

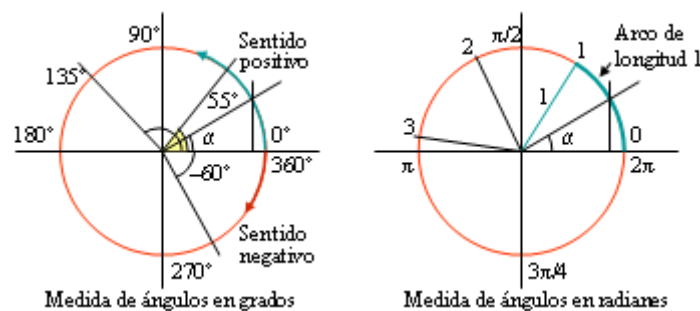
## MEDIDA DE ÁNGULOS: GRADOS Y RADIANES

Un ángulo  $\alpha$  puede medirse en grados o en radianes.

Para representar y medir ángulos suele recurrirse a una circunferencia centrada en el origen. El vértice de cada ángulo se sitúa en el centro, siendo uno de sus lados el eje positivo  $OX$ ; los ángulos se consideran positivos si se miden en sentido inverso al movimiento de las manecillas de un reloj, y negativos en el mismo sentido de dicho movimiento.

- El grado es una medida sexagesimal: un ángulo completo (una vuelta completa) mide  $360^\circ$ . Un ángulo recto mide  $90^\circ$  y un llano,  $180^\circ$ .
- El radian es una medida longitudinal, numérica real: un radian es un ángulo que abarca un arco de longitud igual al radio con el que ha sido trazado. En una circunferencia de radio 1 una vuelta completa son  $2\pi$  radianes; un cuarto de vuelta son  $\pi/2$  radianes; y media vuelta,  $\pi$  radianes.
- La relación entre ambas unidades es  $360^\circ = 2\pi$  radianes  $\approx 6,28$  radianes.

Un ángulo mide 1 radian cuando su "longitud" es 1 radio. Un radian equivale, aproximadamente, a  $57,3^\circ$ .

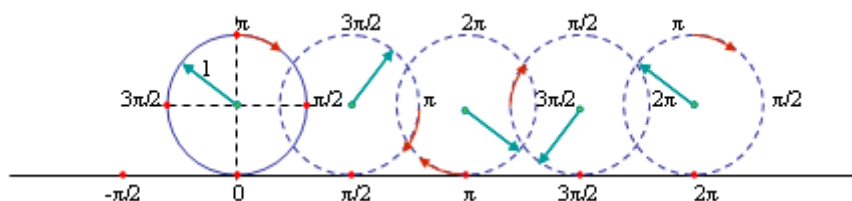


### Observaciones y aclaraciones:

1) Pueden considerarse ángulos de más de una vuelta, mayores de  $360^\circ$ . Por ejemplo  $540^\circ$ , que equivale a dar vuelta y media. En la circunferencia, ese ángulo se representa como  $180^\circ$ . También se pueden tomar ángulos negativos. Por ejemplo  $-30^\circ$  o  $-600^\circ$ ; el ángulo  $-30^\circ$ , cuya abertura es de  $30^\circ$ , se mide en sentido negativo y se representa igual que el ángulo de  $330^\circ$ . El ángulo de  $-600^\circ$  se representa igual que el ángulo de  $120^\circ$ . Para determinar la posición de cualquier ángulo mayor de  $360^\circ$  o negativo se suman o restan vueltas completas, ángulos de  $360^\circ$ . Así:  $540^\circ = 540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$ ;  $-30^\circ = -30^\circ + 360^\circ = 330^\circ$ ;  $-600^\circ = -600^\circ + 720^\circ = 120^\circ$ .

2) Las "igualdades" anteriores se usan sólo para situar los ángulos, pues no puede asumirse como cierto que  $540^\circ = 180^\circ$  o que  $-30^\circ = 330^\circ$ . No obstante las razones trigonométricas de esos ángulos sí serán iguales; esto es:  $\sin 540^\circ = \sin 180^\circ$ ;  $\sin(-30^\circ) = \sin 330^\circ$ ... Por tales motivos no es incoherente que se escriba, por ejemplo,  $-30^\circ = -30^\circ + 360^\circ = 330^\circ$

3) Los radianes son medidas numéricas, números reales; por tanto no es necesario representarlos como ángulos. Suelen representarse, medirse, sobre la recta real. Su situación sería la correspondiente al punto que se obtiene al rodar la circunferencia de radio 1 sobre la recta. (Así,  $\pi$  radianes se corresponde con el número real 3,14...;  $2\pi$  radianes con 6,28...).



4) El grado se utiliza en Geometría elemental; el radian cuando se trabaja con funciones trigonométricas. Por tanto, en Cálculo es preferible utilizar radianes.

5) Las calculadoras disponen de los modos DEG y RAD, para trabajar con grados o radianes, respectivamente. Las abreviaturas sen, cos y tag pueden sustituirse por sin, cos y tan.

Con la calculadora en modo RAD se obtiene:

$$\begin{array}{llllll} \sin 0 = 0; & \sin 0,3 = 0,2955; & \sin 1 = 0,8415; & \sin 8,5 = 0,7984; & \sin (-5,2) = 0,8835 \\ \cos 0 = 1; & \cos 0,3 = 0,9553; & \cos 1 = 0,5403; & \cos 8,5 = -0,6020; & \cos (-5,2) = 0,4685 \\ \tan 0 = 0; & \tan 0,3 = 0,3093; & \tan (\pi/4) = 1; & \tan 2 = -2,1850; & \tan (\pi/2) = \text{Error.} \end{array}$$

### Pequeños retos

1. Expresa en radianes los ángulos:  $45^\circ$ ;  $70^\circ$ ;  $120^\circ$ ;  $240^\circ$ ;  $300^\circ$ ;  $315^\circ$ ;  $600^\circ$ ;  $-30^\circ$ ;  $-720^\circ$ .

2. Expresa en grados los radianes:  $\pi/6$ ;  $1,2$ ;  $3\pi/4$ ;  $5\pi/4$ ;  $2\pi/3$ ;  $3\pi$ ;  $-2\pi/5$ ;  $-3\pi$ .

3. Utilizando la calculadora, halla en el modo que proceda, los valores que se indican:

a) $\sin 30^\circ$	b) $\cos 240^\circ$	c) $\tan 120^\circ$	d) $\tan (2\pi/3)$	e) $\sin 1,5$
e) $\sin (\pi/3)$	f) $\cos (5\pi/3)$	g) $\cos 0,8$	h) $\tan (\pi/2)$	i) $\sin 270^\circ$

### Solución:

1.  $\pi/4$ ;  $1,22$ ;  $2\pi/3$ ;  $4\pi/3$ ;  $5\pi/3$ ;  $7\pi/4$ ;  $10\pi/3$ ;  $-\pi/6$ ;  $-4\pi$ .

2.  $30^\circ$ ;  $68,75^\circ$ ;  $135^\circ$ ;  $225^\circ$ ;  $120^\circ$ ;  $540^\circ$ ;  $-36^\circ$ ;  $-540^\circ$ .

3. a) 0,5. b)  $-0,5$ . c) 1,73. d) 1,73. e) 0,997. e) 0,866. f) 0,5. g) 0,697. h) No está definida. i)  $-1$