PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES EN EL ESPACIO: APLICACIONES

Dados dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se define el producto escalar ordinario como: $\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\vec{v},\vec{w})$.

Si en la base canónica los vectores vienen dados por $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, entonces se define el producto escalar canónico como: $\vec{v}\cdot\vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$.

– Ambas definiciones son equivalentes, pero la segunda es más operativa.
– Conviene observar que el producto escalar de dos vectores es un número real, que puede ser positivo, negativo o cero.

Ejemplo:
Si $\vec{v} = (2, -1, 3)$ y $\vec{w} = (4, 5, 0)$, su producto escalar vale:
$\vec{v}\cdot\vec{w} = (2, -1, 3)\cdot(4, 5, 0) = 8 - 5 + 0 = 3$.

- **Algunas propiedades del producto escalar**

1. Conmutativa: $\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{v}$ 2. Distributiva: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
3. Para todo $\vec{v}$: $\vec{v}\cdot\vec{v} \geq 0$ 4. Si $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares.

Aplicaciones del producto escalar

1) El **módulo de un vector** $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$, se define así: $|\vec{v}| = +\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$

Ejemplo:
El módulo de los vectores $\vec{v} = (2, -1, 3)$ y $\vec{w} = (4, 5, 0)$ es:
$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$; $|\vec{w}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{41}$

2) Coseno del ángulo que forman dos vectores

De la primera definición del producto escalar, se deduce que: $\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}$.

Si $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ se tiene que:

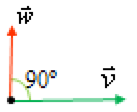
$$\vec{v}\cdot\vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3,\ |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \text{ y } |\vec{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\cdot\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}$$

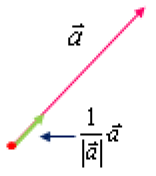
Ejemplo:
El coseno del ángulo que forman los vectores $\vec{v} = (2, -1, 3)$ y $\vec{w} = (4, 5, 0)$ será:

$$\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{8-5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{41}} = \frac{3}{\sqrt{574}} \Rightarrow \text{ángulo}(\vec{v}, \vec{w}) = \arccos\frac{3}{\sqrt{574}} = 82{,}8^{\circ}.$$

3) Vectores ortogonales y vectores ortonormales.



Dos vectores son ortogonales (perpendiculares) si su producto escalar vale cero.
Si dos vectores ortogonales tienen módulo 1, se llaman ortonormales.
Los vectores de módulo 1 se llaman **unitarios**. Para cualquier vector $\vec{a}$, el vector $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$ es unitario.



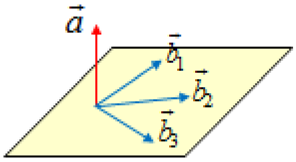
Ejemplos:

a) Los vectores $\vec{a} = (1, -2, 5)$ y $\vec{b} = (3, -1, -1)$ son ortogonales, pues

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, -2, 5) \cdot (3, -1, -1) = 3 + 2 - 5 = 0$

b) Hay infinitos vectores perpendiculares a otro dado. Así, si $\vec{a} = (1, -2, 5)$, para que otro vector $\vec{b} = (x, y, z)$ sea perpendicular a él debe cumplirse que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Esto es:

$(1, -2, 5) \cdot (x, y, z) = 0 \Rightarrow x - 2y + 5z = 0$.



Algunos de esos vectores, que pueden determinarse por tanteo, son:

$\vec{b}_1 = (5, 0, -1)$, $\vec{b}_2 = (1, 3, 1)$ o $\vec{b}_3 = (-3, 1, 1)$.

Observación: La expresión $x - 2y + 5z = 0$ es la ecuación de un plano.
Todos los vectores contenidos en ese plano son perpendiculares al vector $\vec{a} = (1, -2, 5)$.

c) Podría plantearse el problema de encontrar el valor de k que hace que los vectores $\vec{v} = (-1, 2, k)$ y $\vec{w} = (2, k, -1)$ sean perpendiculares.
$\rightarrow$ Debe cumplirse que $\vec{v} \cdot \vec{w} = (-1, 2, k) \cdot (2, k, -1) = 0 \Rightarrow -2 + 2k - k = 0 \Rightarrow k = 2$.

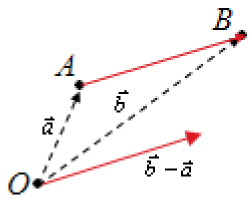
d) Los vectores $\vec{a} = (1, 0, 1)$ y $\vec{b} = (1, 1, -1)$ son perpendiculares; entonces, los vectores

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} \cdot (1, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} \cdot (1, -1, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$$

son unitarios y ortogonales; por tanto, son ortonormales.

e) La base canónica, **B** = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}, es una base ortonormal, pues está formada por vectores unitarios, perpendiculares dos a dos. (La comprobación es inmediata).

4) Distancia entre dos puntos



La distancia entre dos puntos A y B, $d(A, B)$, es igual al módulo del vector que determinan: $d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Si las coordenadas de esos puntos fuesen $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$, entonces

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \Rightarrow d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Ejemplo:

Si $A(1, -2, 0)$ y $B(3, -1, 4)$, la distancia, $d(A, B) = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-(-2))^2 + (4-0)^2} = \sqrt{21}$

Es evidente que coincide con el módulo del vector

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (3, -1, 4) - (1, -2, 0) = (2, 1, 4) \rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{21}$

Pequeños retos

Dados los vectores $\vec{a} = (3, 4, -3)$, $\vec{b} = (-1, 5, -3)$ y $\vec{c} = (0, 6, 8)$, halla:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ y $\vec{a} \cdot \vec{c}$ b) ángulos $(\vec{a}, \vec{b})$ y $(\vec{a}, \vec{c})$ c) Un vector unitario en la dirección de $\vec{c}$

Soluciones:

a) 26 y 0. b) 41,09º y 90º. c) (0, 0,6, 0,8).