VECTORES EN EL ESPACIO: DEFINICIONES Y OPERACIONES BÁSICAS

Definición de espacio vectorial

Un conjunto **E** es un espacio vectorial si en él se definen dos operaciones, una interna (suma) y otra externa (producto por números reales, **R**), cumpliendo las siguientes propiedades:

Suma

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

($\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\in$ **E**)

Producto por números

5. $\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$
6. $(\lambda+\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{a}$
7. $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a})$
8. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

($\lambda,\ \mu\in$ **R**)

El vector $\vec{0}$ es el neutro de la suma; $-\vec{a}$ es el opuesto de $\vec{a}$; 1 es el neutro, la unidad, del producto de números reales.
A cualquier elemento de **E** se le llama vector.

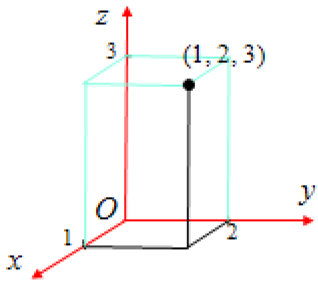
El espacio vectorial R^3

El conjunto de los puntos del espacio, **R**^{3}, es un espacio vectorial. Sus elementos son de la forma (x, y, z) o (a_1, a_2, a_3). Este espacio vectorial es de <u>dimensión</u> 3: largo, ancho y alto. Sus puntos se representan en el triedro cartesiano.

→ Las operaciones suma y producto por números se definen así:

Suma: $(a_1, a_2, a_3)+(b_1, b_2, b_3)=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$

Producto: $\lambda(a_1, a_2, a_3)=(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$



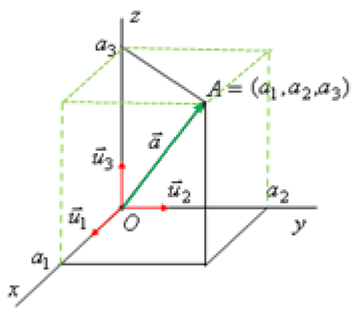
Ejemplos:

a) El elemento nulo de **R**^{3} es (0, 0, 0).
b) El opuesto de (–3, 2, 1) es (3, –2, –1).
c) (2, –7, 0) + 3(–1, 1, 0) – (2, –4, –5) = (2 – 3 – 2, –7 + 3 + 4, 0 + 0 + 5) = (–3, 0, 5).

- **Correspondencia entre puntos y vectores**

Entre puntos de **R**^{3} y vectores libres del espacio existe una biyección:
A cada punto A se le asocia el vector $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$. Se escribe, indistintamente $A=(a_1, a_2, a_3)$ o $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$.

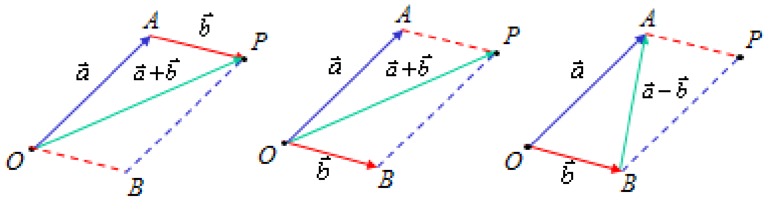
→ El uso de la misma notación para designar puntos y vectores no debe confundir al lector. Habitualmente el contexto aclara su significado. Así, puede decirse "sea el punto (a_1, a_2, a_3)" o "sea el vector (a_1, a_2, a_3)". También suele escribirse $A(a_1, a_2, a_3)$, sin el signo igual, para designar a los puntos.



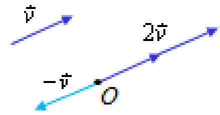
- **La referencia usual en R^3**

Es $\{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, siendo O el origen de coordenadas y $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ los vectores de la <u>base canónica</u>.
Así, al punto $A(a_1, a_2, a_3)$ se le asocia el vector $\vec{a}=a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+a_3\vec{u}_3$; o bien: $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$.
Su representación gráfica se indica en la figura adjunta.
Los ejes de coordenadas suelen denotarse con las letras x, y, z; también suele hablarse de eje OX, eje OY y eje OZ. Para el punto A dado, se tiene: $x=a_1$, $y=a_2$ y $z=a_3$.

Operaciones con vectores libres: interpretación geométrica
Para sumar dos vectores se pone uno a continuación del otro (el origen del segundo en el extremos del primero). El vector suma tiene como origen el origen del primero, y como extremo el extremo del segundo. También puede aplicarse el esquema del paralelogramo, trasladando ambos vectores al origen.



Suma y resta de vectores



Multiplicación de un vector por un número

- **Algebraicamente**, en el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$, para obtener las coordenadas de la suma o del producto se procede como se ha indicado antes.

Esto es, si: $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, entonces:

- $\vec{a}+\vec{b}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$.
- $\vec{a}-\vec{b}=(a_1,a_2,a_3)-(b_1,b_2,b_3)=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$.

<u>Observación:</u> $\overline{BA}=\vec{a}-\vec{b}=(a_1,a_2,a_3)-(b_1,b_2,b_3)$; $\overline{AB}=\vec{b}-\vec{a}=(b_1,b_2,b_3)-(a_1,a_2,a_3)$.

- $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$. Si $\lambda > 0$, el vector $\lambda\vec{a}$ tiene el mismo sentido que $\vec{a}$; si $\lambda < 0$, sentido contrario.

Ejemplos:
Si $A(1, -2, 0)$ y $B(3, -1, 4)$, se tendrá:

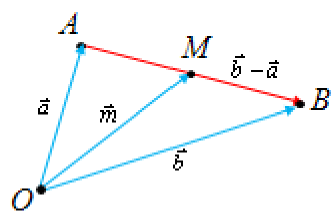
$\vec{a} = (1, -2, 0)$; $\vec{b} = (3, -1, 4)$; $2\vec{a} = 2(1, -2, 0) = (2, -4, 0)$; $-3\vec{a} = -3(1, -2, 0) = (-3, 6, 0)$.

$\overline{BA}=\vec{a}-\vec{b} = (1, -2, 0) - (3, -1, 4) = (-2, -1, -4)$.

$\overline{AB}=\vec{b}-\vec{a} = (3, -1, 4) - (1, -2, 0) = (2, 1, 4)$.

2.3. Punto medio de un segmento
Las coordenadas del punto medio, M, del segmento de extremos

$A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ son $M\left(\dfrac{a_1+b_1}{2},\ \dfrac{a_2+b_2}{2},\ \dfrac{a_3+b_3}{2}\right)$.



Como puede observarse:

$$\overline{OM}=\overline{OA}+\frac{1}{2}\overline{AB} \Rightarrow \vec{m}=\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right).$$

Por tanto, M, tiene las coordenadas indicadas.

Ejemplo:
El punto medio del segmento de extremos $A(1, -2, 0)$ y $B(3, -1, 4)$ es:

$$M\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{-2-1}{2},\ \frac{0+4}{2}\right)=\left(2,\ -\frac{3}{2},\ 2\right).$$

→ Estos conceptos pueden ampliarse pinchando AQUÍ.

Pequeños retos

1. Para $\vec{a} = (1, -2, 3)$ y $\vec{b} = (3, -1, 4)$, halla:

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $2\vec{a} - \vec{b}$ c) $-\vec{a} + 3\vec{b}$ d) $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

2. Dados los puntos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(0, 0, -1)$, halla:
a) Los vectores ***AB*** y ***BC***.
b) El punto medio del segmento de extremos A y B.

Soluciones:
1. a) (4, –3, 7). b) (–1, –3, 2). c) (8, –1, 9). d) $(\lambda + 3\mu, -2\lambda - \mu, 3\lambda + 4\mu)$.
2. a) ***AB*** = (1, 1, 1); ***BC*** = (–2, –1, –1). b) $M = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.