Programación lineal

Observación: La mayoría de estos problemas se han propuesto en exámenes de selectividad

1. Dibuja la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$x \geq 0, \qquad 0 \leq y \leq 2, \qquad y + 2x \leq 4$

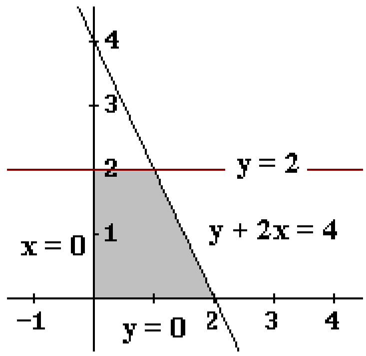
Solución:

Representando las rectas asociadas a cada una de las inecuaciones dadas se obtiene la región sombreada en la figura adjunta.

Se trata de un cuadrilátero de vértices:

O = (0, 0); P = (0, 2); Q = (1, 2); R = (2, 0)

Estos puntos son los de corte de las rectas asociadas a las distintas restricciones.



2. En una pequeña empresa se fabrican sólo dos tipos de aparatos, A y B. Como máximo pueden fabricarse 3 aparatos de cada tipo y, obligatoriamente, al menos uno de tipo B. Se quieren obtener unas ventas superiores a 600 euros, teniendo en cuenta que los precios a los que se venden los artículos A y B son 300 y 100 euros, respectivamente. Hallar todas las posibilidades de fabricación.

Solución:

Sean x e y el número de aparatos fabricados de tipo A y B, respectivamente.

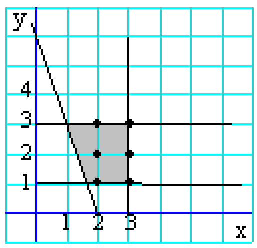
Debe cumplirse que:

$0 \leq x \leq 3$

$1 \leq y \leq 3$

$300x + 100y > 600$

Estas desigualdades generan la región sombreada en la siguiente figura, donde los puntos indican las posibilidades reales de fabricación.



Las posibilidades de fabricación son:

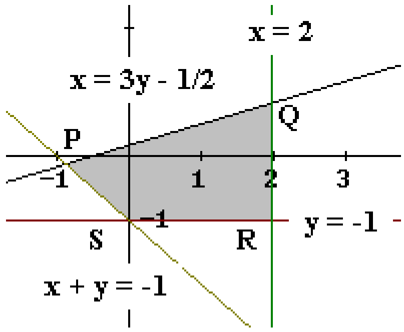
x	y	ventas (euros)
2	1	700
2	2	800
2	3	900
3	1	1000
3	2	1100
3	1	1200

3. Representar la región factible dada por el sistema de inecuaciones:

$$x + y \geq -1$$
$$x \leq 2$$
$$y \geq -1$$
$$x \geq 3y - 1/2$$

y hallar los puntos de la región en los que la función $f(x, y) = 2x + 3y$ alcanza los valores máximo y mínimo y obtener dichos valores.

Solución:
Representando las rectas asociadas a cada inecuación se obtiene la región sombreada en la siguiente figura.



Como sabemos, para regiones cerradas, las soluciones máximas y mínimas se dan siempre en alguno de los vértices de la región factible. Para determinarlas basta con evaluar el valor de la función objetivo en cada uno de esos vértices, que son:

P: $\begin{cases} x + y = -1 \\ x = 3y - 1/2 \end{cases} \Rightarrow$ P = (–7/8, –1/8); Q: $\begin{cases} x = 2 \\ x = 3y - 1/2 \end{cases} \Rightarrow$ Q = (2, 5/6);

R = (2, –1); S: $\begin{cases} x + y = -1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow$ S = (0, –1)

El valor de la función $f(x, y) = 2x + 3y$ en esos vértices es:

En P, $f(-7/8, -1/8) = -17/8$
En Q, $f(2, 5/6) = 39/6 = 13/2$
En R, $f(2, -1) = 1$
En S, $f(0, -1) = -3$

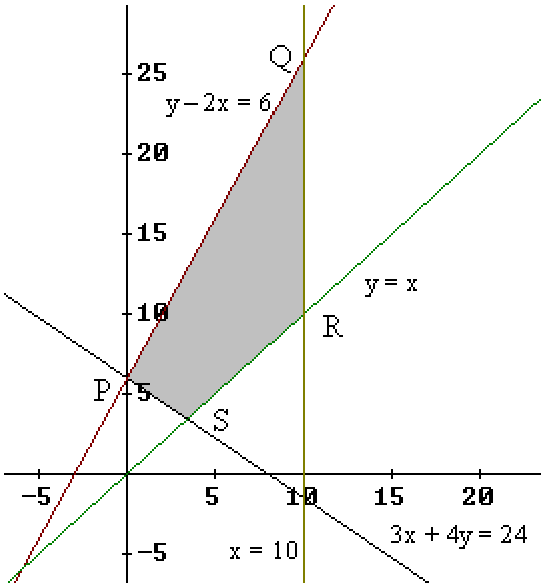
Por tanto, el máximo es 39/6 y se alcanza en el punto Q = (2, 5/6). El mínimo es –3 y se alcanza en el punto P = (0, –1).

4. Representa el recinto que cumple las siguientes restricciones:

$0 \le y$, $0 \le x \le 10$, $x \le y$, $y - 2x \le 6$, $3x + 4y \ge 24$

Maximiza la función $F(x, y) = x + y + 1$ con las restricciones anteriores.

Solución:
En recinto es el sombreado en la siguiente figura.



Sus vértices son:

P = (0, 6); Q = (10, 26); R = (10, 10); S = (24/7, 24/7)

Se obtienen hallando los puntos de corte de las rectas asociadas a las desigualdades dadas.
Por ejemplo, S es el punto de corte de $y = x$ con $3x + 4y = 24$.

El máximo de la función $F(x, y) = x + y + 1$ se encuentra en alguno de los vértices anteriores:

$F(0, 6) = 7$; $F(10, 26) = 37$; $F(10, 10) = 21$; $F(24/7, 24/7) = 55/7$

El máximo se da en el punto Q = (10, 26) y vale 37.

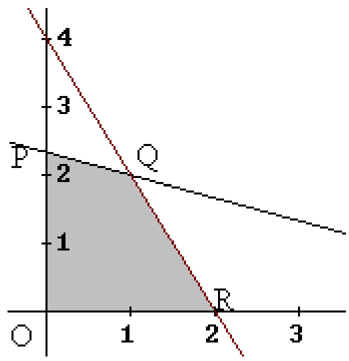
5. Se considera la función $f(x, y) = x + 3y$, se pide:

a) Razonar si f(x, y) alcanza un valor máximo y uno mínimo en el conjunto
$S = \{(x, y) \mid 2x + y \le 4,\ x + 3y \le 7,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$
En caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos en los que se alcanzan.

b) Razonar si f(x, y) alcanza un valor máximo y uno mínimo en el conjunto
$T = \{(x, y) \mid 2x + y \ge 4,\ x + 3y \ge 7,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$
En caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos en los que se alcanzan.

Solución:
Se trata de un problema de programación lineal.

a) El conjunto S es el representado en la siguiente figura.



Como sabemos, los máximos o mínimos se dan en los vértices de la región factible, que son:

O = (0, 0), P = (0, 7/3), Q: $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow$ Q = (1, 2) y R = (2, 0).

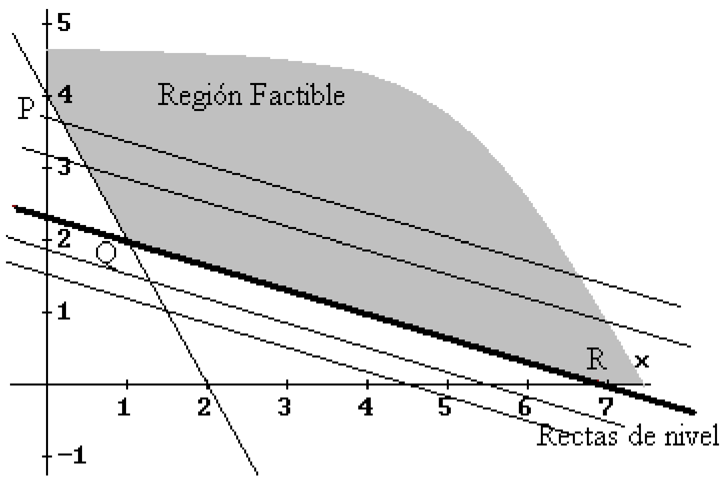
El valor de la función en esos vértices es:

En O, $f(0, 0) = 0$.
En P, $f(0, 7/3) = 7$
En Q, $f(1, 2) = 7$
En R, $f(2, 0) = 2$.

La función alcanza un mínimo en el punto (0, 0), y vale 0.
Como f alcanza el mismo valor máximo en dos vértices, la función alcanza el valor máximo en infinitos puntos: en todos los puntos del segmento PQ, incluidos los dos vértices. El máximo es 7.

b) En este caso, el conjunto T es abierto.

Para determinar los máximos o mínimos hay que trazar las rectas de nivel, cuya ecuación es x + 3y = k.



La recta de nivel mínimo toca, a la vez, el segmento de extremos QR, siendo Q = (1, 2) y R = (7, 0). Por tanto, la función alcanza el mínimo en infinitos puntos: en todos los puntos de ese segmento. El valor mínimo es 7.

La función no alcanza máximo pues las rectas de nivel pueden desplazarse indefinidamente, hacia la derecha, aumentando su nivel.

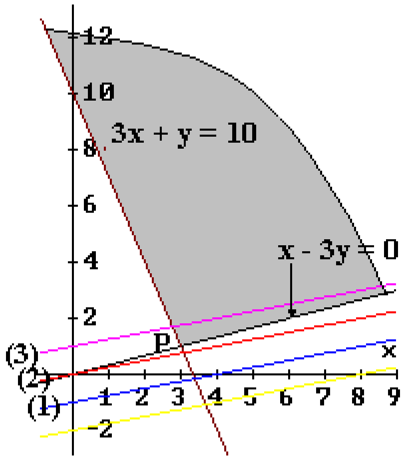
6. a) Determina la región solución del sistema y el vértice:

$$\begin{cases} 3x + y \geq 10 \\ x - 3y \leq 0 \end{cases}$$

b) Calcula el valor de la función $f(x, y) = x - 4y$ en el vértice y explica razonadamente si corresponde a un extremo de $f(x, y)$ y de qué clase es.

Solución:

La región (abierta) es la sombreada en la siguiente figura.



El vértice es el punto P = (3, 1), solución del sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

b) El valor de *f* en ese punto es $f(3,1) = 3 - 4 = -1$.

Ese valor corresponde al máximo de esa función en ese recinto, pues la recta de nivel asociadas a $f(x, y) = x - 4y$, que en la figura hemos señalado con (1), (2) y (3), aumentan al desplazarse hacia abajo (según el sentido del vector (1, –4)) y disminuyen si se desplazan hacia arriba. Como el punto P es el último punto de la región factible que está en contacto con esas rectas de nivel, en él se da el máximo.

---

7. Se considera la región factible dada por el siguiente conjunto de restricciones:

$$x + y \leq 5$$
$$x + 3y \geq 9$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

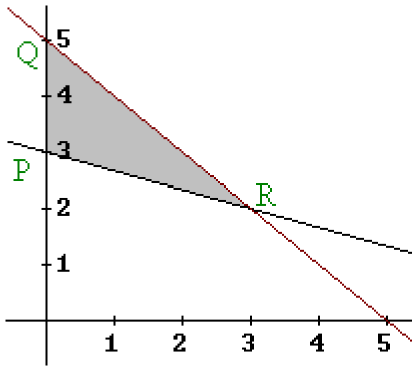
Representar la región factible que determina el sistema de inecuaciones anterior y hallar de forma razonada el punto o puntos de la región donde las siguientes funciones alcanzan su máximo y su mínimo:

a) $f(x, y) = 2x + 3y$,

b) $f(x, y) = y - x$

Solución:

La región factible es la sombreada en la siguiente figura.



Para regiones cerradas, las soluciones máximas y mínimas se dan siempre en alguno de los vértices del polígono de soluciones. Para determinarlas basta con evaluar el valor de la función objetivo en cada uno de esos vértices, que son:.

$$P = (0, 3),\ Q = (0, 5),\ R: \begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \to R = (3, 2)$$

- Para la función $f(x, y) = 2x + 3y$ se tiene:

  $f(0, 3) = 9$; $f(0, 5) = 15$; $f(3, 2) = 12$

El máximo se alcanza en el punto (0, 5); el mínimo, en (0, 3).

- Para la función $f(x, y) = y - x$ se tiene:

  $f(0, 3) = 3$; $f(0, 5) = 5$; $f(3, 2) = -1$

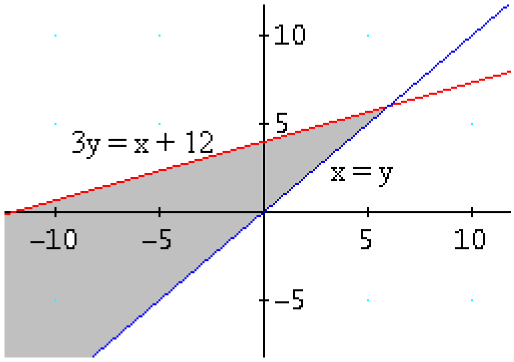
El máximo se alcanza en el punto (0, 5); el mínimo, en (3, 2).

8. Añadid inecuaciones al sistema

$$\begin{cases} x \le y \\ 3y \le x + 12 \end{cases}$$

a fin de que la región de las soluciones del sistema resultante tenga forma de paralelogramo. Justificad la elección que habéis hecho.

Solución:
La región del plano determinada por las inecuaciones dadas es la que se indica en la siguiente figura.



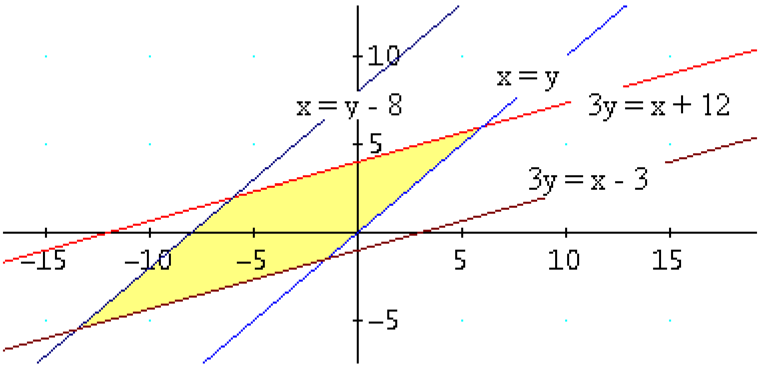
Por tanto habrá que añadir inecuaciones asociadas a rectas paralelas a las dadas, imponiendo, además, que el sentido de la desigualdad cambie.

Por ejemplo, podemos añadir:

$x \ge y - 8$ ("paralela" a $x \le y$) y

$3y \ge x - 3$ ("paralela" a $3y \le x + 12$)

Se tendría la región coloreada en la siguiente figura.

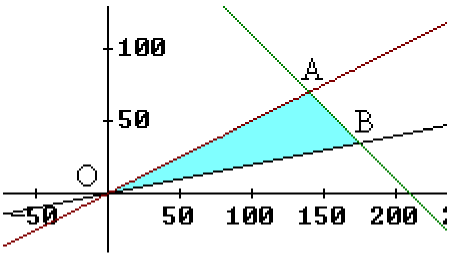


9. En la despensa de una cafetería se puede guardar un máximo de 210 paquetes de café. En estos momentos la despensa está vacía. Se va a añadir una nueva remesa de paquetes, de forma que finalmente en la despensa el número de paquetes de café descafeinado sea al menos un 20 % del de paquetes de café normal, y el número de paquetes de café normal sea al menos el doble del de paquetes de café descafeinado.
(a) ¿Cuántos paquetes de cada tipo se pueden añadir? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.
(b) Calcula los paquetes de cada tipo que hay que añadir para que además la despensa tenga el máximo número posible de paquetes de café descafeinado. ¿Y si lo que queremos es tener el máximo número posible de paquetes de café normal?

Solución
a) Si se añaden x paquetes de café normal e y de descafeinado se tendrá:

$$x + y \le 210$$
$$y \ge 0{,}20x$$
$$x \ge 2y$$

El conjunto de soluciones viene dado por la región sombreada en la siguiente figura.



Cualquier punto de coordenadas enteras de esta región forma parte del conjunto de soluciones. En particular cualquiera de los vértices, donde se dan las soluciones óptimas.

Estos vértices son:

O = (0, 0), que no tiene ningún interés.

A: $\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 210 \end{cases} \Rightarrow$ A = (140, 70); B: $\begin{cases} y = 0{,}20x \\ x + y = 210 \end{cases} \Rightarrow$ A = (175, 35)

b) La despensa tiene el máximo número de paquetes de café descafeinado en la solución correspondiente al punto A, con 140 paquetes de café normal y 70 de descafeinado.

La despensa tiene el máximo número de paquetes de café normal en la solución correspondiente al punto B, con 175 paquetes de café normal y 35 de descafeinado.

10. Un taller pirotécnico fabrica cohetes sencillos que luego vende a 2,70 euros el paquete de 10 y cohetes de colores que vende a 3,60 el paquete de 10. Por problemas de mecanización no pueden fabricar al día más de 400 cohetes sencillos ni más de 300 cohetes de colores, ni más de 500 cohetes sumando los de las dos clases. Se supone que se vende toda la producción.

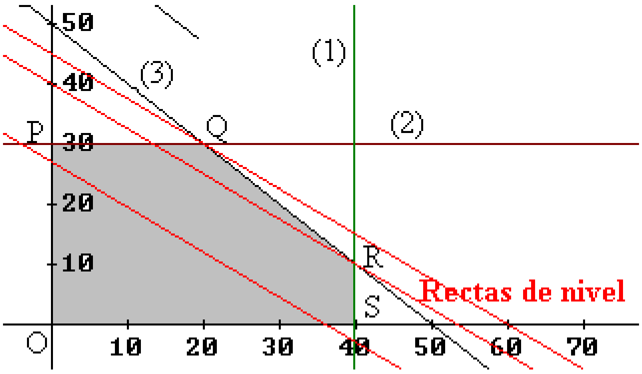
1) Representa la región factible.
2) ¿Cuántos cohetes de cada clase convendrá fabricar y vender para que el beneficio sea máximo?
3) Calcula ese beneficio máximo.

Solución:

1) La región factible viene determinada por las restricciones, que son:

$$\begin{array}{ll} 10x \leq 400 & (1) \\ 10y \leq 300 & (2) \\ 10x + 10y \leq 500 & (3) \\ x \geq 0;\ \ y \geq 0 & \end{array}$$

La región factible es la zona sombreada en la siguiente figura.



2) La función objetivo es f(x, y) = 2,70x + 3,60y, que se desea maximizar.
Como sabemos, la solución óptima se da en alguno de los vértices.
Gráficamente puede determinarse trazando las rectas de nivel, cuya ecuación es 2,70x + 3,60y = k, donde k indica el nivel que alcanza la función. El nivel aumenta cuando las rectas se desplazan paralelamente siguiendo la dirección del vector (2,70, 3,60). El valor máximo de k se consigue en el punto Q, pues es el mayor desplazamiento que puede darse a las rectas de nivel dentro de la región factible.

Las coordenadas de Q son (20, 30). Por tanto habrá que fabricar 20 paquetes sencillos y 30 de colores: 200 cohetes sencillos y 300 de colores.

3) Los ingresos máximos serán f(20, 30) = 2,70 · 20 + 3,60 · 30 = 162 euros.

11. En una empresa de alimentación se dispone de 24 kg de harina de trigo y 15 kg de harina de maíz, que se utilizan para obtener dos tipos de preparados: A y B. La ración del preparado A contiene 200 g de harina de trigo y 300 de harina de maíz, con 600 cal de valor energético. La ración de B contiene 200 g de harina de trigo y 100 g de harina de maíz, con 400 cal de valor energético. ¿Cuántas raciones de cada tipo hay que preparar para obtener el máximo rendimiento energético total? Obtener el rendimiento máximo.

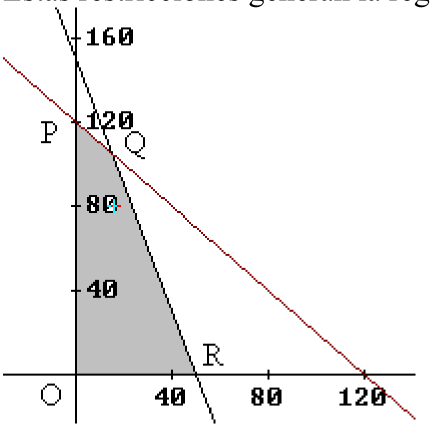
Solución:
Con los datos anteriores se obtiene:

	Cantidad	H. trigo	H. maíz	V. energético
Preparado A	x	200x	200y	600x
Preparado B	y	300y	100y	400y
Disponibilidades		24000 g	15000 g	

El objetivo es maximizar el valor energético. Esto es:

Maximizar $V(x, y) = 600x + 400y$
restringido por: $200x + 200y \le 24000 \iff x + y \le 120$
$300x + 100y \le 15000 \iff 3x + y \le 150$
$x \ge 0;\ y \ge 0$

Estas restricciones generan la región factible (sombreada) en la siguiente figura.



Los vértices son:

O = (0, 0), P = (0, 120),

Q: $\begin{cases} x + y = 120 \\ 3x + y = 150 \end{cases} \Rightarrow$ Q = (15, 105) y R = (50, 0).

Como sabemos, los valores máximos y mínimos se encuentran en alguno de esos vértices.

El valor calorífico para cada nivel de preparados es:

En O, $V(0, 0) = 0$.
En P, $V(0, 120) = 48000$ cal
En Q, $V(15, 105) = 51000$ cal.
En R, $V(50, 0) = 30000$ cal.

El máximo, que es 51000 calorías, se obtiene fabricando 15 preparados del tipo A y 105 del tipo B.

12. A una persona que dispone de 30000 euros se le ofrecen dos fondos de inversión, A y B, con rentabilidades respectivas del 12 % y el 8 %. El A tiene unas limitaciones legales de 12000 euros de inversión máxima, mientras que el B no tiene limitación alguna, pero se aconseja no invertir en él más del doble de lo que se invierta en A.
(a) ¿Qué cantidad debe invertir en cada fondo para que el beneficio sea máximo?
(b) ¿A cuánto ascenderá ese beneficio máximo?

Solución:
Si x e y son las cantidades que invierte en los fondos A y B, respectivamente se tendrá.

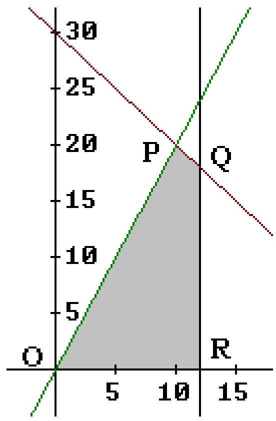
Restricciones (en miles de euros):

$$x + y \le 30$$
$$x \le 12$$
$$y \le 2x$$
$$x \ge 0;\ y \ge 0$$

La función objetivo es: $B(x, y) = 0{,}12x + 0{,}08y$

Las restricciones generan la región sombreada en la siguiente figura.

Como sabemos, la solución óptima está en alguno de los vértices de esa región; y se determina evaluando la función objetivo en cada uno de esos puntos.



Los vértices son:

$$O = (0, 0); \quad P: \begin{cases} y = 2x \\ x + y = 30 \end{cases} \Rightarrow P = (10, 20);$$

$$Q: \begin{cases} x + y = 30 \\ x = 12 \end{cases} \Rightarrow Q = (12, 18); \quad R = (12, 0)$$

Los beneficios en cada uno de esos puntos es:
En O, $B(0, 0) = 0$
En P, $B(10, 20) = 2{,}8$
En Q, $B(12, 18) = 2{,}88$
En R, $B(12, 0) = 1{,}44$

(a) El beneficio máximo se obtiene para x = 12000 e y = 18000 euros.
(b) Ese beneficio máximo será de 2880 euros.

13. Una papelería quiere liquidar hasta 78 kg de papel reciclado y hasta 138 kg de papel normal. Para ello hace dos tipos de lotes, A y B. Los lotes A están formados por 1 kg del papel reciclado y 3 kg de papel normal y los lotes B por 2 kg de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote A es de 0,9 euros y el de cada lote B es de 1 euro. ¿Cuántos lotes A y B debe vender para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos máximos?

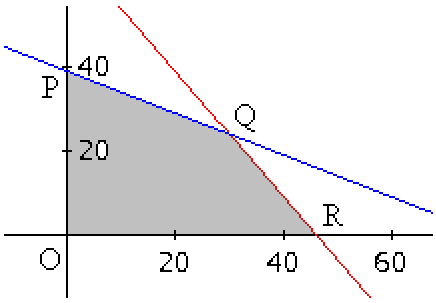
Solución:
Con los datos anteriores se obtiene:

	Cantidad	P reciclado	P normal	Ingresos
Lote A	x	x	3x	0,9x
Lote B	y	2y	2y	y
Disponibilidades		78 kg	138 kg	

El objetivo es maximizar los ingresos. Esto es:

Maximizar $I(x, y) = 0{,}9x + y$
restringido por:
$x + 2y \le 78$
$3x + 2y \le 138$
$x \ge 0;\ y \ge 0$

Estas restricciones generan la región factible (sombreada) en la siguiente figura.



Los vértices son:

O = (0, 0), P = (0, 39), Q: $\begin{cases} x + 2y = 78 \\ 3x + 2y = 138 \end{cases} \Rightarrow$ Q = (30, 24) y R = (46, 0).

Como sabemos, los valores máximos y mínimos se encuentran en alguno de esos vértices.

Los ingresos para cada una de esas soluciones son:
En O, I(0, 0) = 0.
En P, I(0, 39) = 39
En Q, I(30, 24) = 51.
En R, I(46, 0) = 41,4.

El máximo, que vale 51 €, se obtiene haciendo 30 lotes del tipo A y 24 del tipo B.

14. Las necesidades vitamínicas diarias de una persona son de un mínimo de 36 mg de vitamina A, 28 mg de vitamina C y 34 mg. de vitamina D. Estas necesidades se cubren tomando pastillas de la marca *Energic* y de la marca *Vigor*. Cada pastilla de la marca *Energic* cuesta 0,03 € y proporciona 2 mg de vitamina A, 2 mg de vitamina C y 8 mg de vitamina D. Cada pastilla de la marca *Vigor* cuesta 0,04 € y proporciona 3 mg de vitamina A, 2 mg de vitamina C y 2 mg de vitamina D. ¿Cuántas pastillas de cada marca se han de tomar diariamente si se desean cubrir las necesidades vitamínicas básicas con el menor coste posible? Determinar dicho coste.

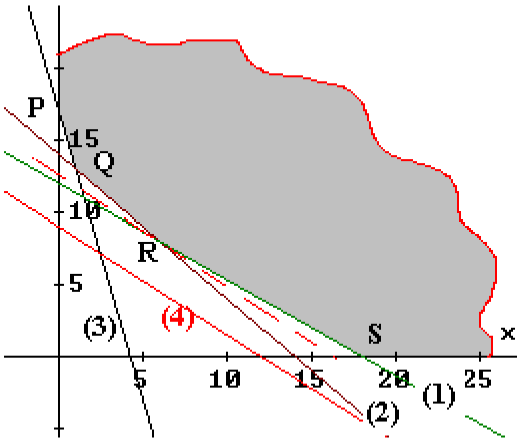
Solución:
Si compramos x pastillas de la marca *Energit* e y de la marca *Vigor*, con los datos del enunciado se tiene:

Marca	Cantidad	Vitam A	Vitam C	Vitam D	Precio
Energit	x	2x	2x	8x	0,03x
Vigor	y	3y	2y	2y	0,04y
Necesidad		36 mg	28 mg	34 mg	

La función objetivo es minimizar el coste: $C(x, y) = 0{,}03x + 0{,}04y$

Restringida por:
$2x + 3y \geq 36$ (1)
$2x + 2y \geq 28$ (2)
$8x + 2y \geq 34$ (3)
$x \geq 0;\ y \geq 0$

Estas restricciones generan la región factible dada en la siguiente figura.



Los vértices de esa región son:

P = (0, 17); Q: $\begin{cases} 2x + 2y = 28 \\ 8x + 2y = 34 \end{cases} \Rightarrow$ Q = (1, 13)

R: $\begin{cases} 2x + 3y = 36 \\ 2x + 2y = 28 \end{cases} \Rightarrow$ R = (6, 8); S = (18, 0)

Trazando las rectas de nivel asociadas a la función objetivo, cuya ecuación es $3x + 4y = k$, (4), se observa que el mínimo valor se da en el punto R(6, 8). (Recuerda que el valor de k aumenta cuando las rectas se trasladan hacia la derecha, siguiendo el sentido del vector (3, 4).)

A la misma conclusión se llega si evaluamos C(x, y) en los vértices, pues:

C(P) = C(0, 17) = 0,68
C(Q) = C(1, 13) = 0,55
C(R) = C(6, 8) = 0,50
C(S) = C(18, 0) = 0,54

Por tanto, hay que tomar diariamente 6 pastillas de *Energit* y 8 de la marca *Vigor*. Es coste diario será de 0,50 euros.

15. Se pretende cultivar en un terreno dos tipos de olivos: A y B. No se puede cultivar más de 8 ha con olivos de tipo A, ni más de 10 ha con olivos del tipo B. Cada hectárea de olivos de tipo A necesita 4 m^3 de agua anuales y cada una de tipo B, 3 m^3. Se dispone anualmente de 44 m^3 de agua. Cada hectárea de tipo A requiere una inversión de 500 € y cada una de tipo B, 225 €. Se dispone de 4500 € para realizar dicha inversión. Si cada hectárea de olivar de tipo A y B producen, respectivamente, 500 y 300 litros anuales de aceite:

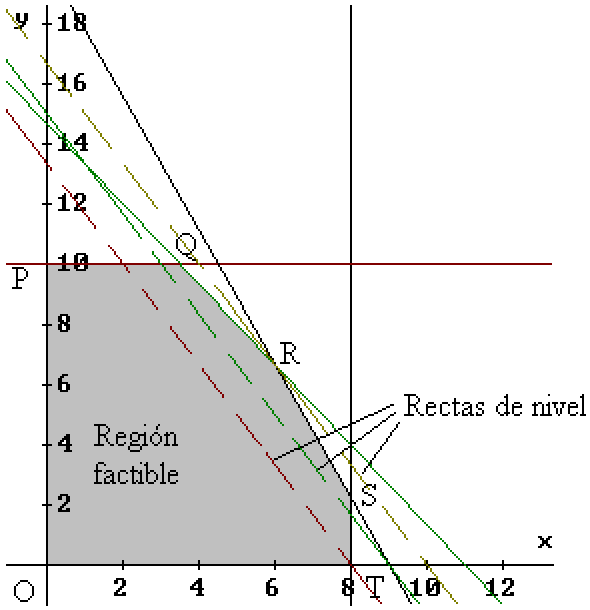
a) Obtener razonadamente las hectáreas de cada tipo de olivo que se deben plantar para maximizar la producción de aceite.
b) Obtener la producción máxima.

Solución:
Si x indica las hectáreas de olivo A e y las de B, el objetivo es maximizar:

$P(x, y) = 500x + 300y$

Restringido por:
$x \le 8$
$y \le 10$
$4x + 3y \le 44$ (restricción por agua)
$500x + 225y \le 4500$ (restricción por inversión)
$x \ge 0;\ y \ge 0$

Estas restricciones generan la región factible (sombreada) dada en la siguiente figura.



Trazando las rectas de nivel, de ecuación $500x + 300y = k$, y trasladándolas hacia la derecha –según el vector (500, 300)– se observa que el nivel máximo se obtiene en el vértice R = (6, 6,6666).

Estas coordenadas son la solución del sistema: $\begin{cases} 4x + 3y = 44 \\ 500x + 225y = 4500 \end{cases}$

Hay que cultivar 6 hectáreas de olivo A y 6,6666 del tipo B.

b) La producción máxima es

$P(6,\ 6{,}6666) = 500 \cdot 6 + 300 \cdot 6{,}6666 = 5000$ litros

16. Una peña de aficionados de un equipo de fútbol encarga a una empresa de transportes el viaje para llevar a los 1200 socios a ver la final de su equipo. La empresa dispone de autobuses de 50 plazas y de microbuses de 30 plazas. El precio de cada autobús es de 252 euros y el de cada microbús de 180 euros. Sabiendo que la empresa sólo dispone de 28 conductores, se pide:

a) ¿Qué número de autobuses y microbuses deben contratarse para conseguir el mínimo coste posible.
b) ¿Cuál será el valor de dicho coste mínimo?

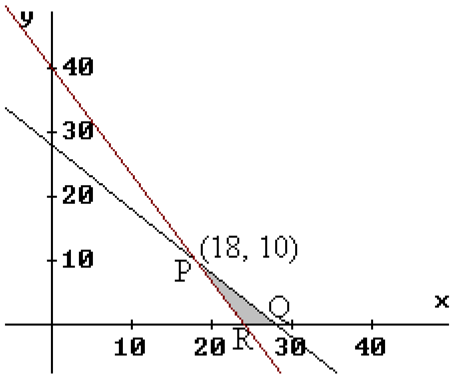
Justificar las respuestas.

Solución:
Sean x e y el número de autobuses de 50 plazas y de microbuses de 30 plazas, respectivamente, que conviene contratar.

El objetivo es minimizar la función $C(x, y) = 252x + 180y$

restringido por: $50x + 30y \ge 1200$ (número de socios)
$x + y \le 28$ (número de conductores)
$x \ge 0$; $y \ge 0$

Estas restricciones generan la región factible representada (sombreada) en la siguiente figura.



a) Como sabemos, la solución óptima se da en alguno de sus vértices, que son:

$$\text{P: } \begin{cases} 50x + 30y = 1200 \\ x + y = 28 \end{cases} \Rightarrow \text{P} = (18, 10); \quad \text{Q} = (28, 0); \quad \text{R} = (24, 0)$$

Para cada uno de esos pares, el coste es:

- en P, $C(18, 10) = 6336$ euros
- en Q, $C(28, 0) = 7056$ euros
- en R, $C(24, 0) = 6048$ euros

El coste mínimo se consigue contratando 24 autobuses de 50 plazas.

b) El coste mínimo es de 6048 euros.

17. Un fabricante comercializa 2 modelos de pantalón vaquero, uno para mujer que le proporciona un beneficio de 12 euros por unidad y otro para hombre con beneficio unitario de 20 euros. El próximo mes desea fabricar entre 50 y 750 pantalones para mujer y siempre un número no inferior al que fabrica para hombre. Además no tiene posibilidades de fabricar mensualmente más de 1000 unidades en total.

a) Plantee un programa lineal que permita calcular el número de unidades de cada modelo que ha de fabricar para maximizar el beneficio total.

b) Resolviendo el programa anterior diga el máximo beneficio y cuántas unidades de cada modelo se han de comercializar.

c) Diga la solución del apartado anterior si el beneficio unitario es de 15 euros para cada uno de los modelos.

NOTA: No es necesario considerar que las cantidades fabricadas sean números enteros.

Solución:

a) Si se fabrican x pantalones de mujer e y de hombre, se tienen las siguientes restricciones:

$$50 \le x \le 750; \quad x \ge y; \quad x + y \le 1000$$

El objetivo es maximizar el beneficio. Por tanto, el problema de programación lineal es:

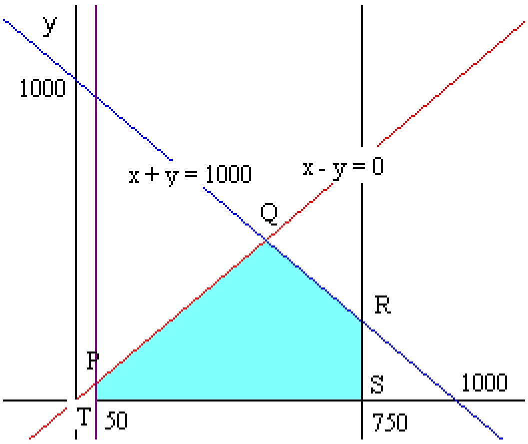
Maximizar $B(x, y) = 12x + 20y$

restringido por: $50 \le x \le 750$

$x - y \ge 0$

$x + y \le 1000$

b) Estas restricciones generan la región factible dada en la siguiente figura.



La solución óptima de un problema de programación lineal se halla en alguno de los vértices de la región factible; región que tiene por vértices:

P = (50, 50), Q: $\begin{cases} x + y = 1000 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Q = (500, 500);

R = (750, 250), S = (750, 0) y T = (50, 0).

Los beneficios para esos niveles de producción son:

En P, B(50, 50) = 1600.

En Q, B(500, 500) = 16000

En R, B(750, 250) = 14000; En S, B(750, 0) = 9000; En T, B(50, 0) = 600

La solución óptima se consigue fabricando 500 pantalones de cada modelo. El beneficio será de 16000 euros.

c) Si el beneficio unitario es de 15 euros la función de beneficios es B(x, y) = 15(x + y).

La solución óptima se da cuando x + y = 1000, que se da en cualquier punto del segmento de extremos Q y R.

Ese beneficio será de 15000 euros.

18. Una destilería produce dos tipos de whisky *blend* mezclando sólo dos maltas destiladas distintas, A y B. El primero tiene un 70 % de malta A y se vende a 12 €/litro, mientras que el segundo tiene un 50 % de dicha malta y se vende a 16 €/litro. La disponibilidad de las maltas A y B son 132 y 90 litros, respectivamente ¿Cuántos litros de cada whisky debe producir la destilería para maximizar sus ingresos, sabiendo que la demanda del segundo whisky nunca supera a la del primero en más del 80 %? ¿Cuáles serían en este caso los ingresos de la destilería?

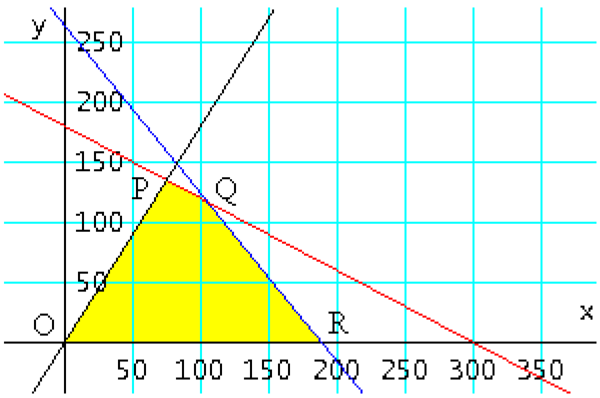
Solución:
Con los datos anteriores se obtiene:

	Litros	A	B	Ingresos
Whishy 1	x	0,7x	0,3x	12x
Whisky 2	y	0,5x	0,5y	16y
Disponibilidades		132	90	

El objetivo es maximizar los ingresos. Esto es:

Maximizar $I(x, y) = 12x + 16y$
restringido por: $0{,}7x + 0{,}5y \le 132$
$0{,}3x + 0{,}5y \le 90$
$x \ge 0;\ y \ge 0$

Representando las rectas asociadas a cada inecuación se obtiene la región sombreada en la siguiente figura.



Como sabemos, para regiones cerradas, las soluciones máximas y mínimas se dan siempre en alguno de los vértices de la región factible. Para determinarlas basta con evaluar el valor de la función objetivo en cada uno de esos vértices, que son:

O = (0, 0); P: $\begin{cases} 1{,}8x - y = 0 \\ 0{,}3x + 0{,}5y = 90 \end{cases} \Rightarrow$ P = (75, 135);

Q: $\begin{cases} 0{,}7x + 0{,}5y = 132 \\ 0{,}3x + 0{,}5y = 90 \end{cases} \Rightarrow$ Q = (105, 117);

R = (1320/7, 0)

El valor de la función $I(x, y) = 12x + 16y$ en esos vértices es:

En O, $I(0, 0) = 0$
En P, $I(75, 135) = 3060$
En Q, $I(105, 117) = 3132$
En R, $I(1320/7, 0) = 2282{,}8$

Por tanto, para maximizar los ingresos la destilería debe fabricar 105 litros del primer whisky y 117 del segundo. Los ingresos serán de 3132 euros.

19. En una confitería se dispone de 24 kg de polvorones y 15 kg de mantecados, que se envasan en dos tipos de cajas del modo siguiente:

- caja tipo 1: 200 g de polvorones y 100 g de mantecados. Precio: 4 €
- caja tipo 2: 200 g de polvorones y 300 g de mantecados. Precio: 6 €

1. ¿Cuántas cajas de cada tipo se tendrán que preparar y vender para obtener el máximo de ingresos?
2. ¿Cuál es el importe de la venta?

Solución:

Con los datos anteriores se obtiene:

	Cantidad	Polvorones	Mantecados	Ingresos
Tipo 1	x	0,2x	0,1x	4x
Tipo 2	y	0,2y	0,3y	6y
Disponibilidades		24 kg	15 kg	

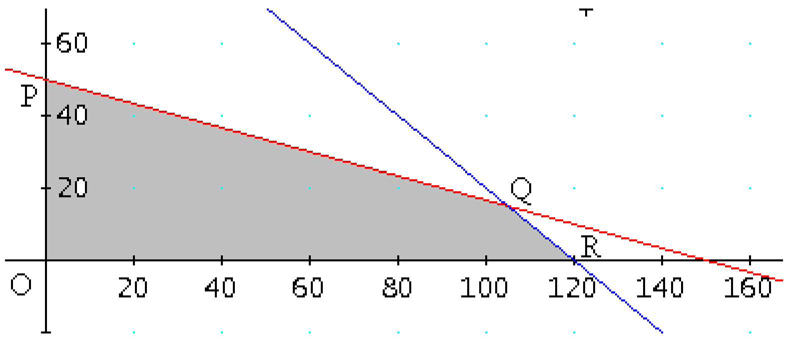
El objetivo es maximizar los ingresos. Esto es:

Maximizar $I(x, y) = 4x + 6y$

restringida por:

$$0{,}2x + 0{,}3y \le 24$$
$$0{,}1x + 0{,}3y \le 15$$
$$x \ge 0; \quad y \ge 0$$

Estas restricciones generan la región factible sombreada en la siguiente figura.



Como sabemos la solución óptima se encuentra en alguno de los vértices, que son:

$$O = (0, 0),\ P = (0, 45),\ Q: \begin{cases} 2x + 2y = 240 \\ x + 3y = 150 \end{cases} \Rightarrow Q = (105, 15) \text{ y } R = (120, 0).$$

Los ingresos para esos puntos son:

En O, $I(0, 0) = 0$.
En P, $I(0, 45) = 270$
En Q, $I(105, 15) = 510$.
En R, $I(120, 0) = 480$.

La solución óptima se obtiene preparando 105 cajas del tipo 1 y 15 del tipo 2, siendo los ingresos de 510 euros.

20. Una empresa fabrica láminas de aluminio de dos grosores, finas y gruesas, y dispone cada mes de 400 kg de aluminio y 450 horas de trabajo para fabricarlas. Cada m^2 de lámina fina necesita 5 kg de aluminio y 10 horas de trabajo, y deja una ganancia de 45 euros. Cada m^2 de lámina gruesa necesita 20 kg de aluminio y 15 horas de trabajo, y deja una ganancia de 80 euros. ¿Cuántos m^2 de cada tipo de lámina debe fabricar la empresa al mes para que la ganancia sea máxima, y a cuánto asciende ésta?

Solución:
Con los datos anteriores se obtiene la tabla:

	Cantidad	Aluminio	Trabajo	Ganancia
Lámina fina	x	5x	10x	45x
Lámina gruesa	y	20y	15y	80y
Disponibilidades		400 kg	450 h	

El objetivo es maximizar la ganancia, que es:

$G(x, y) = 45x + 80y$

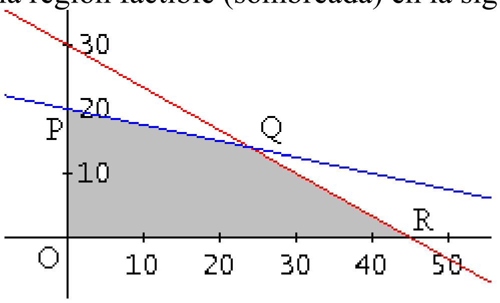
restringida por:

$5x + 20y \leq 400$

$10x + 15y \leq 450$

$x \geq 0;\ \ y \geq 0$

Estas restricciones generan la región factible (sombreada) en la siguiente figura.



Los vértices son:

O = (0, 0), P = (0, 20), Q: $\begin{cases} 5x + 20y = 400 \\ 10x + 15y = 450 \end{cases} \Rightarrow$ Q = (24, 14) y R = (45, 0).

Como sabemos, los valores máximos y mínimos de la función objetivo se encuentran en alguno de esos vértices.

La ganancia para cada una de esas soluciones es:

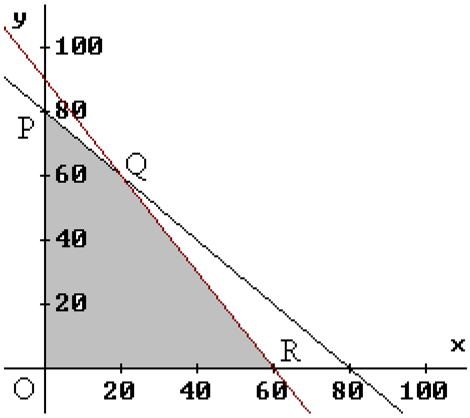
En O, G(0, 0) = 0.
En P, G(0, 20) = 1600 €
En Q, G(24, 14) = 2200 €
En R, G(45, 0) = 2025 €.

La ganancia máxima, que asciende a 2200 euros, se obtiene fabricando 24 láminas finas y 14 gruesas.

21. Una empresa constructora dispone de 10.800.000 euros, para edificar en una urbanización casas de dos tipos: las de tipo A, cada una de las cuales tendría un coste (para la empresa) de 180.000 euros, y dejaría, al venderla, un beneficio de 24.000 euros, y las de tipo B, cuyos costes y beneficios individuales serían de 120.000 euros y 18.000 euros, respectivamente. Si las normas municipales no permiten construir más de 80 casas, hallar cuántas de cada tipo debe construir la empresa para obtener el máximo beneficio.

Solución:
Si se construyen x viviendas de tipo A e y del tipo B:
El objetivo es maximizar los beneficios: $B(x, y) = 24000x + 18000y$
Restringido por: $180000x + 120000y \leq 10800000$ (dinero)
$x + y \leq 80$ (casas)
$x \geq 0$; $y \geq 0$

Estas restricciones generan la región factible dada en la siguiente figura:



Los vértices son:

O = (0, 0), P = (0, 80), Q: $\begin{cases} 18x + 12y = 1080 \\ x + y = 80 \end{cases} \Rightarrow$ Q = (20, 60) y R = (60, 0).

Los beneficios correspondientes serían:

En O, B(0, 0) = 0.
En P, B(0, 80) = 1440 000 €
En Q, B(20,60) = 1560 000 €
En R, B(60, 0) = 1440 000 €.

Deben construirse 20 casa del tipo A y 60 del tipo B.

22. Una finca necesita al día 9 kg de abono nitrogenado (N), 5 de abono fosforado (P) y 6 de potasio (K). En la Cooperativa Agrícola se venden dos tipos de cajas. Las de tipo A llevan una bolsa con 1 kg de N, otra con 1 kg de P y otra con 2 kg de K y valen 2 euros. Las de tipo B tiene una bolsa con 3 kg de N, otra con 1 kg de P y otra con 1 kg de K y valen 3 euros.
(a) ¿Cuántas cajas de cada tipo deberán comprarse para cubrir las necesidades de la finca con mínimo gasto?
(b) ¿Cuál es ese mínimo gasto necesario?
(c) ¿Qué tipos de abono se aprovecharán completamente y de cuáles sobrarán?

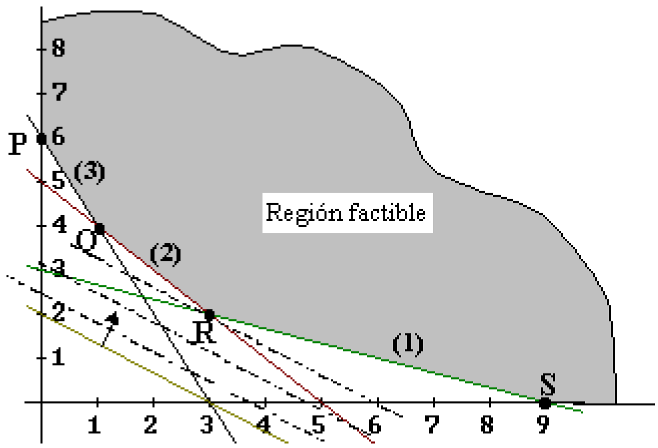
Solución:
a) Con los datos anteriores se obtiene:

Cajas	Cantidad	N	P	K	Coste
Tipo A	x	$1 \cdot x$	$1 \cdot x$	$2 \cdot x$	$2 \cdot x$
Tipo B	y	$3 \cdot y$	$1 \cdot y$	$1 \cdot y$	$3 \cdot y$
Necesidad		9	5	6	

El objetivo es minimizar el coste: $C(x, y) = 2x + 3y$
restringido por: $x + 3y \geq 9$ (1)
$x + y \geq 5$ (2)
$2x + y \geq 6$ (3)
$x \geq 0;\ y \geq 0$

Estas restricciones generan la región factible (sombreada) en la siguiente figura.

La solución óptima, máximo o mínimo, se da en alguno de los vértices de la región factible. Para determinarlo, recurrimos al trazado de las rectas de nivel, cuya ecuación es $2x + 3y = k$.
Si trazamos una cualquiera de ellas, por ejemplo, $2x + 3y = 6$ y se traslada hacia la derecha (así aumenta su nivel, en el sentido del vector (2, 3)), el primer punto de contacto de la región factible con esas rectas da el mínimo de la función objetivo. Ese punto es R, cuyas coordenadas son:



$$R: \begin{cases} x + 3y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow R = (3, 2)$$

Por tanto, habrá que comprar 3 cajas del tipo A y 2 del tipo B.

b) El coste será $C(3, 2) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$ euros.

c) Comprando 3 cajas del tipo A y 2 del tipo B se consiguen 9 kg de N, 5 de P y 7 de K, por tanto, sobrará 1 kg de K, aprovechándose los demás al completo.

23. Una empresa de productos de papelería dispone de 270 metros cuadrados de cartón y de 432 metros de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan 0,20 metros cuadrados de cartón y 30 centímetros de cinta de goma y se vende a 1,40 euros la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan 0,15 metros cuadrados de cartón y 27 centímetros de cinta de goma y se vende a 1,10 euros la unidad.
1) Representa la región factible.
2) ¿Cuántas carpetas de cada tipo interesa fabricar para que el beneficio que se obtiene con su venta sea lo más grande posible?
3) Calcula ese beneficio máximo.

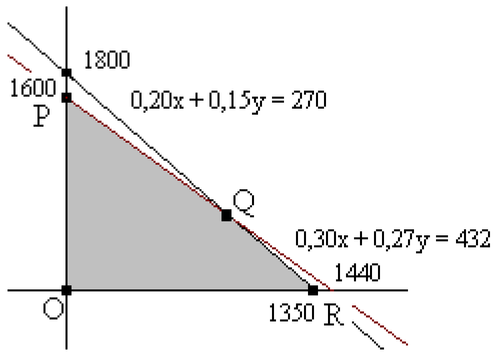
Solución:
Con los datos anteriores se obtiene:

Carpeta	Cantidad	Cartón	Goma	Beneficio*
T. Folio	x	0,20x	0,30x	1,40x
T. Cuartilla	y	0,15y	0,27y	1,10y
Existencias		270 m^2	432 m	

El objetivo es maximizar los beneficios. Esto es:

Maximizar $B(x, y) = 1{,}40x + 1{,}10y$
Restringido por: $0{,}20x + 0{,}15y \le 270$
$0{,}30x + 0{,}27y \le 432$
$x \ge 0;\ y \ge 0$

1) Estas restricciones generan la región factible (sombreada) en la siguiente figura.

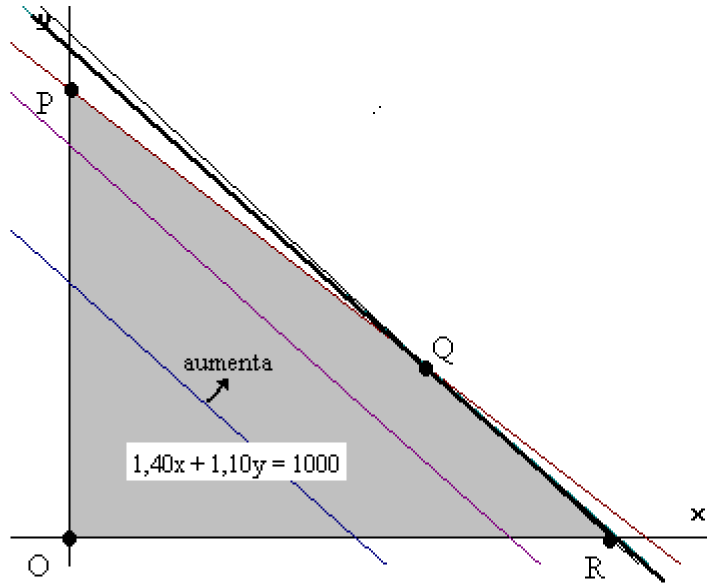


2) Como sabemos, la solución óptima se da en alguno de los vértices, cuyas coordenadas son:

O = (0, 0), P = (0, 1400), Q: $\begin{cases} 0{,}20x + 0{,}15y = 270 \\ 0{,}30x + 0{,}27y = 432 \end{cases} \Rightarrow$ Q = (900, 600) y
R = (1350, 0).

Para determinar en qué vértice se da el máximo puede recurrirse al trazado de las rectas de nivel, cuya ecuación es $1{,}40x + 1{,}10y = k$.
Si trazamos una cualquiera de ellas, por ejemplo, $1{,}40x + 1{,}10y = 1000$ y se traslada hacia la derecha (así aumenta su nivel, en el sentido del vector (1,40, 1,10)), el último punto de contacto de la región factible con esas rectas da el máximo de la función objetivo.

En este caso, y como puede observarse en la figura, ese punto es Q. Por tanto, habrá que fabricar 900 carpetas de tamaño folio y 600 de tamaño cuartilla.



3) El beneficio en cada uno de los vértice se obtiene evaluando la función objetivo en cada uno de ellos; así se obtiene:

En O, B(0, 0) = 0.
En P, B(0, 1600) = 1760 euros
En Q, B(900, 600) = 1920 euros
En R, B(1350, 0) = 1890 euros.

El máximo beneficio es de 1920 euros y se consigue fabricando 900 carpetas de tamaño folio y 600 de tamaño cuartilla.