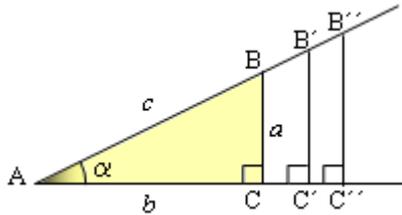


RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

La trigonometría se utiliza en la vida cotidiana para solucionar problemas en triángulos: medidas de sus lados o de sus ángulos. Para ello aplica las razones (funciones) trigonométricas seno, coseno y tangente, y otras derivadas de ellas.

- Las funciones trigonométricas se utilizan como modelos matemáticos en todo tipo de fenómenos periódicos.
- En las definiciones de las razones trigonométricas intervienen dos teoremas importantes en geometría: el de Tales y el de Pitágoras.

→ El teorema de Tales establece la proporcionalidad entre las longitudes de los lados de triángulos semejantes. Aquí se particularizará para triángulos rectángulos.



Así, en los triángulos de la figura adjunta se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'} = \frac{B''C''}{AC''}; \quad \frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \dots; \quad \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \dots$$

→ El teorema de Pitágoras establece la relación entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

Si las medidas de los catetos son a y b , y la de hipotenusa mide c , entonces se cumple que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

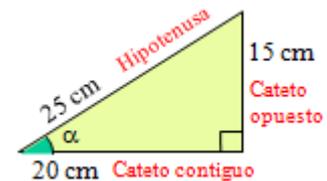
Dado un ángulo cualquiera, α , que se sitúa en un triángulo rectángulo como el de la figura, se definen las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, como siguen:

$$\text{sen } \alpha = \sin \alpha = \frac{CB}{AB} = \frac{a}{c}; \quad \text{cos } \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}; \quad \text{tag } \alpha = \tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$

Observaciones y aclaraciones:

1) El seno relaciona la medida de la altura (del cateto opuesto al ángulo) con la de la hipotenusa; el coseno, la medida de la base (del cateto contiguo al ángulo) con la hipotenusa.

En el triángulo adjunto: $\text{sen } \alpha = \frac{15}{25} = 0,6$; $\text{cos } \alpha = \frac{20}{25} = 0,8$.



2) La tangente relaciona la altura con la base (desplazamiento vertical respecto al horizontal). La tangente mide la pendiente del ángulo, la inclinación de la hipotenusa.

Que $\text{tag } \alpha = \frac{15}{20} = 0,75$ significa que un desplazamiento unitario a la derecha (de 1 cm, de 1 m) acarrea una elevación de 0,75 (cm, m).

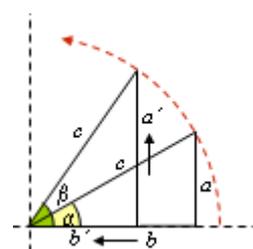
3) Las razones trigonométricas no dependen de las medidas de los lados del triángulo: sólo dependen del valor del ángulo. (El seno, el coseno o la tangente de α valen lo mismo en cualquiera de los triángulos de arriba: ABC, AB'C', AB''C''...). Esto permite tabular los valores de estas razones. En las calculadoras pueden obtenerse con las teclas **sin**, **cos** y **tan**

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{sen } 30^\circ &= 0,5; \quad \text{sen } 35^\circ = 0,573\dots; \quad \text{cos } 40^\circ = 0,766\dots; \quad \text{cos } 70^\circ = 0,342\dots; \\ \text{tan } 3^\circ &= 0,052\dots; \quad \text{tan } 88^\circ = 28,636\dots \end{aligned}$$

4) Para ángulos más grandes el seno es mayor, mientras que el coseno es menor; pero sus valores siempre estarán entre 0 y 1, ya que la hipotenusa (el denominador) siempre mide más que los catetos. El valor de la tangente aumenta desde 0 hasta infinito a medida que el ángulo se hace más grande, desde 0° a 90°.)

$$\text{Así: } \sin \alpha = \frac{a}{c} < \sin \beta = \frac{a'}{c}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} > \cos \beta = \frac{b'}{c}$$



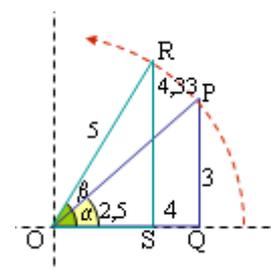
Ejemplo:

Los triángulos OPQ Y ORS de la figura adjunta tienen la misma hipotenusa, 5; sus catetos varían. En OPQ, las razones trigonométricas del ángulo α valen:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0,6; \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8; \quad \text{tag } \alpha = \frac{3}{4} = 0,75$$

En ORS, las razones trigonométricas del ángulo β valen:

$$\sin \beta = \frac{4,33}{5} = 0,866; \quad \cos \beta = \frac{2,5}{5} = 0,5; \quad \text{tag } \beta = \frac{4,33}{2,5} = 1,73$$



Pequeños retos

Los catetos de un triángulo rectángulo miden 7 y 9 cm. Halla su hipotenusa y el valor de las razones trigonométricas de sus ángulos agudos.

Solución:

$$c = \sqrt{140} \approx 11,83. \quad \sin \alpha = 0,59; \quad \cos \alpha = 0,76; \quad \tan \alpha = 0,78.$$

$$\sin \beta = 0,76; \quad \cos \beta = 0,59; \quad \tan \beta = 1,29.$$

