PROBABILIDAD BINOMIAL

La distribución binomial

Es una distribución de probabilidad discreta asociada a un experimento aleatorio definido por las siguientes características:
1) El resultado de una prueba del experimento aleatorio presenta dos únicas opciones, que pueden designarse como: Si o No; éxito (E) o fracaso (F); se cumple o no se cumple...
2) Se realizan n ensayos del experimento, independientes unos de otros.
3) La probabilidad de éxito es constante a lo largo de las n pruebas y suele denotarse por p; esto es, $P(E) = p$. (La probabilidad de fracaso también es constante: vale $1 - p = q$. Esto es, $P(F) = q$).
4) La variable aleatoria X, cuenta el número r de éxitos en las n pruebas: $r = 0, 1,\dots, n$.
Esta variable (binomial) queda determinada por los parámetros n y $p \to$ se denota por $B(n, p)$.

Ejemplos:
a) El experimento de tirar 12 veces una moneda y contar el número de caras que se obtienen es binomial. Cada vez que se tira la moneda se presentan dos opciones, cara y cruz. En cada lanzamiento la probabilidad de cara es constante, P(C) = 0,5. La distribución que mide el numero de caras obtenidas es B(12, 0,5).

b) En un determinado colectivo (ciudad, país…) se pueden realizar los siguientes experimentos aleatorios de carácter binomial:
1) Elegir una persona al azar y preguntarle su edad, considerando, por ejemplo, dos opciones: tener menos de 25 años; o tener 25 o más años. Puede suponerse que P(menos de 25) = 0,3 $\Rightarrow$ P($\geq$25) = 0,7.
El experimento de "preguntar a 10 personas y determinar el número de ellas que son menores de 25 años" se estudia como una B(10, 0,3).
2) Elegir una persona al azar y preguntarle por su situación laboral, considerando, por ejemplo, dos opciones: estar trabajando; o estar en paro. Si se sabe que P(paro) = 0,15 $\Rightarrow$ P(trabajar) = 0,85.
El experimento: "se eligen 8 personas al azar y determinar el número de ellas que están en paro" es de tipo binomial, B(8, 0,15).

Probabilidad de *r* éxitos

Para la distribución de la variable binomial $X = B(n, p)$, la probabilidad de r éxitos en los n intentos realizados, $P(X = r)$, $r = 0, 1,\dots, n$, viene dada por: $P(X = r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$

<u>Observación</u>:
$\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} \to$ (se lee n sobre r) **Ejemplo**: $\binom{15}{4} = \dfrac{15!}{4!(15-4)!} = \dfrac{15!}{4!\,11!} = 1365$.

Ejemplo:
Supóngase que en la Comunidad de Madrid el número de forofos del Real Madrid C.F. es del 60%; siendo el otro 40% no forofo. Si se pregunta a n individuos de Madrid y se pretende determinar cuántos de ellos son forofos del RM, tal experimento puede estudiarse como una $B(n, 0{,}6)$. Para el caso de n = 8 será una B(8, 0,6).
La probabilidad de r forofos, $r = 0, 1, 2,\dots, 8$, entre los 8 individuos preguntados será:

$$P(X = 0) = \binom{8}{0} 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^8 = 1 \cdot 0{,}00065536 = 0{,}00065536.$$

$$P(X=1)=\binom{8}{1}0,6^1 \cdot 0,4^7=8 \cdot 0,0098...=0,00786$$

…

$$P(X=5)=\binom{8}{5}0,6^5 \cdot 0,4^5=56 \cdot 0,000497664=0,27869184$$

Pequeños retos

1. Si se tira 12 veces una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener exactamente 8 caras?

2. Un examen consta de 6 preguntas con 4 posibles respuestas cada una, de las que sólo una de ellas es correcta. Un estudiante que no se había preparado la materia responde completamente al azar marcando una respuesta aleatoriamente. Calcula la probabilidad de que acierte 4 o más preguntas.

3. En cierto país, la probabilidad de que una persona esté en paro es 0,15: P(paro) = 0,15. Si se eligen 8 personas al azar, cual es la probabilidad:
a) De que exactamente 2 de ellas estén en paro.
b) De que al menos 2 de ellas estén en paro.

Solución:
1. 0,12005.
2. B(6, 0,25). $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 0,03759$.
3. a) 0,2376. b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0,34282$.