PROBABILIDAD CONDICIONADA

Experimentos compuestos
Un experimento aleatorio se llama compuesto cuando se realiza en dos o más etapas.
Son experimentos compuestos por ejemplo: extraer dos cartas de una baraja; tirar dos dados al aire y anotar la puntuación de sus caras, o determinar la suma de esas puntuaciones; lanzar tres monedas al aire y contar el número de caras que resultan…

- Para el estudio de estos experimentos puede ser útil elaborar un diagrama de árbol o una tabla, llamada de contingencia.

Ejemplos:
a) Si se lanzan dos dados, con las caras numeradas del 1 al 6, el espacio muestral está formado por 36 sucesos elementales:

E = {(1, 1), (1, 2),…, (2, 1), (2, 2),…, (6, 5), (6, 6)}

→ Los dos dados salen con el mismo número en 6 casos: (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) y (6, 6).
→ El resultado de la suma de dos dados se indica la tabla adjunta.
→ La suma es 8 en 5 casos: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) y (6, 2).

Por tanto, la probabilidad de que la suma sea 8 es: $P(\text{suma } 8) = \dfrac{5}{36}$.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	**8**
3	4	5	6	7	**8**	9
4	5	6	7	**8**	9	10
5	6	7	**8**	9	10	11
6	7	**8**	9	10	11	12

b) En el lanzamiento de 3 monedas, si se designa por C (cara) y por X (cruz); se puede confeccionar la secuencia de los sucesos posibles, que son:

CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX

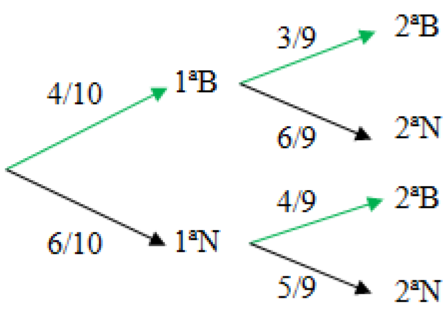
El espacio muestral está formado por 8 sucesos elementales. Con esto, por ejemplo, la probabilidad de obtener 2 caras y una cruz es: $P(2C \text{ y } 1X) = \dfrac{3}{8}$

Probabilidad condicionada
La probabilidad de un suceso A puede verse modificada si ha ocurrido previamente otro suceso B. En este caso se habla de <u>probabilidad de A condicionada por B</u>, y se denota por P(A/B).

Se calcula mediante la fórmula: $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Análogamente, $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$. De donde se deduce que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

Ejemplo:
Si de una urna con 4 bolas blancas (B) y 6 negras (N) se extraen dos bolas consecutivamente, la probabilidad de que la primera bola sea blanca es P(1ªB) = 4/10; pero la probabilidad de que la segunda bola sea blanca se ve condicionada por el resultado de la primera extracción. Si la primera fue blanca, entonces la P(2ªB/1ªB) = 3/9: quedan 9 bolas, de las cuales 3 son blancas. Pero si la primera bola fue N, entonces la P(2ªB/1ªN) = 4/9.
Para el estudio de este experimento puede ser útil elaborar un diagrama de árbol, como el que se muestra a la derecha.



→ Con ayuda de este diagrama se pueden determinar, por ejemplo, las siguientes probabilidades al extraer dos bolas de manera consecutiva:

P(las 2 bolas extraídas sean blancas) = P(BB) = P(1ªB) · P(2ªB/1ªB) = $\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$.

Análogamente:

P(1ªB y 2ªN) = P(1ªB) · P(2ªN/1ªB) = $\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{24}{90}=\frac{4}{15}$.

La probabilidad del suceso extraer una bola blanca y otra negra, independientemente del orden de extracción, es:

P(B y N) = P(1ªB y 2ªN) + P(1ªN y 2ªB) = $\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=2\cdot\frac{24}{90}=\frac{8}{15}$.

Sucesos independientes

Dos sucesos A y B son independientes cuando la probabilidad de que suceda A no se ve afectada porque haya sucedido o no B.

Por tanto, si A y B son independientes: P(A/B) = P(A) y P(B/A) = P(B).

En consecuencia, si los sucesos A y B son independientes se cumple:

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

Ejemplos:

a) En el lanzamiento de dos dados, el resultado del primer dado no condiciona el del segundo. Se trata, pues, de sucesos independientes.

→ Si en este experimento se desea conocer la probabilidad de obtener dos seises, suceso (6, 6), su valor es: P(6, 6) = P(6) · P(6) = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

b) Con las monedas pasa lo mismo, el resultado de la primera moneda no condiciona el de la segunda o tercera. Por tanto, la probabilidad de obtener 3 caras consecutivas será.

P(C, C, C) = P(CCC) = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

Observaciones:

1) Al extraer dos bolas de una urna puede plantearse el dilema de hacerlo sin reemplazamiento (sin reposición; que es equivalente a sacar las dos bolas a la vez) o con reposición (con reemplazamiento: la bola extraída, y vista, vuelve a introducirse en la urna). Si se hace con reemplazamiento el segundo experimento es idéntico al primero y los sucesos de uno y otro son independientes.

2) No deben confundirse sucesos independientes (la probabilidad de uno no depende del otro, y se cumple que $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$) con sucesos incompatibles (no tienen ningún elemento en común, y se cumple que $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$).

Pequeños retos

1. En el experimento del lanzamiento de dos dados, halla:

a) La probabilidad de la suma sea 6.

b) La probabilidad de que si la suma es 6 uno de los resultados sea un 2.

2. Una urna contiene 3 bolas rojas (R), 4 azules (A) y 5 verdes (V). Si de ella se extraen dos bolas de manera consecutiva, halla la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) P(las dos sean rojas) b) P(las dos sean del mismo color) c) P(ninguna sea roja)

Soluciones:

1. a) 5/36. b) 2/5. **2**. a) 6/132 = 1/22. b) 38/132 = 19/66). c) 72/132 = 6/11.