

ECUACIONES TRIGONOMETRICAS SENCILLAS

Las ecuaciones trigonométricas más elementales y comunes son de la forma:

$$\sin(ax) = b \quad \cos(ax) = b \quad \tan(ax) = b$$

La incógnita es x ; a y b son constantes.

En el caso del seno y coseno el valor de b debe estar entre -1 y 1 : $-1 \leq b \leq 1$.

→ Todas ellas pueden resolverse directamente con la calculadora, con ayuda de las “funciones” \sin^{-1} , \cos^{-1} y \tan^{-1} . (Ver)

Sus soluciones son:

- $\sin(ax) = b \Rightarrow ax = \arcsin b \Rightarrow x = \frac{\arcsin b}{a}$
- $\cos(ax) = b \Rightarrow ax = \arccos b \Rightarrow x = \frac{\arccos b}{a}$
- $\tan(ax) = b \Rightarrow ax = \arctan b \Rightarrow x = \frac{\arctan b}{a}$

Pueden darse variaciones algebraicas elementales, como multiplicar por un número o sumar al paréntesis una constante. Por ejemplo $c \cdot \sin(ax + d) = b$, que se resolvería como sigue:

$$\begin{aligned} c \cdot \sin(ax + d) = b &\Rightarrow \sin(ax + d) = \frac{b}{c} \Rightarrow ax + d = \arcsin \frac{b}{c} \Rightarrow ax = \left(\arcsin \frac{b}{c} \right) - d \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{\left(\arcsin \frac{b}{c} \right) - d}{a} \end{aligned}$$

Idénticamente se procedería con cosenos y tangentes.

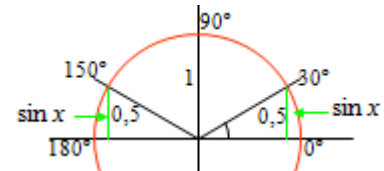
Ejemplos de ecuaciones del tipo $\sin(ax) = b$:

Con la calculadora en el modo DEG:

a) $\sin x = 0,5 \Rightarrow x = \arcsin(0,5) = 30^\circ$.

También hay que indicar $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$.

El conjunto de todas las soluciones es: $x = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$



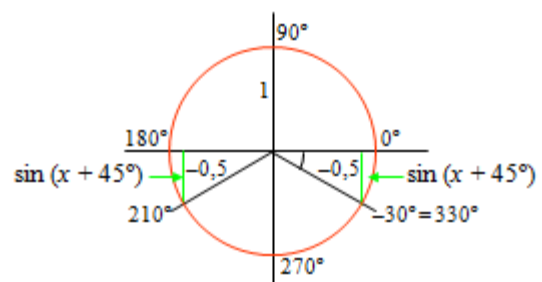
b) $\sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = \arcsin 1 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow x = 30^\circ + k \cdot 120^\circ$.

c) $2 \sin 3x = 1 \Rightarrow \sin 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow 3x = \arcsin \frac{1}{2} \Rightarrow 3x = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 10^\circ + k \cdot 120^\circ \\ 50^\circ + k \cdot 120^\circ \end{cases}$

d) $\sin(x + 45^\circ) = -0,5 \Rightarrow x + 45^\circ = \arcsin(-0,5) \rightarrow$ (La calculadora da la solución $x + 45^\circ = -30^\circ$, el ángulo más cercano a 0°).

Por tanto,

$$\begin{aligned} x + 45^\circ &= \begin{cases} 210^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 330^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \quad (\text{restando } 45^\circ) \rightarrow \\ \Rightarrow x &= \begin{cases} 165^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 285^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \end{aligned}$$



Ejemplos de ecuaciones del tipo $\cos(ax) = b$:

Con la calculadora en el modo RAD:

$$a) \cos x = 0 \Rightarrow x = \arccos 0 \rightarrow x = 1,57 \dots = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi. \text{ También vale } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi.$$

 En este caso, ambas soluciones pueden escribirse como $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$$b) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = \arccos 0 \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = \begin{cases} \pi/2 + 2k\pi \\ 3\pi/2 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 5\pi/6 + 2k\pi \\ 11\pi/6 + 2k\pi \end{cases}$$

$$c) \cos 3x = -1 \Rightarrow 3x = \arccos(-1) \Rightarrow 3x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}.$$

$$d) \cos \frac{x}{2} = 0,5 \Rightarrow \frac{x}{2} = \arccos 0,5 \rightarrow \frac{x}{2} = 1,047 \dots = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = \begin{cases} \pi/3 + 2k\pi \\ 5\pi/3 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 2\pi/3 + 2k\pi \\ 10\pi/3 + 2k\pi \end{cases}$$

Ejemplos de ecuaciones del tipo $\tan(ax) = b$:

Con la calculadora en el modo RAD:

$$a) \tan x = 1 \Rightarrow x = \arctan 1 \Rightarrow x = 0,785 \dots = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$b) \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \arctan \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

$$c) \tan 2x = 4 \Rightarrow 2x = \arctan 4 \Rightarrow 2x = 1,3258 + k\pi \Rightarrow x = 0,6629 + k\frac{\pi}{2}.$$

Advertencia:

Al resolver ecuaciones trigonométricas suelen cometerse algunos errores fatales, casi todos derivados de suponer que sin, cos o tan actúan linealmente. Por ejemplo:

 1) Dar por supuesto que $\sin(2x) = 2\sin x \rightarrow$ grave ERROR.

 Así de $\sin(2x) = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$, que está MUY MAL.

 El mismo error se cometería si de $\sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = -\sqrt{3}$.

 En cambio, está bien lo siguiente: $2\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \dots$

 También sería correcto, por ejemplo: $\frac{\sin x}{3} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$

 2) Otro error fatal sería: $\cos 3x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{3}$. Y también: $\cos \frac{x}{2} = 0,5 \Rightarrow \cos x = 1 \rightarrow$ MAL.

3) En general, estos errores se minimizan si se emplean paréntesis, escribiendo, por ejemplo,

 $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ en lugar de $\sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\rightarrow \rightarrow$ (Pequeños retos)

Pequeños retos

1. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin x = -0,5$

b) $\sin x = -0,63$

c) $2 \sin 3x = \sqrt{2}$

d) $\sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(En todos los casos puedes dar la solución en grados o en radianes).

2. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos x = -0,5$

b) $2 \cos x = \sqrt{2}$

c) $\cos 2x = -1$

d) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\tan x = -1$

b) $\tan x = -\sqrt{3}$

c) $\tan 2x = 1$

d) $3 \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

Soluciones:

$$1. a) x = \begin{cases} 210^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 330^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \cdot b) x = \begin{cases} 219,05^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 320,95^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \cdot c) x = \begin{cases} 15^\circ + k \cdot 120^\circ \\ 45^\circ + k \cdot 120^\circ \end{cases} \cdot d) x = \begin{cases} 480^\circ + k \cdot 720^\circ \\ 600^\circ + k \cdot 720^\circ \end{cases}$$

$$2. a) x = \begin{cases} 2\pi/3 + 2k\pi \\ 4\pi/3 + 2k\pi \end{cases} \cdot b) x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \cdot c) x = \frac{\pi}{4} + k\pi \cdot d) x = 2k\pi$$

$$3. a) x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \cdot b) x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \cdot c) x = \frac{\pi}{4} + k\pi \cdot d) x = 2k\pi$$

→ Si tienes dificultades para pasar de grados a radianes recuerda: $180^\circ = \pi$ radianes.