PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA

Una proporción es la igualdad de dos razones; esto es, una igualdad de la forma: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Los términos *a* y *d* se llaman *extremos* de la proporción; *b* y *c* se llaman *medios*.

- En toda proporción se verifica que el producto de los medios es igual al producto de los extremos; esto es: $ad = bc$.
- Esta propiedad permite encontrar el valor desconocido de uno cualquiera de los cuatro términos de la proporción, conocidos los otros tres.

Cuarta proporcional

- Conocidos los términos *a*, *b*, y *c*, el valor de *d*, supuesto desconocido, recibe el nombre de cuarta proporcional. En la igualdad $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$, la cuarta proporcional es *x*.

→ Dados tres segmentos de longitudes *a*, *b*, y *c*, utilizando el teorema de Tales se puede construir la cuarta proporcional, como se verá más abajo.

Tercera proporcional

- Si en la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ los valores de *b* y *c* son iguales, el valor *d* recibe el nombre de tercera proporcional. En la igualdad $\frac{a}{b}=\frac{b}{x}$, la tercera proporcional es *x*.

→ Dados dos segmentos de longitudes *a* y *b*, utilizando el teorema de Tales se puede construir la tercera proporcional, como se verá más abajo.

Media proporcional

- Cuando los dos medios son iguales, la proporción queda $\frac{a}{b}=\frac{b}{d}$. En este caso, se dice que *b* es la media proporcional entre *a* y *d*. En la igualdad $\frac{a}{x}=\frac{x}{d}$, la media proporcional es *x*.

Obsérvese que $x^2 = a\cdot d \Leftrightarrow x=\sqrt{a\cdot d}$.

La media proporcional de dos números también se llama media geométrica.

→ Para la construcción de la media proporcional se necesita conocer el teorema de la altura.

Ejemplos:

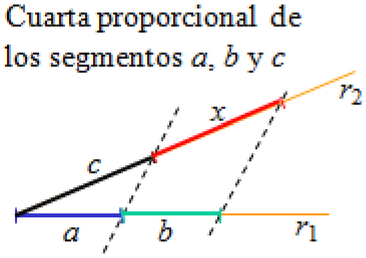
a) Algebraicamente, el cálculo de *x* en cualquiera de las proporciones anteriores es inmediato; basta con despejar. Así:

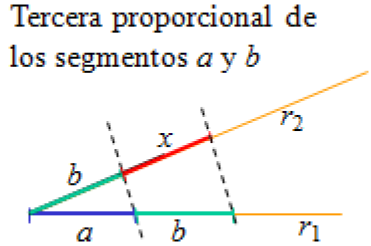
1) de $\frac{2}{3}=\frac{5}{x} \Rightarrow x=\frac{15}{2}$ → sería la cuarta proporcional.

2) de $\frac{8}{7}=\frac{7}{x} \Rightarrow x=\frac{49}{8}$ → sería la tercera proporcional.

3) de $\frac{3}{x}=\frac{x}{4} \Rightarrow x^2=12 \Rightarrow x=\sqrt{12}$ → sería la media proporcional.

b) Geométricamente, la determinación de la cuarta y de la tercera proporcional es sencilla aplicando el teorema de Tales. Los siguientes esquemas gráficos resuelven el problema.



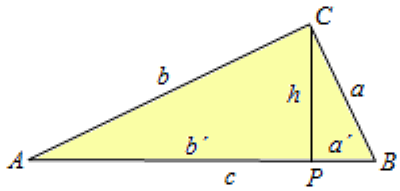


→ Sobre las rectas r_1 y r_2 se representan los segmentos de longitud a, b y c (o de nuevo b); y se trazan las líneas de puntos, paralelas.

Por Tales resulta evidente que: $\frac{a}{b}=\frac{b}{x}$ en el dibujo de la izquierda; y $\frac{a}{x}=\frac{x}{d}$, en el de la derecha.

c) Para la construcción de la media proporcional se necesita conocer el teorema de la altura, que dice lo siguiente:

"En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre la proyección de los catetos sobre ella". Esto es, para el triángulo *ACB*, con ángulo recto en *C*, se cumple que $\frac{b'}{h}=\frac{h}{a'}$.



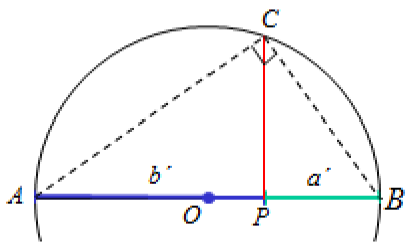
<u>Construcción de la media proporcional de dos segmentos dados</u>

Conocidos los segmentos de longitudes a' y b', su media proporcional se encuentra así:

1) Se colocan los segmentos seguidos, uno a continuación del otro, y se traza una circunferencia de diámetro $a' + b'$. En el dibujo adjunto $a' = AP$ y $b' = PB$

2) Por el punto de unión de los segmentos, *P*, se traza una perpendicular al diámetro (segmento $a' + b'$), que cortará a la circunferencia en el punto *C*.

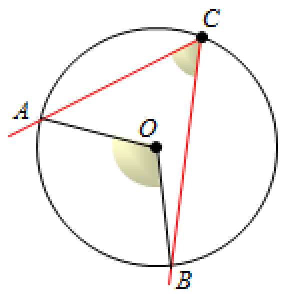
3) Como el triángulo de vértices *A*, *B* y *C* es rectángulo(*), el segmento *PC* es la media proporcional de los segmentos a' y b', pues *PC* es la altura sobre la hipotenusa.



(*) <u>Propiedad de los ángulos inscritos</u>:

Todo ángulo inscrito en una circunferencia vale la mitad que el ángulo central correspondiente (el que abarca el mismo arco). Esto es: la medida del ángulo *ACB* es la mitad que la del ángulo *AOB*. O también: ángulo *AOB* = 2 · (ángulo *ACB*).

En el caso particular de que *AOB* = 180º ⇒ *ACB* = 90º.



Pequeños retos

Dados los segmentos *a*, *d* y *c*, de longitudes 3, 5 y 6 cm, halla algebraicamente y geométricamente:

a) La cuarta proporcional de los tres segmentos.

b) La tercera proporcional de *a* y *b*.

c) La media proporcional de *a* y *b*.

Solución:

a) 10 cm. b) 25/3 cm. c) $\sqrt{15}$ cm.