

PROBABILIDAD: DEFINICIONES Y PROPIEDADES

La probabilidad es una medida de la posibilidad de que acontezca un suceso aleatorio determinado, asignándosele un número, comprendido entre 0 y 1.

- Si un experimento aleatorio se repite un gran número de veces, la probabilidad de un determinado suceso se identifica con la frecuencia relativa de tal suceso.

Ejemplo:

Si se pregunta a 340 personas, elegidas al azar, sobre su nivel de estudios y, de ellas, 125 afirman tener el título de Graduado universitario, se admite que la probabilidad de que una persona de ese grupo sea graduada es de $\frac{125}{340} \approx 0,37$,

$$\frac{125}{340} \approx 0,37$$

- Cuando los sucesos elementales del experimento aleatorio son equiprobables, la probabilidad del suceso A se calcula aplicando la regla de Laplace, que dice:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables a A}}{\text{Número total de casos posibles}}$$

Ejemplo:

Si en una bolsa hay 4 rojas (R), 2 blancas (B) y 3 verdes (V), la probabilidad de extraer al azar una bola

roja, una bola blanca o una bola verde es: $P(R) = \frac{4}{9}$; $P(B) = \frac{2}{9}$; $P(V) = \frac{3}{9}$.

Definición axiomática de probabilidad

La probabilidad puede definirse diciendo que es una función P que asigna a cada suceso de un experimento aleatorio un número real, debiendo cumplir los siguientes axiomas:

1. Para cualquier suceso A se cumple que: $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. La probabilidad del suceso seguro E es 1: $P(E) = 1$.
3. Si A y B son sucesos incompatibles, entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

→ De esos axiomas se extraen algunas consecuencias (propiedades) de interés:

Probabilidad del suceso contrario

Conociendo la probabilidad de un suceso A puede hallarse la de su contrario A^C , pues, como

$$A \cup A^C = E \Rightarrow P(A \cup A^C) = P(E) = 1 \Rightarrow P(A) + P(A^C) = 1 \Rightarrow P(A^C) = 1 - P(A)$$

Ejemplo:

Si al extraer una bola de una urna, la probabilidad de que sea roja es $P(R) = \frac{4}{9} \Rightarrow$ probabilidad de de

que no sea roja será: $P(\text{no } R) = P(R^C) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

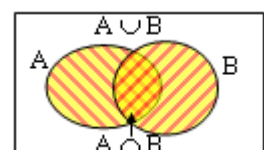
Probabilidad de la unión de sucesos

Para dos sucesos cualesquiera, A y B se tiene que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Se resta $P(A \cap B)$ para evitar contar dos veces el suceso $A \cap B$, que se da tanto en A como en B.

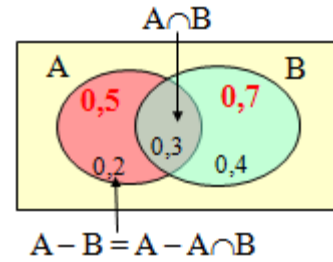
→ Si los sucesos son incompatibles: $P(A \cap B) = 0$ y $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



Ejemplo:

Si se sabe que las probabilidades de los sucesos A, B y $A \cap B$ son, respectivamente, $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,7$, $P(A \cap B) = 0,3$, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \\ \Rightarrow P(A \cup B) = 0,5 + 0,7 - 0,3 = 0,9$$


Probabilidad de la diferencia de sucesos

Para dos sucesos cualesquiera, A y B se tiene que:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

→ Es una consecuencia de que $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, siendo $A - B$ y $A \cap B$ incompatibles ⇒

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B).$$

Ejemplos:

Para los sucesos del ejemplo anterior:

La probabilidad de que se cumpla A pero no B es $P(A - B) = 0,5 - 0,3 = 0,2$.

La probabilidad de que se cumpla B pero no A es $P(B - A) = 0,7 - 0,3 = 0,4$.

La probabilidad de que no cumpla A es $P(A^c) = 1 - 0,5 = 0,5$.

La probabilidad de que no cumpla B es $P(B^c) = 1 - 0,7 = 0,3$.

La probabilidad de que no se cumpla ni A ni B es $P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,9 = 0,1$.

Pequeños retos

1. En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas con tres cifras, numeradas del 000 al 999.

- Si una persona ha comprado 3 papeletas, ¿cuál es la probabilidad de que le toque el premio?
- Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 5.
- Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 55.

2. Si las probabilidades de los sucesos A, B y $A \cap B$ son, respectivamente, $P(A) = 0,60$, $P(B) = 0,70$, $P(A \cap B) = 0,45$, calcula la probabilidad de que:

- | | | |
|--------------------|---------------------------|----------------------------------|
| a) Se cumpla A o B | b) Se cumpla sólo A | c) Se cumpla B pero no A |
| d) No se cumpla A | e) No se cumpla ni A ni B | f) Se cumpla sólo uno de los dos |

Solución:

1. a) 0,003. b) 0,1. c) 0,01.

2. a) 0,85. b) 0,15. c) 0,25. d) 0,40. e) 0,15. f) 0,40.