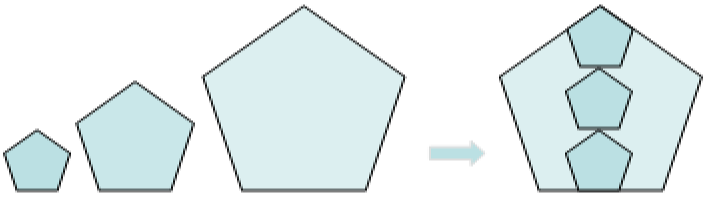
SEMEJANZA DE FIGURAS

Figuras semejantes

Dos figuras son semejantes cuando los segmentos determinados en una de ellas son proporcionales a sus correspondientes en la otra.
El cociente de las longitudes de los dos segmentos correspondientes se llama razón de semejanza o escala, k.



En este caso, la razón de semejanza entre el pentágono grande y el pequeño vale 3.

En las figuras semejantes los ángulos son iguales y las distancias proporcionales.

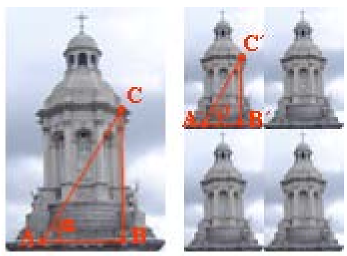
- Intuitivamente, puede decirse que dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma, sin deformaciones: son iguales salvo en su tamaño; una es más grande que otra. Las ampliaciones o reducciones fotográficas son semejantes.

Que no haya deformaciones significa que los ángulos formados en una de ellas son iguales a los correspondientes en la otra.

Ejemplos:

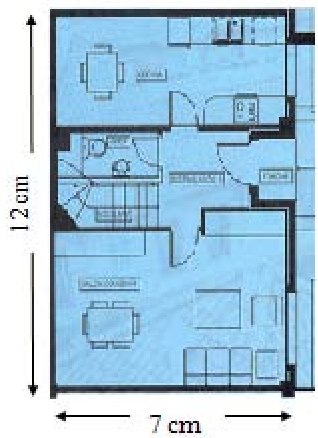
a) La razón de semejanza entre las dos fotografía de la derecha es k = 0,5. Si se divide la medida de cualquier distancia de la foto pequeña por su correspondiente en la otra, el cociente es 0,5:

$$\frac{\text{distancia}(A', B')}{\text{distancia}(A, B)} = 0{,}5. \text{ Igualmente, } \frac{\text{distancia}(A', C')}{\text{distancia}(A, C)} = 0{,}5.$$



Los ángulos de los vértices A y A' son iguales.
Los triángulos de vértices A, B, C y A', B', C', dibujados en las fotografías también son semejantes.

b) Los planos, los mapas y las maquetas son representaciones semejantes de sus correspondientes en la realidad. En todos los casos, la razón de semejanza viene expresada por la escala. Así, un plano hecho a escala 1 : 100 indica que 1 cm del plano equivale a 100 cm (1 metro) en la realidad; y al revés, cada metro de la realidad debe representarse como 1 cm en el plano.



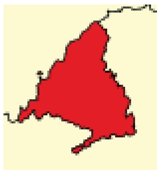
Semejanza en superficies

Mirando las fotos anteriores puede observarse que las cuatro fotos pequeñas ocupan la misma superficie que la foto semejante más grande. Esto es así porque la razón de semejanza es k = 1/2.
En efecto, si las dimensiones de la foto grande son x e y, las de la pequeña serán x/2 e y/2. Luego, el área de la grande será $S = xy$; y la de la pequeña,

$$S' = \frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2} = \frac{xy}{4} = \frac{S}{4} \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{1}{4}.$$

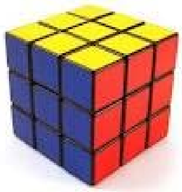
- En general, si dos figuras son semejantes con razón de semejanza k, la razón de semejanza de sus áreas será k^2.

Ejemplo:



La comunidad de Madrid tiene una superficie aproximada de 8000 km^2. En un mapa a escala 1 : 100000 (aquí k = 0,00001 = 10^{-5}), la comunidad de Madrid tendrá una superficie de $8000 \cdot (10^{-5})^2 = 8000 \cdot 10^{-10}$ km^2 = 0,8 m^2.

Semejanza en volúmenes



En la figura adjunta puede observarse un cubo de Rubik. En cada cara del cubo se dibujan 9 cuadrados, cuyo lado es 1/3 del lado de la cara grande.

La razón de semejanza de las áreas de las caras de los cubos es $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$.

El cubo grande está formado por 27 cubos más pequeños. La razón de semejanza de las aristas de los cubos es 1/3. Si V es el volumen del cubo grande y V' el de cada cubo pequeño, se cumple que $V = 27 \cdot V' \Rightarrow \dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{27} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3$.

- En general, si dos figuras son semejantes con razón de semejanza k, la razón de semejanza de sus volúmenes será k^3.

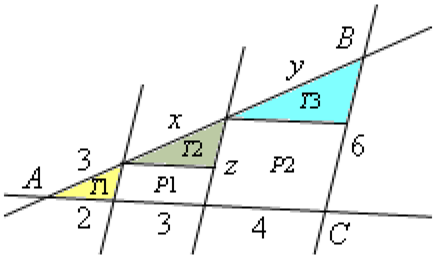
Observación: Si dos figuras semejantes están construidas con material de la misma densidad, la razón de semejanza de sus pesos también será k^3.

Pequeños retos

1. En uno de los ejemplos anteriores se da el plano de una casa a escala 1 : 100. Si las dimensiones del plano fuesen 12 × 7 cm:
a) ¿Cuáles serían las dimensiones reales de la casa?
b) ¿Cuál es, en metros cuadrados, la superficie de la casa?

2. La maqueta de un rascacielos en forma de prisma cuadrangular mide 5 cm de lado por 22 cm de alto. Si está hecha a escala 1 : 1000, ¿cuáles son las medidas de ese edificio en la realidad? ¿Qué volumen ocupa la maqueta y cuál será el volumen real del rascacielos?

3. a) Aplicando el teorema de Tales halla los valores de x, y, z indicados en la figura adjunta (los demás valores se dan en cm).
b) ¿Cuál es la razón de semejanza entre las áreas del triángulo ABC con cada uno de los triángulos coloreados?
c) Sabiendo que el área del triángulo ABC vale 21,52 cm^2, ¿cuánto valdrá el área de cada uno de los triángulos coloreados?
d) ¿Cuál es el área de cada uno de los paralelogramos que se dibujan en la figura?



Soluciones:

1. a) 12 m × 7 m. b) 84 m^2.
2. Medidas: 50 m de lado; 220 m de altura.
Volumen de la maqueta: 550 cm^3. Volumen real: 55000 m^3

3. a) $x = \dfrac{9}{2}$; $y = 6$; $z = \dfrac{30}{9}$. b) $\left(\dfrac{2}{9}\right)^2$; $\left(\dfrac{3}{9}\right)^2$; $\left(\dfrac{4}{9}\right)^2$.
c) $T1$ = 1,06 cm^2; $T2$ = 2,39 cm^2; $T1$ = 4,25 cm^2. d) $P1$ = 3,19 cm^2; $P2$ = 10,63 cm^2.