PRODUCTO MIXTO DE VECTORES EN EL ESPACIO: APLICACIONES

Definición

Dados tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, su producto mixto es un número real, que se designa por $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, y se define como:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Primero se hace el producto vectorial, después el escalar; en consecuencia, el resultado del producto mixto es un número real.

Si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, el valor del producto mixto es:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

Dados los vectores $\vec{a}$ = (3, –1, 2), $\vec{b}$ = (1, –2, 1) y $\vec{c}$ = (0, 5, –4), su producto mixto vale:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (8 - 5) - 1 \cdot (4 - 10) = 9 + 6 = 15.$$

- **Algunas propiedades del producto mixto**

1. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$.
2. $k \cdot [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [k\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, siendo k un escalar.
3. $[\vec{a} + \vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}]$.
4. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente dependientes.

Todas estas propiedades se demuestran fácilmente aplicando las propiedades de los determinantes.

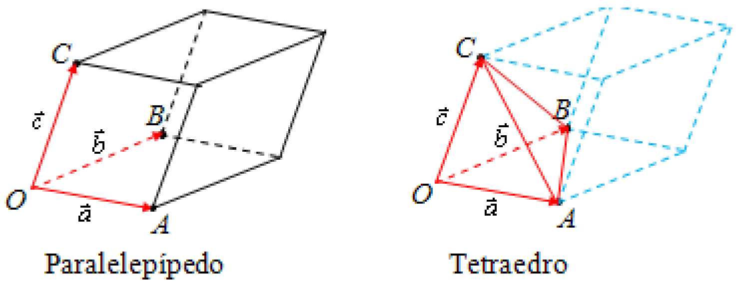
- **Aplicaciones del producto mixto: volúmenes**

El valor absoluto del producto mixto de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es igual al volumen del paralelepípedo determinado por esos vectores. Esto es:

$V_P = \left| [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \right|$ = volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Como consecuencia, la sexta parte de ese valor da el volumen del tetraedro determinado por esos mismos vectores. Esto es:

$V_T = \frac{1}{6} \left| [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \right|$ = volumen del tetraedro determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

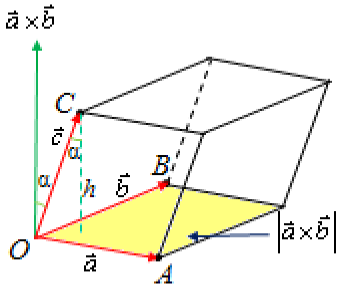


Justificación:

El producto mixto:

$$[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\,] = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)$$

Como $\cos\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)=\cos\alpha=\dfrac{h}{|\vec{c}|} \Rightarrow h=|\vec{c}|\cos\alpha$.



Por tanto, $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot h$; pero este producto da el valor del volumen de un paralelepípedo = área de la base por la altura.

Por tanto: $V_P=\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|$.

Para el tetraedro, cuyo volumen es $V_T=\dfrac{1}{3}\cdot(\text{área de la base por la altura})=\dfrac{1}{3}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot h$, y puesto que su base es la mitad que la del paralelepípedo, se tendrá que $V_T=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot h$.

Esto es, $V_T=\dfrac{1}{6}\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|$.

Ejemplos:

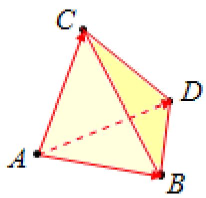
a) El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a}$ = (3, 1, 2), $\vec{b}$ = (−1, 2, 0) y $\vec{c}$ = (1, 5, −4) vale:

$$V_P=\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|=\left\|\begin{matrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 5 & -4\end{matrix}\right\| = \left|3\cdot(-8)-1\cdot 4+2\cdot(-5-2)\right| = \left|-42\right| = 42\ \text{u}^3.$$

El volumen del tetraedro determinado por los mismos vectores será $V_T=\dfrac{1}{6}\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|$ = 7 u^3.

b) Los puntos A(1, 0, 1), B(2, 0, −1), C(0, 1, 4) y D(1, −2, 3), determinan el tetraedro de vértices *ABCD*.

El volumen de este tetraedro viene dado por $\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|$.



Como $\overrightarrow{AB}$ = (1, 0, −2), $\overrightarrow{AC}$ = (−1, 1, 3) y $\overrightarrow{AD}$ = (0, −2, 2), su volumen es:

$$V_T=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 3\\ 0 & -2 & 2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\left|1\cdot 12-2\cdot 2\right|=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\ \text{u}^3.$$