VECTORES EN EL PLANO: DEFINICIONES Y OPERACIONES BÁSICAS

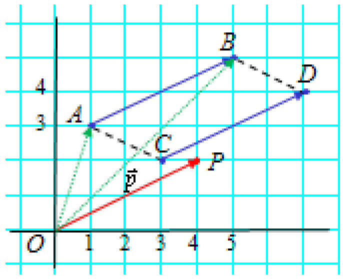
Vector fijo y vector libre

El vector que tiene por origen el punto *A* y por extremo el punto *B*, se llama vector fijo $\overrightarrow{AB}$.

Módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es la longitud del segmento *AB*. Se denota $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es igual a la distancia entre los puntos *A* y *B*: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = d(A, B)$.

Dirección de $\overrightarrow{AB}$ es la de la recta que contiene a *A* y a *B*.

Sentido de $\overrightarrow{AB}$ es el que indica el traslado de *A* a *B*.



- Dos vectores fijos son equipolentes si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, entonces el polígono de vértices *A*, *B*, *D* y *C* (en ese orden) es un paralelogramo.

- Se llama vector libre a un vector y a todos los equipolentes a él. Así, en la figura los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{OP}$ son el mismo libre. El vector $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, con origen en *O* y extremo en *P* puede ser el representante de todos ellos. La ventaja de este último consiste en que para determinarlo basta con dar sólo las coordenadas del punto *P*, extremo del vector.

Ejemplo:

El vector $\overrightarrow{AB}$ de extremos *A*(1, 3) y *B*(5, 5) es equipolente al vector $\overrightarrow{CD}$, de extremos *C*(3, 2) y *D*(7, 4); y ambos equipolentes al vector $\overrightarrow{OP}$ con origen en *O*(0, 0) y extremo en *P*(4, 2). Todos ellos definen al vector $\vec{p}$ = (4, 2).

Puede observarse que las coordenadas de $\vec{p}$ = (4, 2) se obtienen restando las de los puntos *B*(5, 5) y *A*(1, 3), o las de los puntos *D*(7, 4) y *C*(3, 2). Esto es: $\overrightarrow{AB}$ = (5, 5) – (1, 3) = (4, 2); o también, $\overrightarrow{CD}$ = (7, 4) – (3, 2) = (4, 2).

Nota: Como regla mnemotécnica puede servir: $\overrightarrow{AB}$ = punto *B*(5, 5) – punto *A*(1, 3).

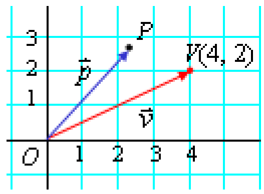
Correspondencia entre puntos y vectores

Entre los puntos de $\mathbf{R}^2$ (del plano cartesiano) y los vectores libres del plano existe una *biyección*:

A cada vector $\overrightarrow{AB}$, equipolente a $\overrightarrow{OP}$, se le asocia el punto *P*.

A cada punto *P* se le asocia el vector $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$.

Se escribe, indistintamente, $P\left(p_1, p_2\right)$ $P = \left(p_1, p_2\right)$ o $\vec{p} = \left(p_1, p_2\right)$. Así, el vector *OV* de la figura es $\vec{v}$ = (4, 2).

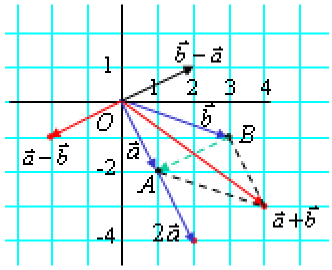


Operaciones con vectores libres: suma y multiplicación de un vector por un número

Si $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$, entonces:

- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.
- $\vec{a} - \vec{b} = (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$.
- $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2)$. Si λ > 0, $\lambda\vec{a}$ tiene el mismo sentido que $\vec{a}$; si λ < 0, tendrá sentido contrario.

Ejemplo:



Si A = (1, –2) y B = (3, –1), se tendrá: $\vec{a}$ = (1, –2); $\vec{b}$ = (3, –1).

$\vec{a}+\vec{b}$ = (1, –2) + (3, –1) = (4, –3).

$2\vec{a}=2\cdot(1,-2)=(2,-4)$.

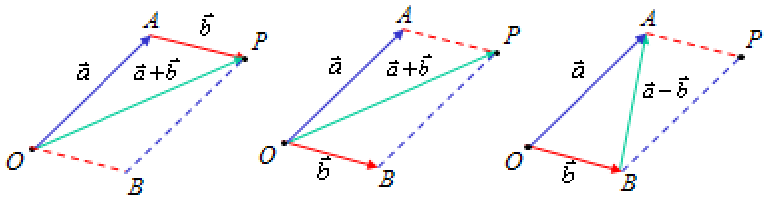
$\vec{b}-2\vec{a}=(3,-1)-2\cdot(1,-2)=(3,-1)-(2,-4)=(1,3)$.

- En general, el <u>vector determinado por dos puntos</u> $A=(a_1,a_2)$ y $B=(b_1,b_2)$, vector $\overrightarrow{AB}$, es $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$.

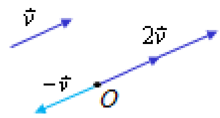
Ejemplo:
Para los puntos A = (1, –2) y B = (3, –1) se tendrá:

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ = (3, –1) – (1, –2) = (2, 1). $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$ = (1, – 2) – (3, –1) = (–2, –1).

<u>Interpretación geométrica de las operaciones con vectores libres</u>
Para sumar dos vectores se pone uno a continuación del otro (el origen del segundo en el extremo del primero). El vector suma tiene como origen el origen del primero, y como extremo el extremo del segundo. También puede aplicarse el esquema del paralelogramo, trasladando ambos vectores al origen.

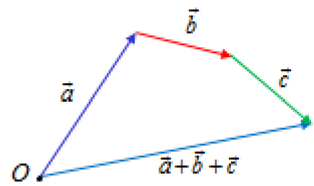


Suma y resta de vectores



Multiplicación de un vector por un número

Para sumar geométricamente varios vectores pueden ponerse uno a continuación del otro. El resultado es el vector que tiene como origen el del primer vector y como extremo, el extremo del último vector.



Pequeños retos

1. Dados los vectores $\vec{a}$ = (–1, 3), $\vec{b}$ = (2, –1) y $\vec{c}$ = (4, 5) calcula:

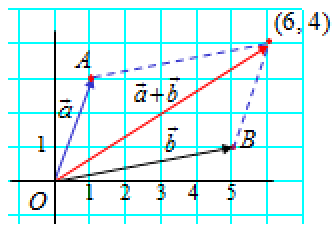
a) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ b) $2\vec{a}-\vec{b}$ c) $\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

2. Dados los puntos A(1, 3), B(5, 1) y C(2, –3), represéntalos y determina las coordenadas de los vectores:

a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{CB}$

d) Halla y representa gráficamente el vector $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

Soluciones:



1. a) (5, 7). b) (–4, 7). c) (1, –5).
2. a) (4, –2). b) (1, –6). c) (–3, –4).
d) Figura.