PRODUCTO VECTORIAL DE VECTORES EN EL ESPACIO: APLICACIONES

Definición de producto vectorial de vectores en R^3

Dados dos vectores $\vec{v}=(a_1,b_1,c_1)$ y $\vec{w}=(a_2,b_2,c_2)$ su producto vectorial es el vector:

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\vec{u}_1-\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}\vec{u}_2+\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\vec{u}_3$$

siendo $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ los vectores de la base canónica.

Nota: Se escribe la expresión mediante un "determinante" por su facilidad de retención, pero en modo alguno es un determinante, ya que el determinante de una matriz es un número, mientras que el producto vectorial es un vector. En este caso sólo tiene sentido si se desarrolla por la primera fila.

Ejemplo:

Si $\vec{v}=(1,1,-1)$ y $\vec{w}=(1,2,0)$, $\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=2\vec{u}_1-\vec{u}_2+\vec{u}_3=(2,-1,1)$.

- **Algunas propiedades** del producto vectorial son:

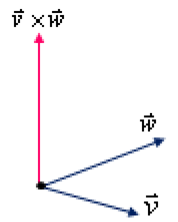
1. $\vec{v}\times\vec{w}=-\vec{w}\times\vec{v}$.
2. $k(\vec{v}\times\vec{w})=(k\vec{v})\times\vec{w}=\vec{v}\times(k\vec{w})$), siendo k un escalar, un número.
3. El vector $\vec{v}\times\vec{w}$ es perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
4. El valor del módulo del producto vectorial vale: $|\vec{v}\times\vec{w}|=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot|\text{sen}(\vec{v},\vec{w})|$.
5. Si $\vec{v}\times\vec{w}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos (proporcionales, linealmente dependientes).
6. Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes $\Rightarrow\{\vec{v},\vec{w},\vec{v}\times\vec{w}\}$ forman base de **R**^{3}.

Ejemplo:

Se ha visto más arriba que si $\vec{v}=(1,1,-1)$ y $\vec{w}=(1,2,0)\Rightarrow\vec{v}\times\vec{w}=(2,-1,1)$. Para ver que $\vec{v}\times\vec{w}$ es perpendicular a $\vec{v}$ y a $\vec{w}$, basta con multiplicar escalarmente. Así:

$(\vec{v}\times\vec{w})\cdot\vec{v}=(2,-1,1)\cdot(1,1,-1)=2-1-1=0$;

$(\vec{v}\times\vec{w})\cdot\vec{w}=(2,-1,1)\cdot(1,2,0)=2-2+0=0$.

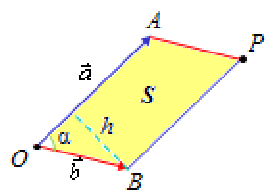


$\rightarrow$ Esta propiedad permite obtener un vector perpendicular a dos vectores dados, entre otras aplicaciones. Hay infinitos vectores perpendiculares, a la vez, a $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Todos son de la forma $k\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$.

Aplicación del producto vectorial: áreas

El módulo del vector $\vec{a}\times\vec{b}$, es igual al área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Esto es: $|\vec{a}\times\vec{b}|$ = área del paralelogramo *OAPB*.

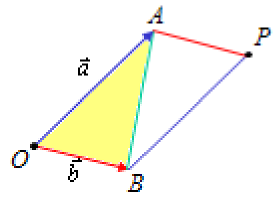


Justificación: El área de un paralelogramo se halla multiplicando la longitud una de sus bases por la altura sobre ella. En la figura,

$$S=|\vec{a}|\cdot h=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\text{sen}\,\alpha\ \text{, pues }\ \text{sen}\,\alpha=\frac{h}{|\vec{b}|}.$$

Por la propiedad 4 se sabe que $|\vec{v}\times\vec{w}|=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot|\text{sen}(\vec{v},\vec{w})|$, luego, $S=|\vec{a}\times\vec{b}|$.

→ Como consecuencia de lo anterior, $\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ = área del triángulo *OAB*, determinado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

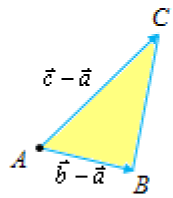


Ejemplos:

a) El área del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ = (1, 2, 3) y $\vec{b}$ = (2, –1, 1) es el módulo del vector

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(5,5,-5)$$. Por tanto, su área $=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{25+25+25}=5\sqrt{3}$ u^2.

b) Dados los puntos *A*(1, 0, 1), *B*(2, 0, –1) y *C*(0, 1, 4), el área del triángulo que determinan, *ABC*, viene dada por $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$.



Como $\overrightarrow{AB}$ = (2, 0, –1) – (1, 0, 1) = (1, 0, –2) y $\overrightarrow{AC}$ = (0, 1, 4) – (1, 0, 1) = (–1, 1, 3),

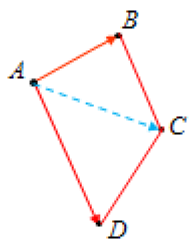
se deduce que $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix}=(2,\ -1,\ 1)$.

Luego, el área del triángulo *ABC* = $\frac{1}{2}\sqrt{4+1+1}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ u^2.

c) Para determinar el área de un cuadrilátero (no necesariamente paralelogramo) se puede descomponer en dos triángulos. Así, si los vértices de un cuadrilátero son los anteriores *A*, *B*, *C* y *D*(2, –1, 1), su área es la suma de las áreas de los triángulos *ABC* y *ACD*.

Área del cuadrilátero *ABCD* = $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|+\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right|$.

→ Para ver que el cuadrilátero no es un paralelogramo basta con ver que los vectores ***AB*** y ***DC*** no son iguales.



Pequeños retos

1. Dados los vectores $\vec{a}=(-1,\ 2,\ 4)$, $\vec{b}=(3,\ -1,\ 2)$ y $\vec{c}=(2,\ -4,\ -8)$, halla:

a) $\vec{a}\times\vec{b}$ y $\vec{a}\times\vec{c}$. b) Comprueba que $\vec{a}\times\vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$.

c) ¿Por qué $\vec{a}\times\vec{c}$ = 0?

2. Dados los puntos *A*(1, –2, 1), *B*(2, 1, –1), *C*(0, 1, 2) y *D*(–1, –2, 4), halla:

a) El área de los triángulos *ABC* y *ACD*.

b) ¿Es el cuadrilátero de vértices *A*, *B*, *C* y *D* un paralelogramo?

Soluciones:

1. a) $\vec{a}\times\vec{b}$ = (4, –5, –6); $\vec{a}\times\vec{c}$ = (0, 0, 0). b) Hay que ver que $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0$ y $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0$.

c) Son vectores linealmente dependientes.

2. a) Tienen la misma área = $\frac{1}{2}\sqrt{118}$. b) Sí, pues $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(1,\ 3,\ -2)$.