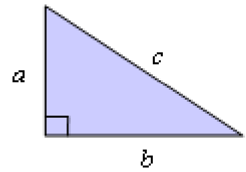
TEOREMA DE PITÁGORAS: ALGUNAS APLICACIONES

El teorema de Pitágoras establece la relación entre las medidas de los lados de los triángulos rectángulos. Esa relación es:
"En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es iguala a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos".



Si los catetos miden *a* y *b* y la hipotenusa *c*, entonces: $c^2 = a^2 + b^2$

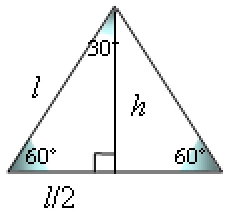
Aplicaciones del teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras puede aplicarse siempre que aparezcan triángulos rectángulos. Como la clave del triángulo rectángulo es la existencia de un ángulo de 90º, siempre que surja un ángulo recto hay que buscar la posibilidad de aplicar Pitágoras. Pero esto es frecuente en muchos problemas de geometría. Por ejemplo:

- La altura de un triángulo es perpendicular al lado de la base (forma un ángulo recto).
- La altura de un triángulo divide al triángulo inicial en dos triángulos rectos.
- La altura de un triángulo isósceles con base el lado desigual divide al triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos iguales.
- Los cuadrados y los rectángulos pueden partirse, mediante la diagonal, en dos triángulos rectángulos.
- Todo polígono regular puede descomponerse en triángulos isósceles, y estos en triángulos rectángulos.
- Toda cuerda de una circunferencia forma, con sus extremos y el centro de esa circunferencia como vértices, un triángulo isósceles; luego, con vértice en el centro, pueden formarse triángulos rectángulos.
- La distancia entre dos puntos puede obtenerse aplicando el teorema de Pitágoras.
- El módulo de un vector puede obtenerse aplicando el teorema de Pitágoras.
- La ecuación de una circunferencia puede obtenerse aplicando el teorema de Pitágoras.

Ejemplos 1:

En un <u>triángulo equilátero</u>, para cualquier vértice, la altura divide al triángulo en dos triángulos rectángulos de hipotenusa el lado del triángulo y uno de sus catetos igual a la mitad del lado (de la base). Por tanto, la altura podría hallarse aplicando el teorema de Pitágoras.



Esto es: $l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}\cdot l}{2}$.

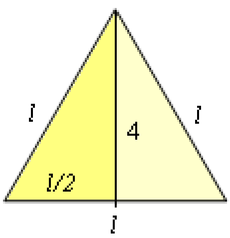
Por lo mismo, conociendo la altura puede calcularse la medida del lado.

→ Si el lado de un triángulo equilátero mide 15 cm, su altura valdrá: $h = \frac{\sqrt{3}\cdot 15}{2} \approx 13$ cm.

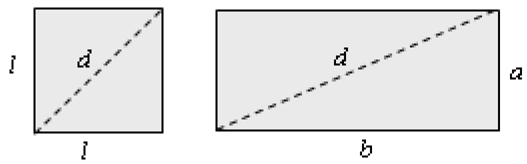
→ Si la altura de un triángulo equilátero mide 4 cm, entonces:

$$l^2 = 4^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow l^2 = 16 + \frac{l^2}{4} \Rightarrow 4l^2 = 64 + l^2 \Rightarrow 3l^2 = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l^2 = \frac{64}{3} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \approx 4{,}61$$



Ejemplo 2:
En los cuadrados y en los rectángulos puede hallarse la diagonal cuando se conocen los lados.
En el cuadrado: $d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2} \cdot l$.

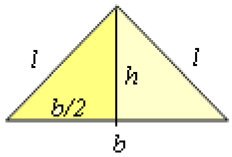


También podría hallarse el lado conociendo la diagonal.
En el rectángulo: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.
También podría hallarse un lado conociendo la diagonal y el otro lado.

→ Si el lado de un cuadrado vale 6 cm, su diagonal es $d = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8{,}48$.

→ Si la diagonal de un rectángulo mide 10 cm y su base mide 8 cm, entonces puede calcularse su altura, y vale: $a^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow a = 6$ cm.

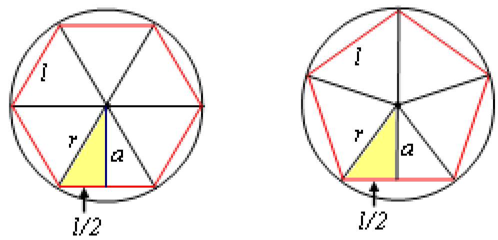
Ejemplo 3:
En un triángulo isósceles la altura correspondiente al lado desigual divide al triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos de hipotenusa el lado del triángulo y uno de sus catetos igual a la mitad del otro lado. Por tanto, conociendo los lados, la altura podría hallarse aplicando el teorema de Pitágoras.



→ Si en el triángulo adjunto el lado l = 5 cm y la base b = 6 cm, se cumple:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow 5^2 = h^2 + 4^2 \Rightarrow 25 - 16 = h^2 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3.$$

Ejemplo 4:
En los polígonos regulares pueden establecerse relaciones pitagóricas entre el lado del polígono, su apotema y el radio de la circunferencia circunscrita.



Como puede observarse, se establece la relación:

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

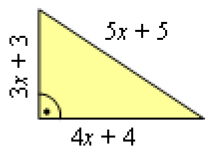
Por tanto, conociendo dos de las tres medidas puede obtenerse la otra.

Pequeños retos

1. Comprueba si son rectángulos (o no son), los triángulos de lados:
a) 9, 11 y 14 cm. b) 12, 35 y 37 cm. c) 1,7, 0,8 y 1,5 m.

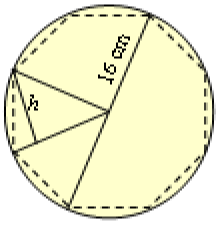
2. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 5 cm. Si su base mide 6 cm, ¿cuánto medirá su altura? Halla su área y su perímetro.

3. Sabiendo que el triángulo adjunto es rectángulo, halla el valor de x.



4. Halla el área de un cuadrado de diagonal 10 metros.

5. En una circunferencia de diámetro 16 cm se inscribe un octógono regular.
a) Dibuja la circunferencia y el octógono.
b) Halla el área del octógono.
(Sugerencia: halla la altura de uno de los triángulos del octógono.)



Soluciones:
1. a) No. b) Sí. c) Sí.
2. 12 cm^2; 16 cm.
3. $x = 2$.
4. 50 m^2.
5. $h = 4\sqrt{2}$. Obsérvese que el triángulo sombreado es rectángulo e isósceles.
$S = 128\sqrt{2}$