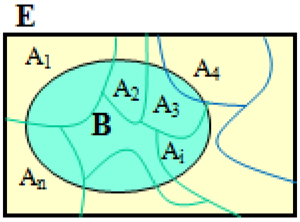
PROBABILIDAD TOTAL Y FÓRMULA DE BAYES



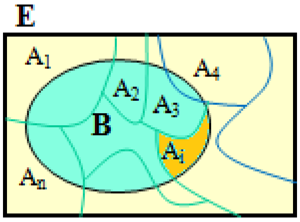
Probabilidad total

Si un suceso B está condicionado por otros A_i, incompatibles dos a dos y tales que $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$, entonces, la probabilidad total del suceso B es:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + ... + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Fórmula de Bayes

Da la probabilidad condicionada de un suceso relacionado con la probabilidad total. Esto es, sabiendo que se ha cumplido un suceso, ¿cuál será la probabilidad de que se haya cumplido en una de las partes que lo componen?



Por ejemplo, atendiendo a la figura, si se ha cumplido B, ¿cuál es la probabilidad de que haya sucedido en A_i, $P(A_i/B)$?

Su valor es: $P(A_i/B) = \dfrac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)}$.

Ejemplo:

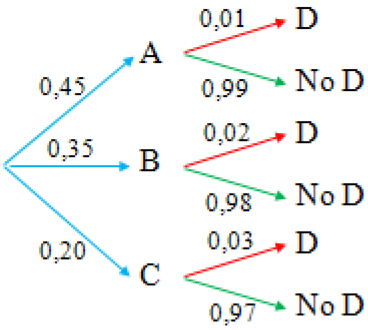
Una fábrica de chocolates cuenta con tres máquinas de envasado. La máquina A envasa el 45% del total de cajas que salen al mercado; la máquina B, el 35% de las cajas; la C, el 20%. El 1% de las cajas de chocolate envasadas en la máquina A tiene defectos en el envase; en el caso de la máquina B, las defectuosas son del 2%; en la C, salen defectuosas el 3%. Si se elige una caja de esa fábrica:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la máquina A y tenga defecto en el envase?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga defecto en el envase?

c) Si la caja tiene defecto, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la máquina C?

Solución:



En el diagrama de árbol adjunto se resume la información del problema. En él, las letras A, B y C indican los sucesos “la caja de chocolate ha sido envasada en la máquina A, B o C”, respectivamente. La letra D, indica el suceso tener defecto en el envase; No D, lo contrario.

a) La probabilidad de que una caja proceda de A y tenga un defecto en el envasado es $P(A \cap D)$.

Su valor es:

$$P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D/A) = 0,45 \cdot 0,01 = 0,0045$$

b) Por la probabilidad total,

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$
$$= 0,45 \cdot 0,01 + 0,35 \cdot 0,02 + 0,20 \cdot 0,03 = 0,0175$$

c) La probabilidad de que una caja con defecto en el envase proceda de C se designa por P(C/D) y, por la fórmula de Bayes, vale:

$$P(C/D) = \frac{P(C) \cdot P(D/C)}{P(D)} = \frac{0,20 \cdot 0,03}{0,0175} = \frac{60}{175} \approx 0,343.$$

Pequeños retos

En unos grandes almacenes se encuentran mezcladas y a la venta 100 camisetas de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que una camiseta tenga tara es 0,01 para la marca A, 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Un comprador elige una camiseta al azar.
a) Calcula la probabilidad de que la camiseta sea de cada una de las marcas, A, B o C.
b) Calcula la probabilidad de que la camiseta tenga tara.
c) Sabiendo que la camiseta elegida tiene tara, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

Solución:
a) $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}3$; $P(C) = 0{,}2$.
b) $P(\text{Tara}) = 0{,}017$.
c) $P(B/T) = 6/17 \approx 0{,}35$.