

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS: \sin^{-1} , \cos^{-1} y \tan^{-1}

Las razones trigonométricas inversas permiten hallar un ángulo del que se conoce su seno, su coseno o su tangente. Esto es, determinan un ángulo cuyo seno, coseno o tangente es igual a un número dado.

→ En las calculadoras aparecen encima de las teclas $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ y $\boxed{\tan}$, como \sin^{-1} , \cos^{-1} y \tan^{-1} .

La forma clásica de referirse a ellas es “arco seno” (arcsen o arcsin), “arco coseno” (arccos) y “arco tangente” (arctag o arctan). Se definen como sigue:

Arco seno (\sin^{-1})

→ En grados:

Para un número y comprendido entre -1 y 1 : $\arcsin y = \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = y$.

→ En radianes:

Si x es un número que representa un valor en radianes, dado otro número y comprendido entre -1 y 1 : $\arcsin y = x \Leftrightarrow \sin x = y$.

Ejemplos:

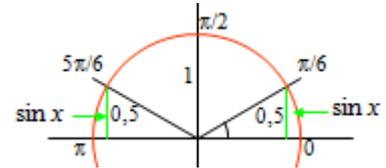
a) $\arcsin 0,5 = 30^\circ$, ya que $\sin 30^\circ = 0,5 \rightarrow$ el valor de $\arcsin 0,5$ se obtiene con la calculadora: tecla \sin^{-1} (que suele activarse pulsando $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ $0,5$ $\boxed{=}$).

Pero también $\arcsin 0,5 = 150^\circ$, pues igualmente, $\sin 150^\circ = 0,5$.

Así pues, hay dos ángulos, en el primer giro, cuyo seno vale $0,5$. Y dos ángulos más en los sucesivos giros. Por tanto, los ángulos α que cumplen que su seno es $0,5$, que es lo que significa

$$\arcsin 0,5 = \alpha, \text{ son: } \alpha = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

$$\text{Las soluciones en radianes serían: } \arcsin 0,5 = x \Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$



b) Salvo en los casos $y = \pm 1$, $\arcsin y$ siempre tiene dos soluciones en la primera vuelta.

$$\arcsin 1 = 90^\circ \quad (\pi/2 \text{ en radianes}); \quad \arcsin(-1) = 270^\circ \quad (3\pi/2 \text{ en radianes}).$$

Arco coseno (\cos^{-1})

→ En grados:

Para un número y comprendido entre -1 y 1 : $\arccos y = \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = y$.

→ En radianes:

Si x es un número que representa un valor en radianes, dado otro número y comprendido entre -1 y 1 : $\arccos y = x \Leftrightarrow \cos x = y$.

(Salvo en los casos $y = \pm 1$, $\arccos y$ siempre tiene dos soluciones).

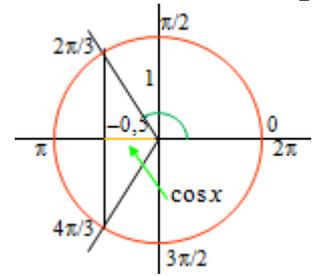
Ejemplos:

a) $\arccos(-0,5) = 120^\circ$, ya que $\cos 120^\circ = -0,5 \rightarrow$ el valor de $\arccos(-0,5)$ se obtiene con la calculadora: tecla \cos^{-1} (que suele activarse pulsando $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\cos}$ $-0,5$ $\boxed{=}$).

Pero también $\arccos(-0,5) = 240^\circ$, pues igualmente, $\cos 240^\circ = -0,5$.

$$\text{En general, } \arccos(-0,5) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \begin{cases} 120^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 240^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

Las soluciones en radianes serían: $\arccos(-0,5) = x \Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$



b) Salvo en los casos $y = \pm 1$, $\arccos y$ siempre tiene dos soluciones en la primera vuelta.
 $\arccos 1 = 0^\circ$ ($\pi/2$ en radianes); $\arccos(-1) = 180^\circ$ ($3\pi/2$ en radianes).

Arco tangente (\tan^{-1})

→ En grados:

Para un número y comprendido entre $-\infty$ y $+\infty$: $\arctan y = \alpha \Leftrightarrow \tan \alpha = y$

→ En radianes:

Si x es un número que representa un valor en radianes, dado otro número y , comprendido entre $-\infty$ y $+\infty$: $\arctan y = x \Leftrightarrow \tan x = y$.

Ejemplo:

$\arctan 1,5 = 56,31^\circ$ ya que $\tan 56,31^\circ = 1,5 \rightarrow$ el valor de $\arctan 1,5$ se obtiene con la calculadora: tecla \tan^{-1} (que suele activarse pulsando $\overline{\text{SHIFT}}$ $\overline{\text{tan}}$ 1.5 $\overline{=}$.)

Pero también $\arctan 1,5 = 236,31^\circ = 56,31^\circ + 180^\circ$, pues igualmente, $\tan 236,31^\circ = 1,5$.

En general: $\arctan 1,5 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 56,31 + k \cdot 180^\circ$.

Las soluciones en radianes serían: $\arctan 1,5 = x \Leftrightarrow x = 0,9828 + k\pi$.

Advertencia:

Al hallar \sin^{-1} , \cos^{-1} y \tan^{-1} , las calculadoras suelen dar el valor más cercano a 0° , que no siempre es la solución buscada. (Recuerda que entre 0° y 360° , en la primera vuelta, hay dos ángulos cuya razón trigonométrica es la misma). Por tanto, el valor del ángulo elegido dependerá de la naturaleza del problema, de los datos conocidos.

Ejemplos:

a) Si se sabe que $\sin \alpha = 0,8$ y que α está en el primer cuadrante, entonces $\alpha = 53,13^\circ$; pero si α estuviese en el segundo cuadrante, entonces habría que tomar $\alpha = 180^\circ - 53,13^\circ = 126,87^\circ$.

b) Si se sabe que $\cos \alpha = 0,4$ y que α está en el primer cuadrante, entonces $\alpha = 66,42^\circ$; pero si α está en el cuarto cuadrante, entonces $\alpha = -66,42^\circ = 360^\circ - 66,42^\circ = 293,58^\circ$.

c) Si $\tan \alpha = -2$ y α está en el segundo cuadrante, entonces $\alpha = 116,57^\circ$; pero si α estuviese en el cuarto cuadrante, entonces $\alpha = 180^\circ + 116,57^\circ = 296,57^\circ = -63,57^\circ$.

Pequeños retos

1. Halla dos valores angulares entre 0° y 360° que sean solución de:

a) $\arcsen(-0,5)$ b) $\arccos 0,866$ c) $\arctan 3$.

2. Halla dos valores numéricos entre 0 y 2π que sean solución de:

a) $\arcsen 0,6$ b) $\arccos 0,5$ c) $\arctan(-1)$.

Solución:

1. a) $-30^\circ = 330^\circ$ y 210° . b) 30° y 330° . c) $71,56^\circ$ y $251,56^\circ$.

2. a) $0,6435\dots$ y $\pi - 0,6435\dots$. b) $1,0471\dots = \pi/3$ y $5\pi/3$. c) $-0,785\dots \rightarrow 7\pi/4$ y $3\pi/4$.