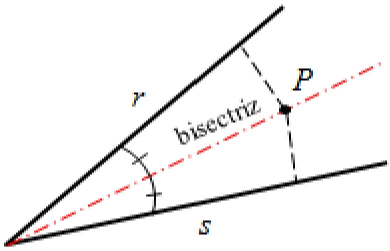
LUGARES GEOMÉTRICOS: BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Como sabes, la bisectriz de un ángulo es la recta que pasando por el vértice divide al ángulo en dos partes iguales. Se puede trazar fácilmente con un compás.

En términos de lugar geométrico se define como sigue:
La bisectriz del ángulo determinado por dos rectas es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dichas rectas. Esto es, si los lados del ángulo vienen dados por las rectas *r* y *s*, un punto *P* es de la bisectriz si verifica que $d(P,r)=d(P,s)$



- En general, si las rectas viene dadas por las ecuaciones:
  $r \equiv ax+by+c=0$ y $s \equiv a'x+b'y+c'=0$

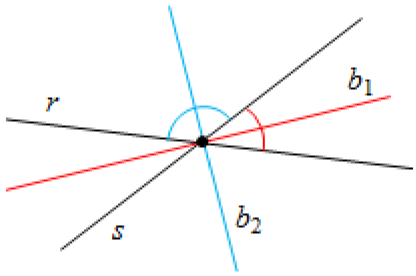
Si $P(x, y)$ es un punto genérico se tiene:

$$d\left(P(x,y),\ r\equiv ax+by+c=0\right)=\left|\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|;\quad d\left(P(x,y),\ s\equiv a'x+b'y+c'=0\right)=\left|\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}\right|$$

Como ambas distancias deben ser iguales se obtiene la igualdad:

$$\left|\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\left|\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}\right| \Leftrightarrow \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a'x+b'y+c'}{\pm\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

Esto significa que se obtienen las ecuaciones de dos rectas, de dos bisectrices: una con el sigo + de la raíz; la otra, con el –.
(Dos rectas, al cortarse, determinan dos ángulos; esos ángulos son suplementarios, suman 180º; las bisectrices de esos ángulos son rectas perpendiculares entre sí).



Ejemplo:
Para obtener la bisectriz del ángulo determinado por las rectas
$r \equiv 4x-3y+1=0$ y $s \equiv 5x+12y=0$,
se supone que $P(x, y)$ es uno de los puntos de ese lugar (un punto genérico).
Ese punto cumple que $d(P,r)=d(P,s)$.
Estas distancias son:

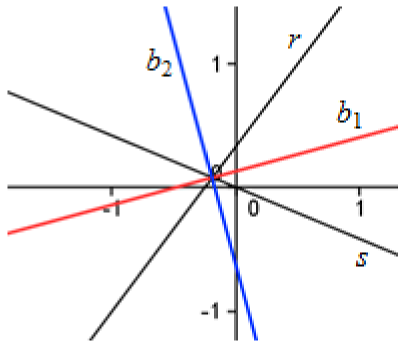
$$d\left(P(x,y),\ r\equiv 4x-3y+1=0\right)=\frac{4x-3y+1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{4x-3y+1}{5};$$

$$d\left(P(x,y),\ s\equiv 5x+12y=0\right)=\frac{5x+12y}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{5x+12y}{13}$$

Igualando: $\dfrac{4x-3y+1}{5}=\dfrac{5x+12y}{\pm 13}$

Con +13: $13(4x-3y+1)=5(5x+12y) \Rightarrow b_1 \equiv 27x-99y+13=0$

Con –13: $-13(4x-3y+1)=5(5x+12y) \Rightarrow b_2 \equiv 77x+21y+13=0$.



Pequeños retos

Halla la bisectriz del ángulo determinado por las rectas: $r: 4x-2y+6=0$ y $s: x+2y-4=0$.

Solución: $b_1: x-3y+7=0$; $b_2: 3x+y-1=0$.