6d=1\end{cases}\to\text{El sistema es incompatible. Esto indica que la matriz no es invertible.}$$

Por el método de Gauss–Jordan:

$$(C|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&6&0&1\end{array}\right)\to\begin{array}{c}\\F2-2F1\end{array}\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&0&-2&1\end{array}\right)$$ $\to$ En la matriz de la izquierda aparece una fila de ceros, lo que significa que la matriz no es invertible.

25. Aplicando el método de Gaus–Jordan halla, cuando exista la inversa de cada una de las siguientes matrices.

a) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\2&1&0\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}$

<u>Solución</u>:

a) $$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right)\to\begin{array}{c}\\\\F3-F1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\to\begin{array}{c}F1-F3\\F2-F3\\\\\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&2&0&-1\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)\to\begin{array}{c}F1-F2\\\\\\\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right).$$

La matriz inversa buscada es $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

b) $$(B|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&-1&0&1&0\\2&1&0&0&0&1\end{array}\right)\to\begin{array}{c}\\F2-F1\\F3-2F1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&-2&-1&1&0\\0&-1&-2&-2&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\to\begin{array}{c}\\\\F3+F2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&-2&-1&1&0\\0&0&-4&-3&1&1\end{array}\right)\to\begin{array}{c}\\\\(F3)/(-4)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&-2&-1&1&0\\0&0&1&3/4&-1/4&-1/4\end{array}\right)\to$$

$$\to\begin{array}{c}F1-F3\\F2+2F3\\\\\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1/4&1/4&1/4\\0&1&0&1/2&1/2&-1/2\\0&0&1&3/4&-1/4&-1/4\end{array}\right)\to\begin{array}{c}F1-F3\\\\\\\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&-1/4&-1/4&3/4\\0&1&0&1/2&1/2&-1/2\\0&0&1&3/4&-1/4&-1/4\end{array}\right).$$

La matriz inversa buscada es $B^{-1}=\begin{pmatrix}-1/4&-1/4&3/4\\1/2&1/2&-1/2\\3/4&-1/4&-1/4\end{pmatrix}$.

c) $$(C|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\-1&2&1&0&1&0\\1&0&3&0&0&1\end{array}\right)\to\begin{array}{c}\\F2+F1\\F3-F1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&1&2&1&1&0\\0&1&2&-1&0&1\end{array}\right)\to$$

Como en la submatriz izquierda aparecen dos filas repetidas, la matriz C no tiene inversa.

26. Calcula la matriz A que haga que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Halla la solución de dos maneras:

1) Sin calcular la matriz inversa; 2) Calculándola.

Solución:

1) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+5b & a+3b \\ 2c+5d & c+3d \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = 2a+5b \\ 3 = a+3b \\ 4 = 2c+5d \\ 2 = c+3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 5 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) De $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = A$.

Cálculo de la inversa:

$$(M|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(F1)/2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2-5F1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{2F2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F1-(F2)/2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) = (I|M^{-1}).$$

Por tanto, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

27. (Propuesto en Selectividad 1997, Madrid)

Calcula los valores del parámetro λ para que la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 5 & -\lambda \end{pmatrix}$ coincida con su opuesta.

Solución:

Si $A^{-1} = -A \Rightarrow A^{-1} \cdot A = -A \cdot A = I \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ -5 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 5 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda^2+10 & 0 \\ 0 & 10-\lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 10-\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 3.$$

Otros problemas

28. Resuelve el sistema $\begin{cases} 2X-3Y = A \\ 3X+4Y = B \end{cases}$, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

Aplicando el método de reducción para la resolución de sistemas:

$$\begin{cases} 2X-3Y = A \\ 3X+4Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ 2E2-3E1 \end{matrix} \begin{cases} 2X-3Y = A \\ 17Y = 2B-3A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17Y = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -9 & -1 & 9 \\ -2 & -7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -9 & -1 & 9 \\ -2 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si se elimina la matriz *Y* se tiene:

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X + 4Y = B \end{cases} \Leftrightarrow_{3E2+4E1} \begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 17X = 3B + 4A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17X = 4\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 12 & 7 & 5 \\ 14 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 12 & 7 & 5 \\ 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

29. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Encuentra el valor de *x* para que $B^2 = A$.

b) Encuentra el valor de *x* para que $A + 2B + C = I$, siendo *I* la identidad de orden 2.

Solución:

a) $B^2 = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -2 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & -4x \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \Rightarrow x = -1.$

b) $A + 2B + C = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x & -4 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2+2x & 0 \\ 0 & 2+2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 + 2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

30. Resuelve la ecuación matricial: $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.

Solución:

Puede hacerse de dos formas.

1) Utilizando la matriz inversa $\to$ $X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

2) Suponiendo que la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \to$

Hay que observar *X* debe ser de dimensión 3 × 2.

Aquí se resolverá de la segunda forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \\ e-f & e+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\begin{cases} a-b=4 \\ a+b=-3 \end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{1}{2}; b=-\dfrac{7}{2}$, $\begin{cases} c-d=0 \\ c+d=5 \end{cases} \Rightarrow c=\dfrac{5}{2}; d=\dfrac{5}{2}$, $\begin{cases} e-f=-1 \\ e+f=7 \end{cases} \Rightarrow e=3; f=4$.

Por tanto, $X=\begin{pmatrix} 1/2 & -7/2 \\ 5/2 & 5/2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

31. Una fábrica de electrodomésticos ha vendido en los últimos tres años lavadoras (*L*) y secadoras (*S*). La matriz *A* expresa las unidades vendidas; la matriz *B* da el precio de venta, en euros, de cada electrodoméstico.

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2013 & 2014 & 2015 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3500 & 7500 & 4200 \\ 2200 & 6000 & 5300 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ L \\ S \end{array} \qquad B=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} L & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 480 & 370 \\ 460 & 360 \\ 500 & 340 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2013 \\ 2014 \\ 2015 \end{array}$$

a) Halla la matriz $B\cdot A$. ¿Cuánto se ingresó cada año por la venta de esos electrodomésticos? ¿Qué elementos de la matriz $B\cdot A$ dan esa información?
b) ¿En qué orden hay que multiplicar las matrices para obtener los ingresos por venta de cada electrodoméstico durante esos tres años? ¿Qué elementos de esa matriz dan esa información?
Solución:

a) $B\cdot A=\begin{pmatrix} 480 & 370 \\ 460 & 360 \\ 500 & 340 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3500 & 7500 & 4200 \\ 2200 & 6000 & 5300 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2494000 & 5820000 & 3977000 \\ 2402000 & 5610000 & 3840000 \\ 2498000 & 5790000 & 3902000 \end{pmatrix}=C$.

En el 2013 ingresó el resultado del elemento $c_{11}=480\cdot3500+370\cdot2200=2494000$ €.
En 2014, $c_{22}=460\cdot7500+360\cdot6000=5610000$ €.
En 2015, $c_{33}=500\cdot4200+340\cdot5300=3902000$ €.
Los demás elementos de la matriz *C* no tienen ningún significado en este contexto.

b) Hay que multiplicar *A* por *B*.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 3500 & 7500 & 4200 \\ 2200 & 6000 & 5300 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 480 & 370 \\ 460 & 360 \\ 500 & 340 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7230000 & 5423000 \\ 6466000 & 4776000 \end{pmatrix}=D.$$

El elemento $d_{11}=3500\cdot480+7500\cdot460+4200\cdot500=7230000$ € da los ingresos obtenidos por la venta de lavadoras en esos tres años.
El elemento $d_{22}=2200\cdot370+6000\cdot360+5300\cdot340=4776000$ € da los ingresos obtenidos por la venta de secadoras en esos tres años.

32. En una prueba de pentatlón, que constan de carreras de 200 y 1500 m, de salto de longitud y lanzamientos de disco y jabalina, de tres atletas *A*1, *A*2 y *A*3 han obtenido las puntuaciones que se indican en la matriz $A=\begin{array}{c} \\ A1 \\ A2 \\ A3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 200 & 1500 & Lon & Dis & Jab \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 6 & 3 & 10 \\ 9 & 6 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$. La ponderación de cada prueba varía según el jurado *Ji* (*i* = 1, 2, 3) que califique, como muestra la matriz $J = \begin{array}{c|ccc} & J1 & J2 & J3 \\ \hline 200 & 2 & 1 & 1,5 \\ 1500 & 2 & 3 & 2 \\ Lon & 2 & 2 & 3,5 \\ Dis & 2 & 2 & 1,5 \\ Jab & 2 & 2 & 1,5 \end{array}$.

¿Cuál sería la puntuación de cada atleta dependiendo de cada jurado? Si la puntuación definitiva se halla sumando las de los tres jurados, ¿cómo se establece el podio de la prueba?

Solución:

La puntuación obtenida por *A*1 según *J*1 es: $8\cdot2+7\cdot2+6\cdot2+5\cdot2+6\cdot2=64$; según el juez *J*2: $8\cdot1+7\cdot3+6\cdot2+5\cdot2+6\cdot2=63$, que son el resultado de multiplicar la primera fila de *A* por la primera y segunda columna de *J*, respectivamente. En los demás casos es análogo.

Por tanto, haciendo el producto

$$A\cdot J=\begin{pmatrix}8&7&6&5&6\\6&4&6&3&10\\9&6&7&2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&1,5\\2&3&2\\2&2&3,5\\2&2&1,5\\2&2&1,5\end{pmatrix}=\begin{array}{c} \\ A1\\A2\\A3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}J1&J2&J3\end{array}\\ \begin{pmatrix}64&63&63,5\\58&56&57,5\\58&55&60,5\end{pmatrix}\end{array}\rightarrow\begin{array}{c}Sumas\\190,5\\171,5\\173,5\end{array}$$

Puede observarse, por ejemplo, que el juez 3, *J*3, daría 1º a *A*1 (63,5), 2º a *A*3 (60,5) y 3º a *A*2 (57,5).

Haciendo las sumas de los tres jueces, el primer puesto será para *A*1, el segundo para *A*3 y el tercero para *A*2.

33. Comprueba que $A^2=2A-I$, siendo $A=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$. Utiliza la igualdad anterior para determinar la inversa de *A* y A^6.

Solución:

Por una parte: $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}$.

Por otra: $2A-I=2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\6&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}$.

Efectivamente $A^2=2A-I$.

Si $A^2=2A-I \Rightarrow I=2A-A^2 \Rightarrow I=(2I-A)\cdot A$.

Por tanto, existe una matriz, $2I-A$, que multiplicada por *A* da la identidad. Esa matriz es la inversa de *A*: $A^{-1}=2I-A$.

Luego, $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}$.

Comprobación: $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$.

Cálculo de A^6:

De $A^2=2A-I \Rightarrow A^4=(2A-I)\cdot(2A-I)=4A^2-4A+I \Rightarrow$ (Se sustituye $A^2=2A-I$)

$\Rightarrow A^4 = 4(2A-I)-4A+I = 4A-3I$.

$A^6 = A^2A^4 = (2A-I)\cdot(4A-3I) = 8A^2-10A+3I \Rightarrow$ (Se sustituye $A^2 = 2A-I$)

$\Rightarrow A^6 = 8(2A-I)-10A+3I = 6A-5I$

Por tanto: $A^6 = 6\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix} - 5\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 18 & 1\end{pmatrix}$.

34. (Propuesto en Selectividad 2016, Andalucía)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}$.

Resuelve la ecuación matricial $A^2\cdot X + C = 2B$.

Solución:

a) Como B y C son matrices de dimensión 2 × 3, para que la operación $A^2\cdot X + C = 2B$ pueda hacerse es necesario que el producto $A^2\cdot X$ sea también una matriz de dimensión 2 × 3; Luego X debe ser de la forma: $X = \begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}$.

La ecuación $A^2\cdot X + C = 2B \Leftrightarrow A^2\cdot X = 2B - C$.

Como:

$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -4\\ 2 & 7\end{pmatrix}.$$

$$\text{y } 2B - C = 2\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -3 & 6\\ 6 & -3 & 4\end{pmatrix}.$$

Se tiene que:

$$A^2\cdot X + C = 2B \Rightarrow A^2\cdot X = 2B - C \Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & -4\\ 2 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -3 & 6\\ 6 & -3 & 4\end{pmatrix}.$$

Multiplicando e igualando:

$$\begin{pmatrix}-a-4d & -b-4e & -c-4f\\ 2a+7d & 2b+7e & 2c+7f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -3 & 6\\ 6 & -3 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-a-4d=5\\ 2a+7d=6\end{cases} \to \begin{cases}a=59\\ d=-16\end{cases};\ \begin{cases}-b-4e=-3\\ 2b+7e=-3\end{cases} \to \begin{cases}b=-33\\ e=9\end{cases};\ \begin{cases}-c-4f=6\\ 2c+7f=4\end{cases} \to \begin{cases}c=58\\ f=-16\end{cases}.$$

La matriz pedida es $X = \begin{pmatrix}59 & -33 & 58\\ -16 & 9 & -16\end{pmatrix}$.

Observación: La matriz X se encuentra con más rapidez aplicando la matriz inversa, pues:

$$A^2\cdot X + C = 2B \Rightarrow A^2\cdot X = 2B - C \Rightarrow X = \left(A^2\right)^{-1}\cdot(2B - C).$$