RELACIONES FUNDAMENTALES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Para cualquier ángulo α se cumplen las tres relaciones siguientes:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \text{tag}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \qquad 1 + \text{tag}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Por tanto, conociendo una cualquiera de las razones trigonométricas (y el cuadrante en el que está) se pueden determinar las demás.

Ejemplos:
a) En grados:
Para $\alpha = 25^{\circ}$, $\sin^2 25^{\circ} + \cos^2 25^{\circ} = (0{,}4226\ldots)^2 + (0{,}9063\ldots)^2 = 0{,}1786\ldots + 0{,}8213\ldots = 1$.
También puede comprobarse que $\dfrac{\sin 25^{\circ}}{\cos 25^{\circ}} = \dfrac{0{,}4226...}{0{,}9063...} = 0{,}4663...$, y $\tan 25^{\circ} = 0{,}4663\ldots$

b) Estas relaciones se aplican para determinar las restantes razones trigonométricas a partir de una de ellas. Así:
- Si se sabe que sen α = 0,8, entonces:
  $0{,}8^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 0{,}36 \rightarrow \cos\alpha = \pm 0{,}6$.

El valor de $\text{tag}\,\alpha = \dfrac{0{,}8}{\pm 0{,}6} = \pm 1{,}33...$

- Si $\text{tag}\,\alpha = 2 \Rightarrow 1 + 2^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{5}}$

Como $\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha \cdot \text{tag}\,\alpha \Rightarrow \text{sen}\alpha = \dfrac{2}{\pm\sqrt{5}}$

Nota: El doble signo de los resultados está relacionado con la periodicidad y con la simetría de las funciones trigonométricas. En otro documento se matiza este hecho.

Observaciones y advertencias:
1) Significado de algunas cuestiones de notación:
- Se empleará indistintamente sen α o sin α y tag α o tan α. (El motivo de esta dualidad es que el programa MathType admite mejor sin y tan).
- $\text{sen}^2\alpha$ se lee seno cuadrado de α y su significado es: $\text{sen}^2\alpha = (\text{sen}\,\alpha)^2 = (\text{sen}\,\alpha)\cdot(\text{sen}\,\alpha)$;
- $\cos^2\alpha$ se lee coseno cuadrado de α y su significado es $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$.

Idénticamente, $\text{tag}^2\alpha = (\text{tag}\,\alpha)^2$

- $\text{sen}\,\alpha^2$ se lee seno de α al cuadrado y su significado es $\text{sen}\,\alpha^2 = \text{sen}(\alpha^2) = \text{sen}(\alpha\cdot\alpha)$

Idénticamente, $\cos\alpha^2 = \cos(\alpha^2) = \cos(\alpha\cdot\alpha)$ y $\text{tag}\,\alpha^2 = \text{tag}\,(\alpha^2)$

Por tanto: $\text{sen}^2\alpha \neq \text{sen}\alpha^2$; $\cos^2\alpha \neq \cos\alpha^2$; $\text{tag}^2\alpha \neq \text{tag}\,\alpha^2$

2) $\sin 2\alpha$ se lee seno de dos alfa; su significado es: $\sin 2\alpha = \sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha)$.
- $2\sin\alpha$ se lee dos (por) seno de alfa; su significado es: $2\sin\alpha = 2(\sin\alpha) = \sin\alpha + \sin\alpha$.

Por tanto: $\sin 2\alpha \neq 2\sin\alpha$.
Lo mismo para el coseno y la tangente: $\cos 2\alpha \neq 2\cos\alpha$; $\tan 2\alpha \neq 2\tan\alpha$.
→ Estos significa que las razones trigonométricas no se comportan linealmente; se comportan sinusoidalmente. (En otro documento se dan las fórmulas trigonométricas clásicas para sumas y restas de ángulos.

Ejemplos:

- Calculadora en modo RAD:

a) $\text{sen}^2 3 = (\text{sen } 3)^2 = 0{,}1411^2 = 0{,}0199$ b) $\text{sen } 3^2 = \text{sen } 9 = 0{,}4221$

- Calculadora en modo DEG:

c) $\sin(2 \cdot 30^\circ) = \sin 60^\circ = 0{,}8660$ d) $2 \sin 30^\circ = 2 \cdot 0{,}5 = 1$

Pequeños retos

Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Sabiendo que $\cos \alpha = 0{,}8$, calcula los valores del $\text{sen } \alpha$ y $\tan \alpha$.

b) Sabiendo que $\tan \alpha = \sqrt{3}$, halla los valores de $\text{sen } \alpha$ y $\cos \alpha$.

Solución:

a) $\pm 0{,}6$ y $\pm 0{,}75$. b) $\sqrt{3}/2$ y $0{,}5$.