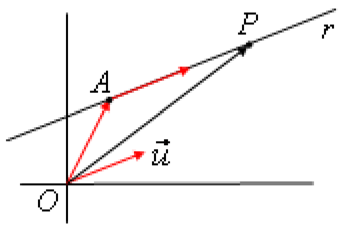
ECUACIONES DE UNA RECTA EN EL PLANO: VECTORIAL, PARAMÉTRICAS…

→ Una recta r viene determinada por un punto A y un vector director $\vec{u}$, que indica su dirección.

Ecuación vectorial



Si P es un punto de la recta r, se cumple la ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u}$$

Si $A(a_1, a_2)$, el vector director es $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y las coordenadas del punto genérico P son (x, y), la ecuación anterior puede escribirse así:

$$(x, y) = (a_1, a_2) + \lambda\cdot(u_1, u_2)$$

Cualquiera de las ecuaciones anteriores recibe el nombre de ecuación vectorial. En la segunda, dicha ecuación se expresa dando las coordenadas de un punto y las del vector director.

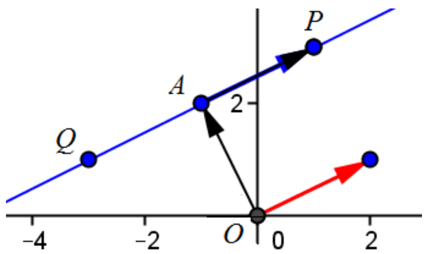
Ecuaciones paramétricas

La ecuación $(x, y) = (a_1, a_2) + \lambda\cdot(u_1, u_2) \Leftrightarrow (x, y) = (a_1 + \lambda u_1, a_2 + \lambda u_2)$.

Igualando las respectivas coordenadas resulta: $\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \end{cases}$; que son las ecuaciones paramétricas.

El parámetro es λ, e indica un número real cualquiera. Dando valores a λ se obtienen las coordenadas de puntos de la recta.

Ejemplo:



Las ecuaciones de la recta que pasa por $A(-1, 2)$ y tiene por vector director $\vec{u} = (2, 1)$ son:

Vectorial: $(x, y) = (-1, 2) + \lambda(2, 1)$.

Paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$

Para $\lambda = 1$ se obtiene el punto de coordenadas:

$x = -1 + 2 = 1$; $y = 2 + 1 = 3$ → $P(1, 3)$.

Para $\lambda = -1$ se obtiene el punto de coordenadas: $x = -1 - 2 = -3$; $y = 2 - 1 = 1$ → $Q(-3, 1)$.

Ecuación continua

Despejando λ en cada una de las ecuaciones paramétricas e igualando las dos expresiones obtenidas, resulta: $\dfrac{x - a_1}{u_1} = \dfrac{y - a_2}{u_2}$, que se llama ecuación continua.

Ejemplo:

La ecuación continua de la recta dada en el ejemplo anterior es: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1}$.

Observación:

Operando en la ecuación continua se obtiene la ecuación general (implícita), pues de:

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} \Rightarrow (x - a_1)\cdot u_2 = (y - a_2)\cdot u_1 \Rightarrow u_2\cdot x - u_1\cdot y - a_1\cdot u_2 + a_2\cdot u_1 = 0$$

Si se hace $u_2 = a$, $-u_1 = b$ y $-a_1\cdot u_2 + a_2\cdot u_1 = c$, queda $ax + by + c = 0$.

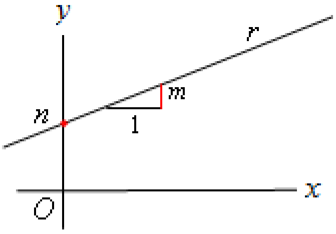
Y despejando en la ecuación implícita se obtiene la explícita: $y = mx + n$

Ecuación punto-pendiente

Se deduce de la ecuación continua (trasponiendo términos): $y-a_2=\frac{u_2}{u_1}(x-a_1)$

Si se hace $m=\frac{u_2}{u_1}$, la ecuación queda $y-a_2=m(x-a_1)$.

El cociente $m=\frac{u_2}{u_1}$ es la pendiente de la recta: es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje *OX*. La pendiente *m* indica lo que aumenta (o disminuye) la variable *y* por cada aumento unitario de la variable *x*.



Ejemplo:
La ecuación de la recta que tiene pendiente *m* = –2 y que pasa por el punto (5, –3) es:

$$y-(-3)=-2(x-5) \Rightarrow y=-2x+7$$

(Puede comprobarse que cuando $x = 5 \Rightarrow y = -3$).

Observaciones:
1) Paso de las ecuaciones paramétricas a la explícita: Se despeja λ en la primera ecuación y se sustituye en la segunda. En el ejemplo $\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=2+\lambda \end{cases}$ quedaría:

$$\lambda=\frac{x+1}{2} \Rightarrow y=2+\frac{x+1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

2) Paso de explícita a paramétricas: Se hace $x = \lambda$ y se despeja *y* en la ecuación inicial
Por ejemplo, si $y=2x-1$, haciendo $x=\lambda$ se tiene que $y=2\lambda-1$.

Las ecuaciones paramétricas serían: $\begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \end{cases}$ → Pasa por *A*(0, –1), siendo $\vec{u}=(1,\ 2)$.

(Estas ecuaciones paramétricas no son únicas, pero todas son equivalentes.)

Pequeños retos
1. Expresa en las formas vectorial, paramétricas y continua, las rectas siguientes:
a) Pasa por el punto *A*(1, –2), con vector director $\vec{u}=(1,\ -3)$.

b) Pasa por el punto *B*(–2, –1), con vector director $\vec{u}=(3,\ 2)$.

2. Halla la ecuación de la recta que tiene pendiente:
a) *m* = 3 y que pasa por el punto (1, –2).
b) *m* = –1 y que pasa por el punto (3, 4).
Soluciones:

1. a) $(x,\ y)=(1,\ -2)+\lambda\cdot(1,\ -3) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2-3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow (3x+y-1=0;\ y=-3x+1)$.

b) $(x,\ y)=(-2,\ -1)+\lambda\cdot(3,\ 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2+3\lambda \\ y=-1+2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2x-3y+1=0;\ y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3})$.

2. a) $y=3x-5$. b) $y=-x+7$