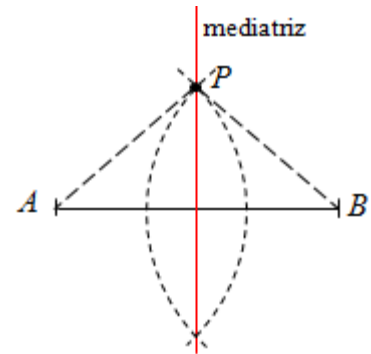


LUGARES GEOMÉTRICOS: MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que cumple una determinada propiedad geométrica. Esta propiedad suele darse en términos de distancias.

- La mediatriz de un segmento, que es la recta perpendicular al segmento por su punto medio, puede definirse como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.

Si los extremos del segmento son A y B , un punto P es de la mediatriz sí y sólo sí $d(P, A) = d(P, B)$. Esta propiedad es la que emplea para trazar la mediatriz con un compás.



- En general, si los puntos son $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, la ecuación de su mediatriz será:

$$\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} = \sqrt{(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2}$$

→ haciendo operaciones (dos veces el cuadrado) se obtiene la ecuación de la recta.

Ejemplo:

Para obtener la mediatriz del segmento de extremos $A(4, 1)$ y $B(-2, 3)$, se supone que $P(x, y)$ es uno de los puntos de ese lugar (un punto genérico).

Como la mediatriz es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de A y B , entonces P cumple que $d(P, A) = d(P, B)$.

Estas distancias son:

$$d(P, A) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} ; d(P, B) = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}$$

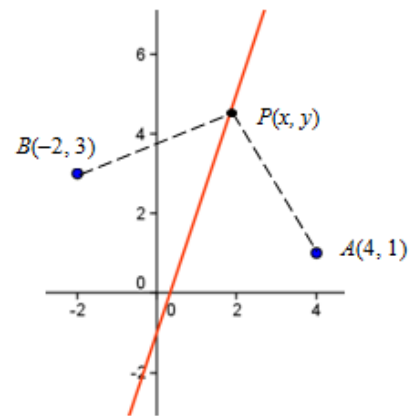
Como deben ser iguales:

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} \Rightarrow$$

(elevando dos veces al cuadrado)

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x - 4y - 4 = 0 \Rightarrow 3x - y - 1 = 0.$$



Observación:

La ecuación de la mediatriz también puede obtenerse hallando la recta perpendicular a recta $A-B$ por su punto medio.

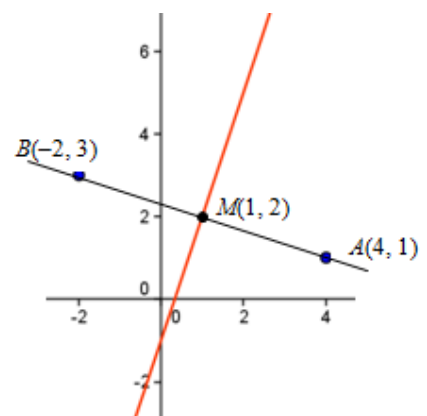
Para los puntos A y B de ejemplo anterior se tiene:

Punto medio: $M(1, 2)$.

$$\text{Recta } A-B: \frac{x+2}{4+2} = \frac{y-3}{1-3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

Recta perpendicular a $A-B$ por el punto M :

$$y - 2 = 3(x - 1) \Rightarrow 3x - y - 1 = 0$$



Pequeños retos

Halla la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A(-2, 0)$ y $B(1, 4)$.

Solución:

$$6x + 8y - 13 = 0.$$