PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES EN EL PLANO: APLICACIONES

Producto escalar de vectores

Dados los vectores $\vec{v}=(a_1,\ b_1)$ y $\vec{w}=(a_2,\ b_2)$ se define:

- Producto escalar ordinario: $\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\vec{v},\vec{w})$
- Producto escalar canónico: $\vec{v}\cdot\vec{w}=a_1a_2+b_1b_2$

– Ambas definiciones son equivalentes.
– El producto escalar de vectores es un número: positivo, negativo o cero.

Ejemplo:
Si $\vec{v}$ = (2, –1) y $\vec{w}$ = (4, 5), su producto escalar $\vec{v}\cdot\vec{w}$ = (2, –1) · (4, 5) = 8 – 5 = 3.

Propiedad:
Si $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$, entonces $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares o uno de ellos es el vector nulo.
$\rightarrow$ Si los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares, entonces $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$.

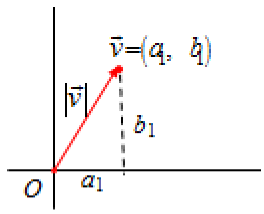
Ejemplo:
Los vectores $\vec{v}$ = (2, –6) y $\vec{w}$ = (3, 1) son perpendiculares, pues $\vec{v}\cdot\vec{w}$ = 2 · 3 – 6 · 1 = 6 – 6 = 0.

Aplicaciones
La determinación de la perpendicularidad entre vectores es una aplicación importante del producto escalar.
Otras aplicaciones son:

Módulo de un vector
Dado $\vec{v}=(a_1,b_1)$, su módulo es lo que mide y su valor es:

$$|\vec{v}|=+\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}.$$

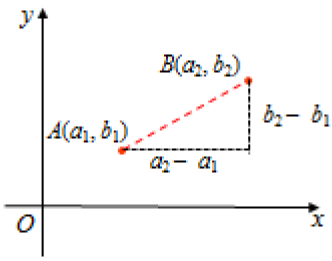
El módulo siempre es positivo.



Ejemplo:
Si $\vec{v}$ = (2, –1) y $\vec{w}$ = (4, 5) $\Rightarrow$ $|\vec{v}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$; $|\vec{w}|=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$.

Distancia entre dos puntos
La distancia entre dos puntos *A* y *B*, *d*(*A*, *B*), es igual al módulo del vector $\overrightarrow{AB}$. Si las coordenadas de esos puntos fuesen $A=(a_1,b_1)$ y $B=(a_2,b_2)$, entonces

$$\overrightarrow{AB}=(a_2-a_1,b_2-b_1)\Rightarrow d(A,B)=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}.$$

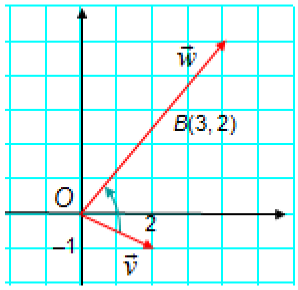


Ejemplo:
Si *A* = (1, –2) y *B* = (3, –1), la distancia, $d(A,B)=\sqrt{(3-1)^2+(-1-(-2))^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.
Obsérvese que la distancia, *d*(*A*, *B*), coincide con el módulo del vector
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ = (3, –1) – (1, –2) = (2, 1).

Ángulo que forman dos vectores

De la primera definición del producto escalar, $\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\vec{v},\vec{w})$, se deduce que:

$$\cos(\vec{v},\vec{w})=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}\Rightarrow \text{ángulo}(\vec{v},\vec{w})=\arccos\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}.$$



Ejemplo:

Para $\vec{v}=(2,-1)$ y $\vec{w}=(4,5)$: $\cos(\vec{v},\vec{w})=\dfrac{3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{41}}\Rightarrow$ ángulo $(\vec{v},\vec{w})=77{,}9^{\text{o}}$.

Vectores ortogonales y vectores ortonormales.

Los vectores ortogonales son los que forman entre sí un ángulo de 90º (los perpendiculares). Por tanto, como cos 90º = 0, su producto escalar valdrá cero. Luego,

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

- Los vectores ortogonales que, además, tienen módulo 1, se llaman ortonormales.
- Los vectores de módulo 1 se llaman unitarios.

Para cualquier vector $\vec{a}$, el vector $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$ es unitario.

Ejemplos:

a) $\vec{a}=(1,-2)$ y $\vec{b}=(4,2)$ son ortogonales, pues $\vec{a}\cdot\vec{b}=(1,-2)\cdot(4,2)=4-4=0$.

b) Como $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$, el vector $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ es unitario.

c) Los vectores que forman la base usual, $B=\{\vec{u}_1=(1,0),\ \vec{u}_2=(0,1)\}$, son ortonormales.

En efecto: $|\vec{u}_1|=\sqrt{1^2+0^2}=1$; $|\vec{u}_2|=\sqrt{0^2+1^2}=1$; $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=1\cdot0+0\cdot1=0$.

Pequeños retos

1. Representa los siguientes vectores y halla el módulo de cada uno de ellos:

a) $\vec{a}=(-1,\ -3)$ b) $\vec{b}=(-2,\ 2)$ c) $\vec{c}=(4,\ 0)$ d) $\vec{d}=(0,\ -3)$

2. Dados los puntos $A(1, 3)$, $B(5, 1)$ y $C(3, -3)$ determina los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CB}$ y las distancias entre cada dos puntos. ¿De qué tipo es el triángulo de vértices A, B y C?

3. Dados los vectores $\vec{a}=(1,3)$, $\vec{b}=(5,-1)$, $\vec{c}=(-2,-6)$ y $\vec{d}=(2,10)$ puede ser útil calcular los ángulos que determinan los pares de vectores que se indican:

a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ b) $\vec{a}$ y $\vec{c}$ c) $\vec{b}$ y $\vec{c}$ d) $\vec{b}$ y $\vec{d}$.

Soluciones:

1. Módulos: a) $\sqrt{10}$. b) $\sqrt{8}$. c) 4. d) 3.

2. $\overrightarrow{AB}=(4,-2)$; $d(A,B)=\sqrt{20}$. $\overrightarrow{AC}=(2,6)$; $d(A,C)=\sqrt{40}$. $\overrightarrow{CB}=(2,4)$; $d(C,B)=\sqrt{20}$. (Figura). El triángulo es isósceles.

3. a) 82,87º. b) 180º. c) 97,13º. d) 90º.